

## 《现代数学基础丛书》编委会

副主编 夏道行 龚 昇 王梓坤 齐民友

编 委 (以姓氏笔画为序)

万哲先 王世强 王柔怀 叶彦谦

孙永生 江泽坚 江泽培 李大潜

陈希孺 张恭庆 严志达 胡和生

姜伯驹 聂灵沼 莫绍揆 曹锡华

## 前 言

20 世纪 80 年代(特别是 90 年代)以来,很多物理学家和数学家对 Ginzburg-Landau(金兹堡-朗道)方程表现出很大的兴趣和关注,对于 Ginzburg-Landau 方程(以下简称 GL 方程)的物理性质和数学理论进行大量深入的研究,发表了大量的文章,取得了丰硕的成果.例如对于 GL 方程长时间出现的不稳定和混沌现象的分析和数值计算, GL 方程整体解和整体吸引子的存在性,惯性流形和近似惯性流形的存在性及其维数的估计,吸引子水平集的 Hausdorff 测度估计等. GL 方程之所以受到如此广泛重视,作者以为它包含非常广泛而深刻的物理内容,如 Benard 对流问题, Taylor-Couette 流动, 平面 Poiseuille 流, 化学反应的湍流问题, Kuramoto-Sivashinsky 方程的某种临界状态以及超导中的涡旋问题,以及它的模型方程与调和映射问题紧密相关等.

本书旨在让读者了解 GL 方程物理背景的基础上,用比较简单明了、深入浅出的方法和尽量少的篇幅来介绍当前研究 GL 方程的主要内容、典型方法以及所得到的最新成果,其中包括作者及合作者的一些结果.在第二、三章中介绍一维和高维 GL 方程的整体解及当  $t \rightarrow \infty$  时解的渐近性态.第四章介绍超导中的 GL 方程.第五章介绍 GL 模型方程和调和映射的紧密联系.

由于 Ginzburg-Landau 方程研究的内容十分丰富和非常广泛,研究方法多样,研究结果层出不穷,再加上目前国内国际上还没有一本关于 GL 方程的专著,由于作者现有的水平和能力,本书难免存在许多不妥之处,敬请读者批评和指正.

最后,我要衷心感谢周毓麟院士、肖玲教授、常谦顺教授等,他们对本书的出版给予热情的支持和帮助,并提出了许多宝贵的意见.

郭柏灵

2001 年 9 月于北京

# 目 录

第一章 Ginzburg-Landau 方程的物理背景 .....	(1)
§ 1 Benard 对流问题 .....	(1)
§ 2 Taylor-Couette 流动 .....	(6)
§ 3 平面 Poiseuille 流 .....	(11)
§ 4 化学反应中的湍流问题 .....	(14)
§ 5 从 KS 方程过渡到 Ginzburg-Landau 方程 .....	(20)
§ 6 超导中的 Ginzburg-Landau 模型 .....	(22)
参考文献 .....	(26)
第二章 一维 Ginzburg-Landau 方程的整体解及其渐近性态 .....	(27)
§ 1 广义 Ginzburg-Landau 方程的整体解及其整体吸引子 .....	(27)
§ 2 广义 Ginzburg-Landau 方程的行波解分析 .....	(39)
§ 3 Ginzburg-Landau 方程拟周期解的不稳定性 .....	(53)
§ 4 广义 Ginzburg-Landau 方程平面波的非线性稳定性 .....	(65)
§ 5 广义 Ginzburg-Landau 方程的有限维惯性形式 .....	(73)
§ 6 广义 Ginzburg-Landau 方程的指数吸引子 .....	(91)
§ 7 Ginzburg-Landau 方程的惯性流形的构造 .....	(96)
§ 8 广义 Ginzburg-Landau 方程的 Gevrey 正则性 .....	(121)
§ 9 广义 Ginzburg-Landau 方程的决定结点 .....	(134)
§ 10 三次非线性 Ginzburg-Landau 方程的动力系统结构 及其数值分析 .....	(142)
§ 11 三次一五次非线性 Ginzburg-Landau 方程的慢周期解 .....	(154)
§ 12 广义 Ginzburg-Landau 方程行波解的稳定性 .....	(169)
§ 13 Ginzburg-Landau 方程的环绕数上界估计 .....	(182)
§ 14 广义 Ginzburg-Landau 方程的离散吸引子及其维数估计 .....	(193)
§ 15 扰动的三次一五次非线性 Schrödinger 方程的 稳定性准则 .....	(212)

§ 16 广义 Ginzburg-Landau 方程平面波的非线性不稳定性 .....	(233)
参考文献 .....	(241)
第三章 高维 Ginzburg-Landau 方程的整体解及其渐近性质 .....	(243)
§ 1 高维 Ginzburg-Landau 方程的整体解 .....	(243)
§ 2 局部空间上的 Ginzburg-Landau 方程的 Cauchy 问题 .....	(278)
§ 3 一般二维 Ginzburg-Landau 方程的整体吸引子 .....	(308)
§ 4 一般 Ginzburg-Landau 方程的动力长度 .....	(315)
§ 5 一般 Ginzburg-Landau 方程解的水平集的 Hausdorff 测度 .....	(330)
§ 6 二维广义(具导数项)Ginzburg-Landau 方程的整体吸引子 .....	(345)
§ 7 二维具导数 Ginzburg-Landau 方程的 Gevrey 正则性和近似惯性流形 .....	(363)
§ 8 无界域上广义 Ginzburg-Landau 方程的整体吸引子 .....	(377)
§ 9 广义 Ginzburg-Landau 方程的时间周期解 .....	(396)
§ 10 Ginzburg-Landau 方程逼近 NLS 方程 .....	(406)
§ 11 二维广义 Ginzburg-Landau 方程殆周期解的存在性 .....	(422)
参考文献 .....	(439)
第四章 超导中的 Ginzburg-Landau 方程 .....	(441)
§ 1 Ginzburg-Landau 方程的 Cauchy 问题 .....	(441)
§ 2 Ginzburg-Landau 方程的整体吸引子 .....	(452)
§ 3 双曲型 Ginzburg-Landau 方程 .....	(459)
§ 4 Maxwell-Higgs 方程组关于对称涡度的不稳定性 .....	(465)
参考文献 .....	(493)
第五章 Ginzburg-Landau 模型方程 .....	(495)
§ 1 $\deg(g, \partial\Omega) = 0$ 的情形 .....	(495)
§ 2 $\deg(g, \partial\Omega) \neq 0$ 的情形 .....	(522)
§ 3 Ginzburg-Landau 热流方程 .....	(566)
§ 4 Ginzburg-Landau 方程和平均曲率流 .....	(582)
参考文献 .....	(609)



# 第一章 Ginzburg-Landau 方程的物理背景

Ginzburg-Landau 方程具有十分丰富的物理背景和内涵,近 20 年来特别引人注目.在这一章里我们仅对 Benard 对流<sup>[1]</sup>, Taylor-Couette 流<sup>[2]</sup>,平面 Poiseuille 流<sup>[3]</sup>以及化学湍流的问题<sup>[4]</sup>如何导致 GL 方程作一简要的介绍,其他的在非平衡态中的相变,等离子体中的漂移耗散波,以及在发热的放电器中的电离波等,可在文献[5—7]中找到,至于超导中的 Ginzburg-Landau 方程,我们也作一点概况性的介绍.

## § 1 Benard 对流问题

这是一个非常古典的流动问题,也是一个有非常重要实际研究价值的问题.1900 年 Benard 最早对这个问题作了实验观察,他观察了一个圆盘容器内一层厚度不到一毫米的薄液体层在底部进行加热时的热对流情况.容器底部是一块加热并保持常温的金属平板,液体的上表面是自由表面,上表面的温度低于底部平板处的温度,当这层液体上表面温度差达到某一临界值时,液体内开始形成规则排列成蜂窝状泡结构,其中液体从涡泡的中心处上升,在顶部向外移动,然后在外面涡泡垂直边界处下降,到底部后再向中心处移动,这种涡泡被称为 Benard 涡泡.1950 年 Tippelskirch 发现通常在液体中的涡泡中心处流动是向上的,而在气体中通常在中心处的流动是向下的,其原因是因为液体的黏性随温度的增大而减少,而气体的黏性则随温度的增加而增加.

Lord Rayleigh 于 1916 年从理论上第一个研究了这种热对流现象,他找到了一个确定稳定性的无量纲参数,现被称为 Rayleigh 数,它定义为

$$Ra = \frac{g\alpha(T_0 - T_1)d^2}{\nu\kappa},$$

这里  $d$  是液体片的厚度,  $T_0, T_1$  分别是下上表面的温度,  $g$  是重力加速度,  $\alpha$  是体积膨胀系数,  $\kappa$  是热扩散系数,  $\nu$  是运动黏性系数.

1956 年 Bloch 等对热对流过程进行了详细的观察, 发现随着底部边界温度的增加, 即随着 Rayleigh 数的增加, 出现了许多形态各异的图像, 整个过渡过程是:

(1) 当  $Ra < Ra_c$  时, 流体是静止的, 没有热对流产生,  $Ra_c$  是临界 Rayleigh 数.

(2) 当  $Ra_c < Ra < Ra_w$  时, 出现定常涡卷的流动,

(3) 当  $Ra_w < Ra < Ra_q$  时, 出现定常双模态流动,

(4) 当  $Ra_q < Ra < Ra_l$  时, 出现振动双模态流动,

(5) 当  $Ra_l < Ra$  时, 出现湍流运动,

其中  $Ra_w, Ra_q, Ra_l$  均为物理常数.

忽略黏性耗散所引起的热传导, 运用 Boussinesq 近似, 可得描述 Benard 对流的如下的 Newton-Boussinesq 方程为

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}) = -\nabla \left( \frac{p}{\rho_r} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) + \alpha g z T + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \end{array} \right. \quad (1.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{u}, \end{array} \right. \quad (1.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T - \beta w = \kappa \nabla^2 T, \end{array} \right. \quad (1.3)$$

其中  $T(\mathbf{r}, t)$ ,  $p(\mathbf{r}, t)$  和  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  分别表示扰动的温度, 压力和速度.  $\kappa$  为热传导,  $\nu$  为黏性,  $\mathbf{z}$  为垂直方向的单位向量,  $w = \mathbf{u} \cdot \mathbf{z}$ , 上述定态方程由线性温度分布决定:

$$\frac{d\bar{T}(z)}{dz} = -\beta, \quad (1.4)$$

$$\frac{d\bar{p}(z)}{dz} = -\rho r g \{1 - \alpha(\bar{T} - Tr)\}, \quad (1.5)$$

$$u = 0, \quad (1.6)$$

其中  $\alpha$  为流体的立方展开系数,  $\rho_r$ ,  $Tr$  为参考的密度和温度, 坐标  $z$  表示垂直于  $x, y$  平面的坐标, 给定边界条件为

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0, \quad T = 0, \quad z = 0, d. \quad (1.7)$$

设  $R_{cr}$  为临界的 Rayleigh 数, 并在  $R - R_{cr} = 0(\epsilon)$  附近考虑, 设问题(1.1)—(1.3)的中性解具有形式

$$\left\{ \begin{aligned} w_0 &= \{w(x, y, T)e^{ik \cdot x} + w^*(x, y, T)e^{-ik \cdot x}\} \sin \frac{\pi z}{d}, \\ T_0 &= \frac{\beta_0 d^2}{k(\pi^2 + k^2 d^2)} (we^{ik \cdot x} + w^* e^{-ik \cdot x}) \sin \frac{\pi z}{d}, \\ u_0 &= \frac{ik_x \pi}{k^2 d} (we^{ik \cdot x} - w^* e^{-ik \cdot x}) \cos \frac{\pi z}{d}, \\ v_0 &= \frac{ik_y \pi}{k^2 d} (we^{ik \cdot x} - w^* e^{-ik \cdot x}) \cos \frac{\pi z}{d}, \\ \frac{p_0}{\rho_r} &= \frac{-\pi k}{k^2 d} \left( \frac{\pi^2}{d^2} + k^2 \right) (we^{ik \cdot x} + w^* e^{-ik \cdot x}) \cos \frac{\pi z}{d}, \\ k \cdot x &= k_x x + k_y y, \end{aligned} \right. \quad (1.8)$$

其中振幅  $w$  为位置和时度的慢度函数,

$$X = \epsilon x, \quad Y = \epsilon y, \quad T = \epsilon^2 t, \quad (1.9)$$

$\beta_0$  为最低温度梯度常数. 由(1.9)有

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial T}, \\ \nabla_x &\rightarrow \nabla_{1x} + \epsilon \nabla_{1X}, \quad \nabla_{1x} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \nabla_{1X} = \left( \frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y} \right) \end{aligned} \right. \quad (1.10)$$

为使方程组(1.1)—(1.3)化为单个方程, 令  $\nabla \times \nabla \times$  作用于(1.2)再作和  $z$  的向量点积, 然后作用算子  $\left( \frac{\partial}{\partial t} - \kappa \nabla^2 \right)$ , 利用方程(1.3)可得

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} - \kappa \nabla^2 \right) \nabla^2 w - \alpha g (\beta_0 + \varepsilon^2 \beta_2) \nabla_1^2 w \\
& = -\alpha g \nabla_1^2 (\mathbf{u} \cdot \nabla T) + \left( \frac{\partial}{\partial t} - k \nabla^2 \right) [\mathbf{z} \cdot (\nabla \\
& \quad \times \nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u})]. \tag{1.11}
\end{aligned}$$

因变量依  $\varepsilon$  作幂级数展开得

$$f = \varepsilon f_0 + \varepsilon^2 f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \cdots, \quad f = (u, v, w, T, p), \tag{1.12}$$

其中  $f_0$  为中性解(1.8). 方程(1.11)在交换(1.9), (1.10)下可得

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{L}_0 + \varepsilon \mathcal{L}_1 + \varepsilon^2 \mathcal{L}_2)(w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2) \\
& = -\alpha g \varepsilon (\nabla_{1x}^2 + 2\varepsilon \nabla_{1x} \nabla_{1X}) \{u_0 \cdot \nabla T_0 + \varepsilon (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla T_0 \\
& \quad + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla T_1)\} + \varepsilon \left\{ \frac{\partial}{\partial t} - \kappa \left( \nabla_{1x}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2\varepsilon \nabla_{1x} \cdot \nabla_{1X} \right) \right\} [\bar{\nabla} \\
& \quad \times \bar{\nabla} \times (\boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{u}_0) + \varepsilon (\boldsymbol{\Omega}_1 \times \mathbf{u}_0) + \varepsilon (\boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{u}_1)] \cdot \mathbf{z}, \tag{1.13}
\end{aligned}$$

其中算子

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_0 &= \left\{ \frac{\partial}{\partial t} - \nu \left( \nabla_{1x}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} - \kappa \left( \nabla_{1x}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right\} \\
& \quad \times \left( \nabla_{1x}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - \alpha g \beta_0 \nabla_{1x}^2, \\
\mathcal{L}_1 &= z \left[ \left\{ \frac{\partial}{\partial t} - \nu \left( \nabla_{1x}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} - \kappa \left( \nabla_{1x}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right\} \right. \\
& \quad - \kappa \left\{ \frac{\partial}{\partial t} - \nu \left( \nabla_{1x}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right\} \left( \nabla_{1x}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \\
& \quad \left. - \nu \left\{ \frac{\partial}{\partial t} - \kappa \left( \nabla_{1x}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right\} \left( \nabla_{1x}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - \alpha g \beta_0 \right] \nabla_{1x} \nabla_{1X}, \\
\mathcal{L}_2 &= \left[ \left\{ \frac{\partial}{\partial t} - \nu \left( \nabla_{1x}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} - \kappa \left( \nabla_{1x}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right\} \right. \\
& \quad - \kappa \left\{ \frac{\partial}{\partial t} - \nu \left( \nabla_{1x}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right\} \left( \nabla_{1x}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - \nu \left\{ \frac{\partial}{\partial t} - \kappa \left( \nabla_{1x}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right\} \\
& \quad \times \left( \nabla_{1x}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - \alpha g \beta_0 \left. \right] \nabla_{1X}^2 + \left[ \alpha \frac{\partial}{\partial t} - (\kappa + \nu) \left( \nabla_{1x}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right] \\
& \quad \times \left( \nabla_{1x}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial}{\partial T} + 4 \left[ \nu \kappa \left( \nabla_{1x}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - \kappa \left\{ \frac{\partial}{\partial t} - \nu \left( \nabla_{1x}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$-\nu \left\{ \frac{\partial}{\partial t} - \kappa \left( \nabla_{\mathbf{I}}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right\} \times (\nabla_{\mathbf{I}x} \cdot \nabla_{\mathbf{I}X})^2 - \alpha g \beta_2 \nabla_{\mathbf{I}x}^2, \\ \tilde{\nabla} = \nabla_{\mathbf{I}x} + \varepsilon \nabla_{\mathbf{I}X}, \quad (1.14)$$

线性平衡项产生中性解(1.8), 注意第一个非线性项产生二阶调和项, 可求出二阶调和项  $f_1^{(2)}$  为

$$w_1^{(2)} = u_1^{(2)} = v_1^{(2)} = 0, \\ T_1^{(2)} = -\frac{\beta_0 d^3}{2\pi k^2 (\pi^2 + k^2 d^2)} w w^* \sin \frac{2\pi}{d}, \\ p_1^{(2)} = \left\{ \frac{\alpha g \beta_0 d^4}{4\pi^2 k^2 (\pi^2 + k^2 d^2)} + 1 \right\} w w^* \cos \frac{2\pi}{d} \\ + \frac{\pi^2}{k^2 d^2} (w^2 e^{2ik \cdot x} + w^{*2} e^{-2ik \cdot x}). \quad (1.15)$$

由(1.8)和(1.15)可得(1.13)的  $O(\varepsilon^2)$  平衡条件为:

$$\mathcal{L}_0 w_2 = -\mathcal{L}_2 w_0 + \frac{\alpha g \beta \cdot d^2 k^2}{2\kappa^2 (\pi^2 + k^2 d^2)} w w^* (w e^{-ih \cdot x} \\ + w^* e^{ih \cdot x}) \sin \frac{\pi z}{d} + \text{其他项}. \quad (1.16)$$

其边界条件

$$w_2 = \frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2} = \frac{\partial^4 w_2}{\partial z^4} = 0. \quad (1.17)$$

(1.16)中的其他项为高阶调和项, 不包含对应于算子其边界条件(1.17)的特征函数. (1.16)右端的第一、第二项包含算子  $\mathcal{L}_0$  的自然特征函数, 因此可解条件为

$$\hat{\mathcal{L}}_2 w = \frac{\alpha g \beta_0 d^2 k^2}{2\kappa^2 (\pi^2 + k^2 d^2)} w^2 w^*, \quad (1.18)$$

其中

$$\hat{\mathcal{L}}_2 = -(\nu + h) \left( \frac{\pi^2}{d^2} + k^2 \right)^2 \frac{\partial}{\partial T} + 12\nu k \left( \frac{\pi^2}{d^2} + k^2 \right) \\ \cdot (k \cdot \nabla_x)^2 + \alpha g \beta_2 k^2. \quad (1.19)$$

引入无量纲化如下:

$$\boldsymbol{w} = \left( \frac{\kappa}{d} \right) \overline{\boldsymbol{w}}, \boldsymbol{k} = \frac{1}{d} \hat{\boldsymbol{k}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{1}{d} \boldsymbol{n},$$

$$T = \left( \frac{d^2}{\kappa} \right) \overline{T}, x = dx,$$

令  $\beta_2 = \chi \beta_0, \frac{\nu}{\kappa} = p$ , (prandtl 数), 我们有

$$\frac{\partial(p+1)}{p} \frac{\partial \overline{\boldsymbol{w}}}{\partial T} - 8(\boldsymbol{n} \cdot \nabla_x)^2 \overline{\boldsymbol{w}} = (3\pi^2 \chi - \overline{\boldsymbol{w}'} \cdot \overline{\boldsymbol{w}^*}) \overline{\boldsymbol{w}}. \quad (1.20)$$

如令  $X = \varepsilon x, Y = \sqrt{\varepsilon} y$ , 则由(1.20)可得

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial T} - \left( \frac{\partial}{\partial X} - \frac{i}{\sqrt{2}\pi} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right)^2 \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}^2 \boldsymbol{w}^*, \quad (1.21)$$

其中

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}(\varepsilon x, \sqrt{\varepsilon} y, \varepsilon^2 t). \quad (1.22)$$

## § 2 Taylor-Couette 流动

两个转动的同心圆柱间的流动, 即 Taylor-Couette 流, 是一个非常古典的流动稳定性问题, 多年来, 它一直作为一个范例而成为理论和实验研究的对象. 1890 年 Couette 从研究流体的黏性开始, 观察了内圆柱固定而外圆柱转动的两圆柱流体的运动状况, 他发现只要外圆柱转速(角速度  $\Omega_2$ ) 不超过某一个临界值时, 扭矩与  $\Omega_2$  成正比, 而  $\Omega_2$  超过这个临界值时, 扭矩迅速上升, 这就是说此时流体的黏性系数从一个不变的常数值突然发生了很明显的变化, 事实上流体从层流状态转变为湍流状态. 1896 年 Mallock 则研究了外圆柱固定而内圆柱以角速度  $\Omega_1$  转动的情况, 他发现对每一个  $\Omega_1$  都有不稳定发生. 最早从理论上研究理想流体的旋转运动的稳定性问题的是 Lord Rayleigh(1880, 1916), 他发现流动的稳定性与转动的角速度  $\Omega$  和离旋转轴的距离的平方的乘积  $\Omega r^2$  的变化有关, 他的结论是如果  $\Omega r^2$  随半径增加而增加, 流动是稳定的, 而如果  $\Omega r^2$  随半径的增加而减少, 则流动是不稳定的. 此后, G. I. Taylor 在 1923 年的第一届国际理论和应用力学大会上发表

了他的第一篇系统讨论两个转动的同心圆柱间的黏性流体的流动稳定性的文章,使这个问题的研究取得了重要的进展.他用线性化的扰动理论计算的结果与实验测量的数据比较,发现符合得很好.以后,Donnelly (1958, 1960), Coles (1961, 1965) Collab 和 Swinney (1975) 等人进一步作了大量的实验研究和观测,他们发现在不同条件下整个过渡的现象有很大的差别,这里分两种情况进行讨论.

### (1) 两个圆柱的转动方向是相同的情况

Coles 发现当内圆柱比外圆柱转动更快时(包括外圆柱固定的情况),如果逐渐增加内圆柱的转动角速度  $\Omega_1$ , 当它达到某个临界速度时,即达到一个临界雷诺数  $Re_c$  时,两个圆柱间的流动出现了沿轴向规则分布的环形涡旋(通常称为 Taylor 涡旋),这种环形涡旋总是成对出现,相邻的涡旋转动方向相反,如果再继续增加内圆柱的转动速度,直到另一个转动雷诺数  $Re_w$  时,在沿转动方向上开始出现一种规则的波状运动,这种波以大约是内圆柱角速度的三分之一的角速度绕轴转动.随着内圆柱的转速再进一步增加,沿轴向环形涡旋数目逐渐减少,而沿转动方向的波数却不断增加,同时出现准周期波状运动,当内圆柱转动速度一直增加到某个数值时,即  $Re$  达到  $Re_t$  时,流动就出现湍流状态.

### (2) 两个圆柱的转动方向是相反的情况

此时流动一般是不稳定的.当内圆柱比外圆柱转动得更快时,情况和上面所说的类似,不过此时观察到的环形涡旋并不充满整个从内圆柱到外圆柱的壁面之间,而是在内圆柱的壁面和流场中某一区域之间.如果外圆柱比内圆柱转动得更快时,流场中会出现各种不同的情况,例如,调制波,螺旋波,间歇分布的螺旋湍流带等,这种螺旋型的湍流带是和同样是螺旋型的层流带交替相间分布的.随着外圆柱的转速进一步增加,这种局部湍流区域逐步扩大,最后发展成整个流场都是湍流的状态.

Couette-Taylor 流可用 Navier-Stokes 方程来描述:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla) V + \frac{1}{\rho} \nabla p = \nu \Delta V + f, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot V = 0, \quad (2.2)$$

具边界条件

$$V_r = V_z = 0, V_\theta = \Omega_j R_j, r = R_j, j = 1, 2, \quad (2.3)$$

其中  $\rho$  为密度(常数),  $\nu$  为动力黏性,  $p$  为压力,  $V$  为流体质点的速度向量.  $f$  为单位质量的外力密度, 函数  $V, p$  为  $(x, t)$  的函数,  $x \in Q, y \in \Sigma, z \in R$ , 在柱坐标  $(r, \theta)$  下, 横截面  $\Sigma$  定义为  $R_1 < r < R_2, \theta \in \pi^1$ , 这里  $\pi^1$  表示圆  $\frac{R}{2\pi}$ ,  $R_1, R_2$  表示圆柱的内外半径, 在柱坐标下,  $V(x, t)$  可写为  $(v_r, v_\theta, v_z)$ , 在边界条件(2.3)中,  $\Omega_j, j = 1, 2$  分别表示内外圆柱的角速度, 如图 2.1 所示.

现考虑方程(2.1)、(2.2)的无量纲表示, 设  $\Omega_1 \neq 0$ , 令  $d = R_2 - R_1, R_1 \Omega_1$  为内圆柱速度,

$$\frac{d^2}{\nu} \text{ 为黏性时间, } \rho \nu R_1 \frac{\Omega_1}{d},$$

分别称为长度, 速度, 时间, 压力, 作如下无量纲参数:

$$\Omega = \frac{\Omega_2}{\Omega_1}, \eta = \frac{R_1}{R_2}, R = \frac{R_1 \Omega_1 d}{\nu}, \quad (2.4)$$

其中  $R$  被称为 Reynolds 数. 于是在无外力下, (2.1)、(2.2)为

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + R(V \cdot \nabla) V + \nabla p = \Delta V, \\ \nabla \cdot V = 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

边界条件为

$$\begin{cases} V_r = V_z = 0, V_\theta = 1, r = \frac{\eta}{1-\eta}, \\ V_\theta = \frac{\Omega}{\eta}, r = \frac{1}{1-\eta}. \end{cases} \quad (2.6)$$

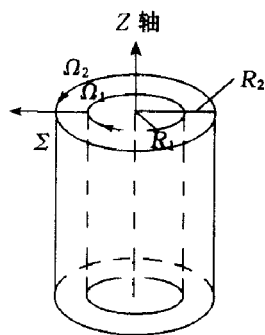


图 2.1



方程组(2.5)在柱坐标下可写为

$$\begin{cases} \frac{\partial v_r}{\partial t} = \Delta v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{\partial p}{\partial r} - R \left[ v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right], \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} = \Delta v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - R \left[ v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right], \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} = \Delta v_z - \frac{\partial p}{\partial z} - R \left[ v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] \\ \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (2.7)$$

其中  $\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ .

对于方程(2.5)可在定常解 Couette 流附近作扰动. 令

$$V = V^{(0)} + v, p = p^{(0)} + q, \quad (2.8)$$

其中

$$V^{(0)} = (0, v^{(0)}(x), 0), v^{(0)}(x) = (J_2 - J_1)X + \frac{(J_1 + J_2)}{2}, \quad (2.9)$$

$$J_j = R_j \Omega_j \frac{d}{\nu} \sqrt{2(1 - \eta)}, \quad j = 1, 2.$$

由此可得  $(v, q)$  满足下列方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \tilde{\Delta} v - v^{(0)}(x) \frac{\partial v}{\partial \eta} + \begin{pmatrix} v^{(0)}(x) u_\eta + \frac{u_y^2}{2} \\ -v^{(0)}(x) u_r + f(y) \\ 0 \end{pmatrix} - (v \cdot \nabla) v - \tilde{\nabla} q, \\ \nabla \cdot v = 0, \\ v|_{x=\pm \frac{1}{2}} = 0, f(y) \text{ 为任意 } v, \end{cases} \quad (2.10)$$

对上述方程组(2.10)线性化, 并寻找特征模

$$\begin{cases} v = \hat{v}(x) e^{\sigma t + i(\alpha z + \beta y)}, \\ q = \hat{p}(x) e^{\sigma t + i(\alpha z + \beta y)}, \\ f = \hat{c} e^{\sigma t + i(\alpha z + \beta y)}, \end{cases} \quad (2.11)$$

可得特征值  $\sigma$  满足的方程为

$$\begin{cases} (D^2 - \alpha^2 - \sigma - i\beta v^{(0)}(x))\hat{u}_i + v^{(0)}(x)\hat{u}_y - D\hat{p} = 0, \\ (D^2 - \alpha^2 - \sigma - i\beta v^{(0)}(x))\hat{u}_y + (J_1 - J_2)\hat{u}_x + \hat{c} = 0, \\ (D^2 - \alpha^2 - \sigma - i\beta v^{(0)}(x))\hat{u}_z - i\alpha\hat{p} = 0, \\ D\hat{u}_i + i\beta\hat{u}_y + i\alpha\hat{u}_z = 0, \\ \hat{u}_x + \hat{u}_y + \hat{u}_z = 0, x = \pm \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (2.12)$$

设临界特征值为零,且临界波数在径度方向也为零,此时特征模为

$$\xi_0 = \hat{v}(x)e^{i\alpha z}, \quad (2.13)$$

设 Couette 流的扰动  $v$  为

$$v = A(y, z, t)\xi_0 + \bar{A}(y, z, t)\bar{\xi}_0 + \Phi(\mu, A, \bar{A}, \partial_y, \partial_z), \quad (2.14)$$

其中考虑振幅函数  $A$  的变元,  $y, z$  均为慢变变元,  $\partial_y, \partial_z$  为小参量,  $(\partial_y A, \partial_z A, \partial_{y^n \dots y, z^n \dots z} A, \partial_y \bar{A}, \partial_z \bar{A}, \dots)$  在展开中均为独立的,  $\Phi$  通常表示为中心流形,  $\mu$  为物理常数, 考虑主要部分可得如下形式的 Ginzburg-Landau 方程

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \mu A + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + i\alpha \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial z} - A|A|^2. \quad (2.15)$$

对于临界波数在径度方向不为零, 临界特征值为纯虚数的情况下, 可设临界特征函数为

$$\xi_0 = \hat{U}(x)e^{i(\alpha_c z + \beta_c y)}, \xi_1 = \hat{V}(x)e^{i(\alpha_c z + \beta_c y)}, \bar{\xi}_0, \bar{\xi}_1, \quad (2.16)$$

其中  $\hat{V}(x)$  为  $\hat{U}(x)$  的虚部, 此时 Couette 流的扰动  $U$  为

$$U = A(y, z, t)\xi_0 + \bar{A}(y, z, t)\bar{\xi}_0 + B(y, z, t)\xi_1 + \bar{B}(y, z, t)\bar{\xi}_1 + \Phi(\mu, A, \bar{A}, B, \bar{B}, \partial_y, \partial_z), \quad (2.17)$$

可得如下的 Ginzburg-Landau 方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} = aA + a_1 \frac{\partial A}{\partial y} + b_1 \frac{\partial A}{\partial z} + c_1 \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + d_1 \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + e_1 \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial z} + bA |A|^2 + cA |B|^2, \\ \frac{\partial B}{\partial t} = aB + a_1 \frac{\partial B}{\partial y} - b_1 \frac{\partial B}{\partial z} + c_1 \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} + d_1 \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} - e_1 \frac{\partial^2 B}{\partial y \partial z} + cB |A|^2 + bB |B|^2, \end{cases} \quad (2.18)$$

其中  $a, a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, b, c$  均为物理常数.

### § 3 平面 Poiseuille 流

考虑二维不可压缩黏性流体运动, 其方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{1}{R} \nabla^2 \xi, \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} \xi = -\nabla^2 \psi, \end{cases} \quad (3.2)$$

其中  $x$  表示平行平面的坐标,  $z$  表示其垂直坐标,  $\psi(x, z, t)$  为流函数,  $R = U_0 \frac{h}{\nu}$ ,  $U_0$  为参考最大速度,  $h$  为参考长度,  $\nu$  为动力黏性,  $R$  为 Reynolds 数.

引入附加变元

$$\chi = \epsilon x, \tau = \epsilon t. \quad (3.3)$$

设  $\psi$  可表为

$$\begin{aligned} \psi = & \phi_0(z, \chi, \tau) + \phi_1(z, \chi, \tau)E + \bar{\phi}_1(z, \chi, \tau)E^{-1} \\ & + \phi_2(z, \chi, \tau)E^2 + \bar{\phi}_2(z, \chi, \tau)E^{-2} + \dots, \end{aligned} \quad (3.4)$$

其中  $E = \exp[i\alpha_c(x - c_t t)]$ ,  $\alpha_c, c_t$  为物理常数, 由方程(3.1)、(3.2)有

$$\begin{aligned} \xi = & -(\phi_0'' + \epsilon^2 \phi_{0\chi\chi}) - (\phi_1'' - \alpha^2 \phi_1 + \tau i \alpha \phi_{1\chi} + \epsilon^2 \phi_{1\chi\chi})E - c \cdot c \\ & - (\phi_2'' - 4\alpha^2 \phi_2 + 4i\alpha\epsilon \phi_{2\chi} + \epsilon^2 \phi_{2\chi\chi})E^2 - c \cdot c \dots \end{aligned} \quad (3.5)$$

其中我们用到了关系式

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \chi} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \chi}, \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \tau} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \tau}. \quad (3.6)$$

设

$$\begin{cases} \phi_1 = \epsilon^{\frac{1}{2}} \phi_{11}(\chi, \tau, z) + \epsilon^{\frac{3}{2}} \phi_{13}(\chi, \tau, z) + O(\epsilon^{\frac{5}{2}}), \\ \phi_2 = \epsilon \phi_{22}(\chi, \tau, z) + O(\epsilon^2), \\ \phi_0 = z - \frac{1}{3} z^3 + \epsilon \phi_{0\tau}(\chi, \tau, z) + O(\epsilon^2). \end{cases} \quad (3.7)$$

其中  $\phi_{nm}$  与  $x, t, \epsilon$  无关, 展开  $R$  为

$$R = R_c + d_{ir} \epsilon + O(\epsilon^2), \quad (3.8)$$

这里  $d_{ir}$  为物理常数, 代入 (3.1)、(3.2), 由比较  $\epsilon^{\frac{1}{2}}$  阶数系数得

$$\begin{aligned} (1 - z^2 - c_r) \left( \frac{\partial^2 \phi_{11}}{\partial z^2} - \alpha_c^2 \phi_{11} \right) + 2 \phi_{11} \\ + \frac{i}{\alpha_c R_c} \left( \frac{\partial^4 \phi_{11}}{\partial z^4} - 2 \alpha_c^2 \frac{\partial^2 \phi_{11}}{\partial z^2} + \alpha_c^4 \phi_{11} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

边界条件为

$$\phi_{11} = \frac{\partial \phi_{11}}{\partial z} = 0, \quad z = \pm 1. \quad (3.10)$$

令

$$\phi_{11} = A(\chi, \tau) \psi_1(z), \quad (3.11)$$

其中振幅常数  $A$  待求,  $\psi_1(z)$  为已知, 它满足方程

$$\begin{aligned} (1 - z^2 - c_r) (\psi_1'' - \alpha_c^2 \psi_1) + 2 \psi_1 \\ + \left( \frac{i}{\alpha_c} R_c \right) (\psi_1''' - 2 \alpha_c^2 \psi_1'' + \alpha_c^4 \psi_1) = 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\psi_1(0) = 1. \quad (3.13)$$

$\epsilon$  阶系数为零得

$$\begin{aligned} (1 - z^2 - c_r) \left( \frac{\partial^2 \phi_{22}}{\partial z^2} - 4 \alpha_c^2 \phi_{22} \right) + 2 \phi_{22} \\ + \frac{i}{2 \alpha_c R_c} \left[ \frac{\partial^4 \phi_{22}}{\partial z^4} - 8 \alpha_c^2 \frac{\partial^2 \phi_{22}}{\partial z^2} + 16 \alpha_c^4 \phi_{22} \right] \\ = -\frac{1}{2} A^2 [\psi_1' \psi_1' - \psi_1 \psi_1''], \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\frac{1}{R_c} \frac{\partial^4 \phi_{22}}{\partial z^4} = i \alpha_c A A' [\psi_1' \psi_1' - \psi_1 \psi_1'']. \quad (3.15)$$

因  $\phi_{22}$  满足如同  $\phi_{11}$  的边界条件, 使 (3.4) 的解惟一, 令

$$\phi_{22} = A^2 \psi_2(z),$$

类似地,

$$\phi_{02} = |A|^2 F(z), \quad (3.16)$$

其中

$$F'(z) = S(z) - \frac{3}{2}(1-z^2) \int_0^1 S(z) dz, \quad S = i\alpha_c R_c \int_1^r (\psi'_1 \bar{\psi}_1 - \psi_1 \bar{\psi}'_1) dz, \quad (3.17)$$

$\epsilon^{\frac{3}{2}}$  的系数为 0, 可得

$$\begin{aligned} & (1-z^2-c_r) \left( \frac{\partial^2 \phi_{13}}{\partial z^2} - \alpha_c^2 \phi_{13} \right) + 2\phi_{13} \\ & + \frac{i}{\alpha R_c} \left[ \frac{\partial^4 \phi_{13}}{\partial z^2} - 2\alpha_c^2 \frac{\partial^2 \phi_{13}}{\partial z^2} + \alpha_c^4 \phi_{13} \right] \\ & = \frac{i}{\alpha} \frac{\partial A}{\partial \tau} [\psi''_1 - \alpha_c^2 \psi_1] + \frac{iA}{\alpha_c d_{1r} R_c^2} [\chi''''_1 - 2\alpha_c^2 \chi''_1 + \alpha_c^4 \chi_1] \\ & - \frac{i}{\alpha_c} \frac{\partial A}{\partial \chi} \left[ 2\alpha_c^2 (1-z^2-c_r) \psi_1 - \left\{ 1-z^2 - \frac{4i\alpha_c}{R_c} \right\} \right. \\ & \times \left. \{ \psi''_1 - \alpha_c^2 \psi_1 \} - 2\psi_1 \right] + A |A|^2 [\psi''_2 (\bar{\psi}''_1 - \alpha_c^2 \bar{\psi}'_1) \\ & + 2\psi_2 (\bar{\psi}''_1 - \alpha_c^2 \bar{\psi}'_1) - 2\psi'_1 (\psi''_2 - 4\alpha_c^2 \psi_2) \\ & - \bar{\psi}_1 (\psi''_2 - 4\alpha_c^2 \psi'_2) - F'(\psi''_1 - \alpha_c^2 \psi_1) + F''\psi_1]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

(3.18) 的左端含有如同 (3.9) 一样的微分算子.  $\phi_{13}$  满足如同  $\phi_{11}$  的边界条件, 因此 (3.18) 的右端和满足 (3.9) 共轭方程的共轭函数  $\Phi$  正交. 因此乘 (3.18) 以  $\Phi$ ,  $z$  从  $-1$  到  $+1$  积分, 对于满足一定条件的  $\Phi$  和  $\psi_1(z)$  可得方程

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} - a_{1r} \frac{\partial A}{\partial \chi} = \frac{d_1}{d_{1r}} A + \kappa A |A|^2, \quad R > R_c, \quad (3.19)$$

其中  $d_{1r}, d_1, \kappa$  均为物理常数.

如在  $\chi = -a_{1r}t$  附近考虑, 则令

$$\xi = (x + a_{1r}t) \epsilon^{\frac{1}{2}},$$

$$\phi_1 = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \phi(\tau, \xi, z) + \varepsilon \phi_{12}(\tau, \xi, z) + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \phi_{13}(\tau, \xi, z) + O(\varepsilon^2), \quad (3.20)$$

利用变换

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \tau} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau} + b_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad (3.21)$$

代入方程,  $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$  的系数为 0, 可得类似于 (3.11) 的结果

$$\phi_{11} = A(\tau, \xi) \psi_1(z), \quad (3.22)$$

其中  $A$  为  $\tau, \xi$  的函数,  $\varepsilon$  阶系数为 0, 可得方程

$$\begin{aligned} & (1 - z^2 - c_r) \left[ \frac{\partial^2 \phi_{12}}{\partial z^2} - \alpha_c^2 \phi_{12} \right] + 2\phi_{12} \\ & + \frac{i}{aR_c} \left[ \frac{\partial^4 \phi_{12}}{\partial z^4} - 2\alpha_c^2 \frac{\partial^2 \phi_{12}}{\partial z^2} + \alpha_c^4 \phi_{12} \right] \\ & = \frac{i}{\alpha} \frac{\partial A}{\partial \xi} \left[ a_{1r} (\psi_1'' - \alpha_c^2 \psi_1) - 2\alpha_c^2 \psi_1 (1 - z^2 - c_r) \right. \\ & \quad \left. + \left\{ 1 - z^2 - \frac{4ia_c}{R_c} \right\} \{ \psi_1'' - \alpha_c^2 \psi_1 \} + 2\psi_1 \right]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

类似可得

$$\phi_{12} = -i \left( \frac{\partial A}{\partial \xi} \right) \psi_{10}(z) + A_2(\tau, \xi) \psi_1(z). \quad (3.24)$$

可得 Ginzburg-Landau 方程

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} - a_2 \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} = \frac{d_1}{d_{1r}} A + \kappa A |A|^2, R > R_c. \quad (3.25)$$

## § 4 化学反应中的湍流问题

我们先考虑 Stuart-Landau 方程.

设  $X$  和  $F$  为  $n$  维实向量,  $\mu$  为实参数,  $X_0(\mu)$  为方程

$$\frac{dX}{dt} = F(X; \mu) \quad (4.1)$$

的定态解,

$$F(X_0(\mu); \mu) = 0. \quad (4.2)$$

我们对方程(4.1)在  $X = X_0$  处作 Taylor 展开, 令  $u = X - X_0$  得

$$\frac{du}{dt} = Lu + Muu + Nuuu + \cdots, \quad (4.3)$$

其中  $L$  表 Jacobi 矩阵,  $L = (L_{ij})$ ,  $L_{ij} = \frac{\partial F_i(X_0)}{\partial X_{0j}}$ ,

$$\begin{cases} (Mu u)_i = \sum_{jk} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_i(X_0)}{\partial X_{0j} \partial X_{0k}} u_j u_k, \\ (Nu u u)_i = \sum_{jkl} \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 F_i(X_0)}{\partial X_{0j} \partial X_{0l}} u_j u_k u_l. \end{cases} \quad (4.4)$$

高阶展开类似.

设  $\mu$  在  $\mu=0$  附近变化, 当  $\mu=0$  时解  $X_0$  是稳定的. 设当  $\mu > 0$  时失稳, 考虑特征值问题:

$$Lu = \lambda u. \quad (4.5)$$

设当  $\mu < 0$  时  $\lambda$  在左半平面, 考虑二种情况: (a) 仅有一个特征值在实轴上通过原点, (b) 一对共轭特征值通过虚轴, 如图 4.1 所示.

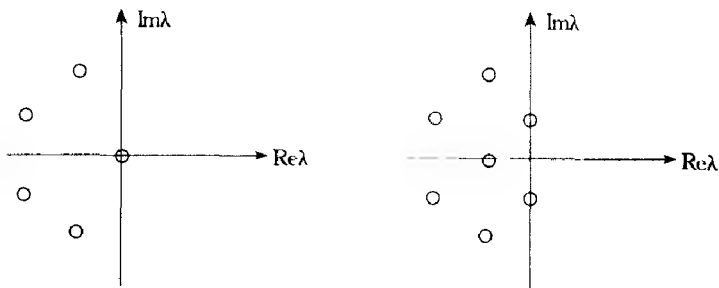


图 4.1

设

$$\frac{d}{d\mu} \operatorname{Re} \lambda(\mu) \Big|_{\mu=0} > 0. \quad (4.6)$$

靠近临界处,  $L$  和  $\lambda(\mu)$  依  $\mu$  作幂级数展开

$$L = L_0 + \mu L_1 + \mu^2 L_2 + \cdots, \quad (4.7)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \mu \lambda_1 + \mu^2 \lambda_2 + \cdots, \quad (4.8)$$

其中  $\lambda_i = \sigma_i + i\omega_i$ , 依假设

$$\sigma_0 = 0, \sigma_1 > 0. \quad (4.9)$$

设  $U$  表示对应于特征值  $\lambda_0 = (i\omega_0)$  的  $L_0$  的右特征向量.

$$L_0 U = \lambda_0 U, \quad L_0 \bar{U} = \bar{\lambda}_0 \bar{U},$$

类似,  $U^*$  表示  $L_0$  的左特征向量,

$$U^* L_0 = \lambda_0 U^*, \quad \bar{U}^* L_0 = \bar{\lambda}_0 \bar{U}^*, \quad (4.10)$$

其中  $U^* \bar{U} - \bar{U}^* U = 0$ , 且为规范的,  $U^* U = \bar{U}^* \bar{U} = 1$ ,  $\lambda_0, \lambda_1$  可表为

$$\lambda_0 = i\omega_0 = U^* L_0 U, \quad (4.11)$$

$$\lambda_1 = \sigma_1 + i\omega_1 = U^* L_1 U. \quad (4.12)$$

令  $\epsilon^2 \chi = \mu$ , 设

$$u = \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots, \quad (4.13)$$

则  $L$  变成

$$\begin{cases} L = L_0 + \epsilon^2 \chi L_1 + \epsilon^4 L_2 + \dots, \\ M = M_0 + \epsilon^2 \chi M_1 + \dots, \\ N = N_0 + \epsilon^2 \chi N_1 + \dots. \end{cases} \quad (4.14)$$

令  $\tau = \epsilon^2 t$ , 则有

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau}. \quad (4.15)$$

将(4.15)代入(4.3)得

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau} - L_0 - \epsilon^2 \chi L_1 - \dots \right) (\epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots) \\ &= \epsilon^2 M_0 u_1 u_1 + \epsilon^3 (2M_0 u_1 u_2 + N_0 u_1 u_1 u_1) + O(\epsilon^4). \end{aligned} \quad (4.16)$$

比较(4.16)中关于  $\epsilon$  的阶数得

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - L_0 \right) u_\nu = B_\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots, \quad (4.17)$$

其中

$$\begin{cases} B_1 = 0, \\ B_2 = M_0 u_1 u_2, \\ B_3 = -\left( \frac{\partial}{\partial \tau} - \chi L_1 \right) u_1 + 2M_0 u_1 u_2 + N_0 u_1 u_1 u_1. \end{cases} \quad (4.18)$$



对于线性非齐次方程(4.17),有重要性质

$$\int_0^{2\pi} U^* B_{\nu} e^{-i\omega_0 t} dt = 0. \quad (4.19)$$

事实上,

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} U^* \cdot B_{\nu} e^{-i\omega_0 t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ U^* \left( \frac{\partial}{\partial t} - L_0 \right) u_{\nu} \right] e^{-i\omega_0 t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (i\omega_0 U^* \cdot u_{\nu} - i\omega_0 U^* u_{\nu}) e^{-i\omega_0 t} dt = 0. \end{aligned}$$

方程(4.19)被称为可解条件. 可设  $B_{\nu}(t, \tau)$  对于  $\omega_0 t$  为  $2\pi$  周期的.

$$B_{\nu}(t, \tau) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} B_{\nu}^{(l)} e^{il\omega_0 t}, \quad (4.20)$$

可解条件为

$$U^* \cdot B_{\nu}^{(1)}(\tau) = 0, \quad (4.21)$$

$\nu=1$ , 有

$$u_1(t, \tau) = W(\tau) U e^{i\omega_0 t} + c.c., \quad (4.22)$$

其中  $W(\tau)$  为某个复振幅函数. 设

$$u_2 = V_+ W^2 e^{2i\omega_0 t} + V_- \bar{W}^2 e^{-2i\omega_0 t} + V_0 |W|^2 + v_0 u_1, \quad (4.23)$$

代入(4.17),  $\nu=2$ , 可得

$$\begin{cases} V_+ = \bar{V} = -(L_0 - 2i\omega_0)^{-1} M_0 U U, \\ V_0 = -2c_0^{-1} M_0 U \bar{U}, \end{cases} \quad (4.24)$$

$v_0$  为常数. 将  $u_1, u_2$  的表达式(4.22), (4.23)分别代入(4.18)第三式得

$$\begin{aligned} B_3^{(1)} = & - \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - \chi L_1 \right) W U + (\tau M_0 U V_0 + \tau M_0 \bar{U} V_+ \\ & + 3N_0 U U \bar{U}) |W|^2 W, \end{aligned} \quad (4.25)$$

可解条件

$$U^* \cdot B_v^{(1)} = 0 \quad (4.26)$$

导致 Stuart-Landau 方程

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \chi \lambda_1 W - g_1 |W|^2 W, \quad (4.27)$$

其中  $g$  为复数,

$$\begin{aligned} g &= g' + ig'' \\ &= -2U^* M_0 UV_0 - 2U^* M_0 \bar{U} V_0 - 3U^* N_0 U U \bar{U}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

由  $W = R \exp(i\theta)$  定义  $R, \theta$  满足(4.27)

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = \chi \sigma_1 R - g' R^3, \\ \frac{d\theta}{dt} = \chi \omega_1 - g'' R^2, \end{cases} \quad (4.29)$$

非平凡解

$$R = R_s, \theta = \tilde{\omega} t + \text{const},$$

$$R_s = \sqrt{\frac{\sigma_1}{|g'|}}, \tilde{\omega} = \chi(\omega_1 - g'' R_s^2).$$

相元的原来向量  $X$ , 近似为

$$X = X_0 + \epsilon u_1 = X_0 + \epsilon U R_s \exp[i(\omega_0 + \epsilon^2 \bar{\omega})t] + c.c.$$

现考虑  $u$  的反应扩散程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (L + D \nabla^2) u + M u u + N u u u + \dots, \quad (4.30)$$

引入

$$S = \epsilon r,$$

则

$$\nabla \rightarrow \epsilon \nabla_s. \quad (4.31)$$

(4.30)对  $\epsilon$  作展开式有

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau} - \epsilon^2 D \nabla_s^2 - L_0 - \epsilon^2 \chi L_1 - \dots \right) (\epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots) \\ &= \epsilon^2 M_0 u_1 u_1 + \epsilon^3 (2M_0 u_1 u_2 + N_0 u_1 u_1 u_1) + O(\epsilon^4). \end{aligned} \quad (4.32)$$

同样可得平衡方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - L_0\right)u_\nu = B_\nu, \nu = 1, 2, \dots, \quad (4.33)$$

其中

$$\begin{cases} B_1 = 0, \\ B_2 = M_0 u_1 u_1, \\ B_3 = -\left(\frac{\partial}{\partial t} - \chi L_1 - D \nabla_s^2\right)u_1 + 2M_0 u_1 u_2 + N_0 u_1 u_1 u_1. \end{cases} \quad (4.34)$$

可解条件为

$$\int_0^{2\pi/\omega_0} U^* \ddot{B}_\nu e^{-i\omega_0 t} dt = 0, \quad (4.35)$$

$$\tilde{B}_\nu(t, \tau, s) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} B_\nu^{(l)}(\tau, s) e^{i l \omega_0 t}, \quad (4.36)$$

可解条件可表为

$$U^* \ddot{B}_\nu^{(1)}(\tau, s) = 0, \quad (4.37)$$

可得中性解

$$u_1(t, \tau, s) = w(\tau, s) U e^{i \omega_0 t} + c. c. \quad (4.38)$$

$u_2$  可从  $u_1$  得到, 有

$$\begin{aligned} \tilde{B}_3^{(1)} = & -\left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \chi L_1 - D \nabla_s^2\right) w U + (2M_0 U V_0 \\ & + 2M_0 \bar{U} V_+ + 3N_0 U U \bar{U}) |w|^2 w. \end{aligned} \quad (4.39)$$

最后从可解条件(4.37),  $\nu = 3$ , 可解 Ginzburg-Landau 方程

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \chi \lambda_1 w + d \nabla_s^2 w - g |w|^2 w, \quad (4.40)$$

其中

$$d = d' + i d'' = U^* D v, \quad (4.41)$$

$\lambda, g_1$  如前.

若引入变换

$$(\tau, s, w) \rightarrow (\sigma_1^{-1} \tau, \sqrt{d'/\sigma_1} s, \sqrt{\sigma_1/|g'|} w), \quad (4.42)$$

则可得如下形式的 Ginzburg-Landau 方程

$$\frac{\partial w}{\partial t} = (1 + ic_0)w + (1 + ic_1)\nabla^2 w - (1 + ic_2)|w|^2 w, \quad (4.43)$$

其中

$$c_0 = w_1/\sigma_1, c_2 = d''/d', c_2 = g''/g'. \quad (4.44)$$

令  $w \rightarrow w \exp(ic_0 t)$ , 则可得

$$\frac{\partial w}{\partial t} = w + (1 + ic_1)\nabla^2 w - (1 + ic_2)|w|^2 w. \quad (4.45)$$

在没有扩散的情况下,  $\lambda - w$  方程组为

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(R) & w(R) \\ w(R) & \lambda(R) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \quad (4.46)$$

其中  $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ , 显然, Stuart-Landau 方程为  $\lambda - w$  方程组的特殊形式. 其中  $w = X + iY$  具扩散的  $\lambda - w$  方程组为

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(R) + D_X \nabla^2 & -w(R) \\ w(R) & \lambda(R) + D_Y \nabla^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},$$

$$D_X, D_Y > 0. \quad (4.47)$$

很重要的事实是, Ginzburg-Landau 方程不是 (4.47) 的特殊情况, 事实上 (4.45) 可写成

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(R) + \nabla^2 & -w(R) - c_1 \nabla^2 \\ w(R) + c \nabla^2 & \lambda(R) + \nabla^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \quad (4.48)$$

其中

$$\lambda(R) = 1 - R^2, w(R) = c_0 - c_2 R^2.$$

方程 (4.48) 不像通常的反应扩散方程, 因它的扩散矩阵是反对称的, 它具有某些新的特征.

## § 5 从 KS 方程过渡到 Ginzburg-Landau 方程

设有 Kuramoto-Shivashinsky 方程

$$\begin{aligned} \partial_t u &= -(1 + \partial_x^2)^2 u + \epsilon^2 u + u \partial_x u \\ &= \lambda(i \partial_x, \epsilon^2) u + \rho(i \partial_x) u^2, \end{aligned} \quad (5.1)$$

其中  $t \geq 0, x \in R, 1 \gg \epsilon^2 > 0$  为分叉参数, 平凡解  $u \equiv 0$  是不稳定的, 在  $u \equiv 0$  处线性化(5.1) 并寻求形式解  $u(x, t) = e^{\lambda t + ikx}$ ,  $\lambda(k, \epsilon^2) = -(1 - k^2)^2 + \epsilon^2$ , 显然,  $\lambda(k, \epsilon^2)$ , 当  $k \rightarrow \pm 1$  时为正的, 且有  $O(\epsilon^2)$ , 现在临界模  $e^{+ix}$  作小调制展开, 令

$$T = \epsilon^2 t, \quad X = \epsilon x, \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} u(x, t, \epsilon) &= \phi_\epsilon(x) + O(\epsilon^{3/2}) \\ &= [\epsilon A(X, T)e^{ix} + \bar{\epsilon} \bar{A}(X, T)e^{-ix}] + O(\epsilon^{3/2}). \end{aligned} \quad (5.3)$$

设

$$\begin{aligned} \phi &= (\epsilon A_1^0(\epsilon x, \epsilon^2 t)e^{ix} + \epsilon^2 A_2^0(\epsilon x, \epsilon^2 t)e^{2ix} + c.c) \\ &\quad + \epsilon^2 A_0^0(\epsilon x, \epsilon^2 t), \end{aligned}$$

代入(5.1) 可得最低阶调制方程

$$e^{ix}, \epsilon^3: \quad \partial_T A_1^0 = (1 + 4\partial_x^2)A_1^0 + i\bar{A}_1^0 A_2^0 + iA_1^0 A_0^0$$

$$e^{2ix}, \epsilon^2: \quad 0 = -9A_2^0 + i(A_1^0)^2,$$

$$\Rightarrow A_2^0 = \frac{1}{9}i(A_1^0)^2,$$

$$1, \epsilon^2: \quad A_0^0 = 0.$$

于是可得 Ginzburg-Landau 方程.

$$\begin{aligned} \partial_T A_1^0(x, T) &= (1 + 4\partial_x^2)A_1^0(x, T) \\ &\quad - \frac{1}{9}A_1^0(x, T) |A_1^0(x, T)|^2, \end{aligned} \quad (5.4)$$

对于 GL 方程(5.4) 得到的近似  $\phi_\epsilon(A)$  和原来的 KS 方程的解有如下关系.

**定理 5.1**<sup>[8]</sup> 由 GL 方程(5.4) 得到的近似  $\phi_\epsilon(A)$  是以  $O(\epsilon^{3/2})$  逼近于原来 KS 方程(5.1) 的解  $u$  的.

**定理 5.2**<sup>[8]</sup> 因 GL 方程立方项的系数具有负的实部, 则原来 KS 方程(5.1) 的所有解  $u$  (具初值  $O(\epsilon)$ ) 对一切  $t \in [0, \infty)$  存在, 且对一切  $t$  一致有界.

由此我们从另一个角度证明了 KS 方程是  $L^\infty$  小初值问题整体解的存在性, 并由此构造了 Ginzburg-Landau 近似的拟轨线直到  $t = \infty$  逼近于 KS 方程的解.

## § 6 超导中的 Ginzburg-Landau 模型

1908 年, H. Kamerlingh-Onnes 发现了在低温条件下某些材料具有超导性, 1950 年 Ginzburg 和 Landau 基于“流体”的二次相变理论, 建立了超导的宏观数学模型. 1957 年, Bardaen, Cooper 和 Schrieffer 建立了微观的数学模型. 1959 年, Gor'kov 指出了在适当的情况下, GL 宏观模型可由 BCS 微观模型导出, 1968 年, Gor'kov 和 Eliashborg 建立了发展型 GL 方程.

超导材料的 Gibbs 自由解可表为

$$\varepsilon(\psi, \mathbf{A}) = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} (|\psi|^2 - 1)^2 + \left| \left( -\frac{i}{\kappa} \nabla - \mathbf{A} \right) \psi \right|^2 + |\nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{H}|^2 \right] dx, \quad (6.1)$$

其中  $\Omega \subset R^N (N=2, 3)$  为有界开域,  $\mathbf{A}$  为实的磁势,  $\mathbf{H}$  为外磁场,  $\psi$  为(复)序参数,  $|\psi|^2$  为超导载电体密度,  $|\psi| \leq 1$ ,  $|\psi| = 1$  为理想超导,  $|\psi| = 0$  为正常导体,  $\kappa > 0$  为 GL 常数, GL 理论认为, 状态函数应使  $(\psi, \mathbf{A})$  使得  $\varepsilon$  取得极小, 即

$$G(\psi, \mathbf{A}) = \min_{\psi, \mathbf{H}} \varepsilon, \quad (6.2)$$

其中  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^1(\Omega)$  表示复值 Sobolev 空间,  $H = H^1(\Omega)$  表示实值 Sobolev 空间, 由此可得 Euler 方程

$$\begin{aligned} \left( -\frac{i}{\kappa} \nabla - \mathbf{A} \right)^2 \psi - \psi + |\psi|^2 \psi &= 0, \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} &= -\frac{i}{2\kappa} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \\ &\quad - |\psi|^2 \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{H}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

边界条件为

$$\begin{cases} \left( \frac{i}{\kappa} \nabla \psi + \psi \mathbf{A} \right) \cdot \mathbf{n} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \\ (\nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{H}) \times \mathbf{n} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (6.4)$$

其中  $\mathbf{n}$  为  $\partial\Omega$  的外法线方向的单位向量.

相对应的发展型 GL 方程为

$$\eta \frac{\partial \psi}{\partial t} + i\eta\kappa\Phi\psi + \left(-\frac{i}{\kappa}\nabla - \mathbf{A}\right)^2 \psi - \psi + |\psi|^2\psi = 0, \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + \nabla\Phi + \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = & -\frac{i}{2\kappa}(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \\ & - |\psi|^2 \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{H}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

其中  $\Phi$  为电位势,  $\eta$  为物理参数.

边界条件为

$$\left(\frac{i}{\kappa}\nabla\psi + \psi\mathbf{A}\right) \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (6.7)$$

$$(\nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{H}) \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0.$$

为了使定解问题(6.5), (6.6), (6.7) 为适定的, 需要引入各种形式的规范(Gauge).

(1) 库仑规范形

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \quad (\Omega), \quad (6.8)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\partial\Omega), \quad (6.9)$$

可得方程

$$\eta \frac{\partial \psi}{\partial t} + i\eta\kappa\Phi\psi + \left(-\frac{i}{\kappa}\nabla - \mathbf{A}\right)^2 \psi - \psi + |\psi|^2\psi = 0, \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} + \nabla\Phi \\ = -\frac{i}{2\kappa}(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - |\psi|^2 \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{H}, \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$-\Delta\Phi = \operatorname{div}\left[\frac{i}{2\kappa}(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) + |\psi|^2 \mathbf{A}\right], \quad (6.12)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (6.13)$$

边界条件为

$$\nabla\psi \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \nabla\Phi \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (6.14)$$

$$(\nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{H}) \times \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (6.15)$$

(2)  $\Phi = -\operatorname{div} \mathbf{A}$  规范形

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \Phi = 0 \quad (\Omega), \quad (6.16)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\partial\Omega). \quad (6.17)$$

方程为

$$\eta \frac{\partial \psi}{\partial t} + i\eta\kappa \operatorname{div} \mathbf{A} + \left( -\frac{i}{\kappa} \nabla - \tilde{\mathbf{A}} \right)^2 \psi - \psi + |\psi|^2 \psi = 0, \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} \\ &= -\frac{i}{2\kappa} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - |\psi|^2 \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{H}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

边界条件为

$$(\nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{H}) \times \mathbf{n} = 0, \quad (6.20)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \nabla \psi \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (6.21)$$

(3) 零电势规范形,  $\Phi = 0$

方程为

$$\eta \frac{\partial \psi}{\partial t} + \left( -\frac{i}{\kappa} \nabla - \mathbf{A} \right)^2 \psi - \psi + |\psi|^2 \psi = 0, \quad (6.22)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \\ &= -\frac{i}{2\kappa} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - |\psi|^2 \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{H}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

边界条件为

$$(\nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{H}) \times \mathbf{n} = 0, \quad \nabla \psi \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (6.24)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (6.25)$$

(4) 序参数是零虚部规范形,  $\arg \psi = 0$

方程为

$$\eta \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{\kappa^2} \Delta \psi + |\mathbf{A}|^2 \psi - \psi + \psi^3 = 0, \quad (6.26)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \Phi = \psi^2 \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{H}, \quad (6.27)$$

$$\eta\kappa^2 \Phi \psi^2 - \nabla (\mathbf{A} \psi^2) = 0. \quad (6.28)$$

此时  $\psi$  为实函数, 边界条件为

$$\nabla \psi \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (6.29)$$

$$(\nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{H}) \times \mathbf{n} = 0. \quad (6.30)$$



对于稳态、非稳态 GL 模型和偏微分方程研究,已经有很长的时间.稳态问题研究始于 1964 年,非稳态问题则在 90 年代兴起.主要研究整体的古典解、弱解的存在、惟一性以及  $t \rightarrow \infty$  解的渐近性等.同时也开展了相应的数值方法的研究,可参考第四章、第五章引用的参考文献.

对于物体除了存在理想超导和正常导体两种状态外,还存在混合状态( $|\psi| \leq 1$ )的 II 型超导.一个有兴趣的问题是,在外磁场作用下,超导材料将逐渐转化为通常导体,人们发现两相(超导和正常导体)同时存在,而通常导体状态被限制在一些半径很小的“涡旋”之内.在它们以外是超导状态,而这些“涡旋”的个数将与外磁场的强度有关.

作为模型问题,考虑

$$\min_{u \in H'_\kappa} E_\epsilon(u) = \min_{u \in H'_\kappa} \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\epsilon^2} \int_{\Omega} (|u|^2 - 1)^2, \right. \quad (6.31)$$

其中

$$H'_\kappa = \{u \in H^1(\Omega), u = g(\partial\Omega), |g| = 1\}.$$

其 Euler 方程

$$\begin{cases} -\Delta u_\epsilon = \frac{1}{\epsilon^2} u_\epsilon (1 - |u_\epsilon|^2), & (6.32) \\ u_\epsilon|_{\partial\Omega} = g. & (6.33) \end{cases}$$

提出如下问题:

当  $\epsilon \rightarrow 0$  时,  $u_\epsilon$  的极限是什么?

令  $d = \deg(g, \partial\Omega)$ ,  $(g: \partial\Omega \rightarrow S^1)$ .

**定理 6.1** (F. Bethuel, H. Brezis, F. Helein) 当  $d = 0$  时,  $u_\epsilon \rightarrow u_0$ , 在  $c^1(\bar{\Omega})$  ( $c^k_{loc}(\bar{\Omega}), \forall k$ ). 其中  $u_0$  是下列问题的解:

$$\begin{cases} -\Delta u_0 = u_0 |\nabla u_0|^2, & (6.34) \\ |u_0| = 1, & (6.35) \\ u_0|_{\partial\Omega} = g. & (6.36) \end{cases}$$

当  $d > 0$  时,  $\int_{\Omega} |\nabla u_{\epsilon}|^2 \rightarrow +\infty, \epsilon \rightarrow 0$ .

**定理 6.2**(同上)  $\exists \epsilon_n \rightarrow 0$ , 以及  $\{a_1, \dots, a_d\} \subset \Omega$  和调和映射  $u_0$ , 使得 (1)  $u_0: \Omega \setminus \{a_1, \dots, a_d\} \rightarrow S^1, u_0|_{\partial\Omega} = g$ , (2)  $u_{\epsilon_n} \xrightarrow{\text{一致}} u_0$  在  $\Omega \setminus \{a_1, \dots, a_d\}$  的任一紧子集  $I$  上. (3) 每一个  $a_i (i = 1, \dots, d)$  的 degree 为  $+1$ .

类似调和映照热流的研究, 林芳华等研究以下问题:

$$\frac{\partial u_{\epsilon}}{\partial t} - \Delta u_{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon^2} u_{\epsilon} (1 - |u_{\epsilon}|^2), \quad (6.37)$$

$$u_{\epsilon}|_{\partial\Omega} = g, \quad (6.38)$$

$$u_{\epsilon}|_{t=0} = u_0. \quad (6.39)$$

当  $\epsilon \rightarrow 0$  时,  $u_{\epsilon}$  的极限等, 可见第五章参考文献[6].

## 参 考 文 献

- [1] A. C. Nowell, J. A. Whitehead, Finite bandwidth, finite amplitude convection, J. Fluid Mech., 38, part 2, 1969, 279—303.
- [2] S. Kogelman, R. C. Diprima, Phys. Fluids, 13, 1970, 1.
- [3] R. Stewartson and J. T. Stuart, J. Fluid Mech., 48, 1971, 529.
- [4] Y. Kuramoto, Prog. Theor. Phys., 56, 1976, 679.
- [5] H. Haken, Synergetics, an introduction. Springer-Verlag, Berlin, 1978.
- [6] K. Katon, Nagoya University Report, No. DPNU-83-08, 1983.
- [7] N. Bekhi, J. Phys. Soc., Jpn., 50, 1981, 656.
- [8] G. Schneider, Global existence via Ginzburg Landau formalism and pseudo-orbits of Ginzburg-Landau approximations. Comm. Math. Phys., 164, 1994, 157—179.

## 第二章 一维 Ginzburg-Landau 方程的整体解及其渐近性态

### §1 广义 Ginzburg-Landau 方程的整体解及其整体吸引子

考虑广义 GL 方程

$$\begin{aligned} \partial_t u + v u_x = & \chi u + (\gamma_r + i\gamma_i) u_{xx} - (\beta_r + i\beta_i) |u|^2 u \\ & - (\delta_r + i\delta_i) |u|^{-4} u - (\lambda_r + i\lambda_i) (|u|^2) u_x \\ & - (\mu_r + i\mu_i) u^2 \bar{u}_x, \end{aligned} \quad (1.1)$$

其中  $\gamma_r, \delta_r, \chi$  为正常数,  $v, \gamma, \beta_r, \beta_i, \delta, \lambda_r, \lambda_i, \mu_r, \mu_i$  均为实数. 考虑(1.1)的周期初值问题

$$u(x, t) = u(x + L, t), x \in R^1, t \geq 0, \quad (1.2)$$

其中  $L > 0$  为周期, 初始条件为

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in R^1. \quad (1.3)$$

我们先证明(4.1)–(4.3)整体解的存在性、惟一性.

引入符号  $H = L^2_{\text{per}}[0, L] = \{u \in L^2[0, L], u(x + L) = u(x)\}$ ,  $V = H^1_{\text{per}}[0, L] = \{u : u \in H, u_x \in H\}$ , 用  $(\cdot, \cdot) = \int_0^L u \bar{v} dx$  和  $\|\cdot\| = \sqrt{(\bar{u}, u)}$  分别表示依  $H$  的内积和模,  $\|u\|_V^2 = \|u\|^2 + \|u_x\|^2$  表示  $V$  的模.

**引理 1.1**  $u_0(x) \in V$ , 则问题(4.1)–(4.3)存在惟一局部解

$$u(t) \in C([0, \tau); V) \cap C^1((0, \tau); V), \quad (1.4)$$

对某  $\tau > 0$ , 依赖于  $u_0$ .

**证** 由标准的方法, 如 A. Henry 和 A. Pazy 可证.

为使局部解延拓为整体解,须对(1.1)一(1.3)的解进行先验估计.

**引理 1.2** 设  $\gamma_r > 0, \delta_r > 0, \chi > 0$  且

$$4\gamma_r\delta_r > (\lambda_i - \mu_i)^2, \quad (*)$$

则有估计

$$\|u(t)\| \leq e^{-2\chi t} \|u_0\|^2 + \frac{p^2 I_2}{2\chi} (1 - e^{-2\chi t}), t \geq 0, (1.5)$$

其中  $p = \frac{\chi + (\beta_r + 1)^2}{4\beta}$ ,  $\beta$  在证明中给出.

**证** (1.1) 和  $u$  作  $L^2$  内积再取实部可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 &= -v \operatorname{Re} \int_0^L u_x \bar{u} dx - \beta_r \int_0^L |u|^4 dx \\ &\quad - \delta_r \int_0^L |u|^6 dx + \chi \|u\|^2 - \gamma_r \|u_x\|^2 \\ &\quad - (\lambda_r + \mu_r) \operatorname{Re} \int_0^L |u|^2 u_x \bar{u} dx \\ &\quad - (\lambda_i - \mu_i) \operatorname{Im} \int_0^L |u|^2 \bar{u}_x u dx. \end{aligned} \quad (1.6)$$

由于  $\operatorname{Re} \int_0^L u_x \bar{u} dx = 0, \operatorname{Re} \int_0^L |u|^2 u_x \bar{u} dx = 0,$

$$\begin{aligned} &(\lambda_i - \mu_i) \operatorname{Im} \int_0^L |u|^2 u_x \bar{u} dx \\ &\leq |\lambda_i - \mu_i| \int_0^L |u|^3 |u_x| dx \\ &= a_1 b_1 \left( \int_0^L |u|^6 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|u_x\| \\ &\leq \frac{a_1^2}{2} \int_0^L |u|^6 dx + \frac{b_1^2}{2} \int_0^L |u_x|^2 dx, \end{aligned}$$

其中  $a_1 b_1 = |\lambda_i - \mu_i|$ . 由假设能选取  $a_1, b_1$  使得

$$\alpha = 2\gamma_r - b_1^2 = 0, \beta = 2\delta_r - a_1^2 > 0,$$

则有

$$\frac{d}{dt} \|u\|^2 \leq 2\chi \|u\|^2 - \alpha \|u_x\|^2$$

$$+ 2\beta_r \int_0^L |u|^4 dx + \beta \int_0^L |u|^6 dx, \quad (1.7)$$

因为

$$\begin{aligned} & -\beta \|u\|^6 + 2\beta_r \|u\|^4 + 2\chi \|u\|^2 \\ &= -\beta \left( \|u\|^3 - \frac{(\beta_r + 1)}{\beta} \|u\| \right)^2 - 2 \|u\|^4 \\ &+ \left( \frac{(\beta_r + 1)^2}{\beta} + 4\chi \right) \|u\|^2 - 2\chi \|u\|^2 \leq -(\|u\|^2 - p)^2 \\ &+ p^2 - 2\chi \|u\|^2 \leq p^2 - 2\chi \|u\|^2, \end{aligned}$$

其中  $p = \frac{\chi + (\beta_r + 1)^2}{4\beta}$ , 则由(1.7), 得

$$\frac{d}{dt} \|u\|^2 + 2\chi \|u\|^2 + \alpha \|u_r\|^2 \leq p^2 L. \quad (1.8)$$

因而

$$\|u\|^2 \leq e^{-2\chi t} \|u_0\|^2 + \frac{p^2 L}{2\chi} (1 - e^{-2\chi t}).$$

**引理 1.3** 在引理 1.1, 引理 1.2 的假设下, 有

$$\alpha \int_s^t \|u_x(\cdot, \tau)\|^2 d\tau \leq \|u(s)\|^2 + p^2 L(t-s), \quad (1.9)$$

$$\alpha \int_0^t \|u_x(\cdot, \tau)\|^2 d\tau \leq \|u(0)\|^2 + p^2 L t, \quad (1.10)$$

其中  $0 \leq s \leq t$ .

**证** 积分(1.8) 依  $(s, t), (0, t)$ , 即得(1.9), (1.10).

**引理 1.4** 在引理 1.1, 1.2 假设下, 我们有

$$\frac{d}{dt} \|u_x\|^2 + \gamma_r \|u_{xx}\|^2 \leq K_1 (1 + \|u_x\|^2)^2, \quad (1.11)$$

其中  $K_1$  依赖于方程(1.1) 的系数,  $\beta, \gamma, L$  和  $\|u_0\|$  无关.

**证** (1.1) 和  $u_{x,x}$  作内积取实部, 得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_x\|^2 + \gamma_r \|u_{xx}\|^2 &= \chi \|u\|^2 - 2\beta_r \int_0^L |u|^2 |u_x|^2 dx \\ &- \operatorname{Re} \left( (\beta_r + i\beta_i) \int_0^L u^2 \bar{u}_x^2 dx \right) - 3\delta_r \int_0^L |u|^4 |u_x|^2 dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2\operatorname{Re}\left((\delta_r + i\delta_i)\int_0^L \bar{u}_r^2 |u|^2 u^2 dx\right) - \operatorname{Re}\left((\mu_r + i\mu_i)\right. \\
& \times \int_0^L |u_x|^2 uu_x dx\Big) + \operatorname{Re}\left((\lambda_r + i\lambda_i)\int_0^L |u|^2 u_x \bar{u}_{xx} dx\right) \\
& \leq \chi(|u_x|^2 + (\sqrt{\beta_r^2 + \beta_i^2} - 2\beta_r) \cdot \int_0^L |u|^2 |u_x|^2 dx \\
& + (2\sqrt{\delta_r^2 + \delta_i^2} - 3\delta_r) \int_0^L |u|^4 |u_x|^2 dx \\
& + (\sqrt{\mu_r^2 + \mu_i^2} + \lambda_r) \int_0^L |u_x|^3 |u| dx \\
& + |\lambda_i| \int_0^L |u|^2 |u_x| |u_{xx}| dx. \tag{1.12}
\end{aligned}$$

首先

$$\int_0^L |u|^2 |u_x|^2 dx \leq \|u\|_{L^\infty}^2 \|u_x\|^2,$$

由 Agmon 不等式

$$\|u\|_{L^\infty}^4 \leq c_1(\|u\|^2 + \|u_x\|^2) \|u\|^2,$$

我们有

$$\begin{aligned}
\int_0^L |u|^2 |u_x|^2 dx & \leq c_1^2(\|u\|^2 + \|u\| \|u_x\|) \|u_x\|^2 \\
& \leq c_2(\|u_x\|^2 + \|u_x\|^3) \leq 2c_2(\|u_x\|^2 + \|u_x\|^4), \tag{1.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^L |u|^4 |u_x|^2 dx & \leq \|u\|_{L^\infty}^2 \int_0^L |u|^2 |u_x|^2 dx \text{ (由} \\
(1.13)) &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \leq c_1^2(\|u\|^2 + \|u\| \|u_x\|) c_2(\|u_x\|^2 + \|u_x\|^3) \\
& \leq c_3(\|u_x\|^2 + \|u_x\|^4), \tag{1.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^L |u|^2 |u_x| |u_{xx}| dx \\
& \leq \epsilon_1 \|u_{xx}\|^2 + \frac{1}{4\epsilon_1} \int_0^L |u|^4 |u_x|^2 dx \quad \text{(由(1.14))} \\
& \leq \epsilon_1 \|u_{xx}\|^2 + \frac{c_3}{4\epsilon_1} (\|u_x\|^2 + \|u_x\|^4), \tag{1.15}
\end{aligned}$$

$$\int_0^L |u| |u_x|^3 dx \leq \left( \int_0^L |u|^2 |u_x|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^L |u_x|^4 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

由 Nirenberg 不等式及  $\int_0^L u_x dx = 0$ , 可得

$$\int_0^L |u_x|^4 dx \leq c \|u_{xx}\| \|u_x\|^3.$$

$$\text{因此 } \int_0^L |u| |u_x|^3 dx \leq c_4^2 \int_0^L |u|^2 |u_x|^2 dx + \frac{1}{4} \|u_x\|^3 \|u_{xx}\|,$$

由 (1.13) 和 Young 不等式得

$$\int_0^L |u| |u_x|^3 dx \leq c_5 (\|u_x\|^2 + \|u_x\|^4) + \epsilon_2 \|u_{xx}\|^2. \quad (1.16)$$

将 (1.13) — (1.16) 代入 (1.12), 取  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{\gamma_r}{4}$ , 即得引理结论.

**引理 1.5** 在引理 1.1, 引理 1.2 假设下, 我们有

$$\|u(t)\|_V \leq K_2, \quad (1.17)$$

其中  $K_2$  依赖于  $K_1$  和  $\|u_0\|_V$ .

**证** 由引理 1.1、引理 1.4, 有

$$\frac{d}{dt} (1 + \|u_x\|^2) \leq K_1 (1 + \|u_x\|^2)^2, \quad (1.18)$$

令  $y = 1 + \|u_x\|^2$ , 当  $\tau < (K_1 C_1 + \|u_{0x}\|^2)^{-1}$  时, 则从 (1.18) 得

$$1 + \|u_x\|^2 \leq \left( \frac{1}{1 + \|u_{0x}\|^2} - k_1 t \right)^{-1} t < \tau,$$

取  $t \leq (2K_1(1 + \|u_{0x}\|^2))^{-1} = \bar{\tau}$ , 可得

$$\|u_x\|^2 \leq 1 + 2\|u_{0x}\|^2, t \leq \bar{\tau}.$$

当  $t > \bar{\tau}$ , 使得  $t - \bar{\tau} \leq s \leq t$ , 令

$$z(t) = y(t) \exp \left( - \int_s^t K_1 y(\tau) d\tau \right),$$

则

$$z_t(t) \leq 0 \quad (\text{由(1.18)}).$$

因此

$$\begin{aligned} z(t) &\leq z(s) = y(s) - 1 + \|u_{0,x}\|^2, \\ y(t) &\leq z(t) \exp\left(K_1 \int_s^t y(\tau) d\tau\right) \\ &\leq (1 + \|u_x\|^2) \exp\left(K_1 \int_s^t y(\tau) d\tau\right), \end{aligned}$$

由(1.9)得

$$\begin{aligned} \exp\left(K_1 \int_s^t y(\tau) d\tau\right) &\leq \exp\left(\frac{1}{\alpha} K_1 (c \|u(s)\|^2 + p^2 L \bar{t}) + K_1 \bar{t}\right) \\ &\leq \exp(K_1 c_6). \end{aligned}$$

因此

$$y(s) \leq (1 + \|u_x(s)\|^2) \exp(K_1 c_6). \quad (1.19)$$

积分(4.19),  $s \in [t - \bar{t}, t]$ , 得

$$\begin{aligned} \bar{t} y(t) &\leq c_6 \exp(K_1 c_6), \\ y(t) &\leq \frac{c_6 \exp(K_1 c_6)}{\bar{t}}. \end{aligned}$$

即得引理的结论.

**定理 1.6** 对任何  $v_0 \in V$ , 并设引理 1.1、引理 1.2 的条件满足, 则存在问题(1.1)–(1.3) 的惟一整体解  $u(t) \in C([0, \infty); V) \cap C^1((0, \infty); V)$ .

**证** 由引理 1.1、引理 1.5, 我们能延拓  $\tau = +\infty$ .

现在来证明整体吸引子的存在性.

首先建立在  $V$  中吸收集的存在性.

由(1.18) 我们有  $\frac{dy}{dt} \leq K_1 y^2 = K_1 y \cdot y$ .

由(1.19) 用积分区间  $(t, t+1)$  代替  $(s, t)$ , 则有

$$\int_t^{t+1} (1 + \|u_x\|^2) d\tau \leq 1 + \frac{1}{\alpha} (\|u(t)\|^2 + P^2 L),$$

令  $\|u_0\| \leq R, \rho^2 = \frac{P^2 L}{2\chi}$ , 当  $t \geq \frac{1}{\chi} \log \frac{R}{\rho} = T$  时, 由(1.5) 有  $\|u(t)\|^2 \leq 2\rho^2$ .



现  $K_1$  与  $u_0$  无关, 且  $K_1 \int_T^{T+1} y(\tau) d\tau \leq K_1 + K_1(2\rho^2 + P^2L)$   
 $= \rho_1$ , 由一致 Gronwall 不等式得

$$y(t+1) \leq \rho_1 \exp(\rho_1), t \geq T.$$

于是, 对  $t \geq T+1$ , 有  $\|u_x\|^2 \leq \rho_1 \exp(\rho_1) - 1 = \rho_2^2$ .

我们有

**引理 1.7** 设  $u$  为问题(1.1)–(1.3)的解, 且  $\|u_0\| \leq R$ ,

则存在  $T = \frac{1}{\chi} \log \frac{R}{\rho}$ ,  $\rho^2 = \frac{P^2L}{2\chi}$ , 当  $t \geq T+1$  时有

$$\|u\|_V^2 \leq 2\rho + P_2^2.$$

因方程(1.1)是自治的, 则  $S(t): u_0 \rightarrow S(t)u_0$  形成一个半群, 我们证明当  $t > 0$  时,  $S(t)$  是紧的, 为此, 我们讨论解的正则性.

由定理 1.6 和引理 1.4、引理 1.5 可知

$$u \in C((0, \infty); H_{\text{per}}^2(0, L)) \cap L^2([0, \infty), H_{\text{per}}^\infty(0, L)),$$

反复利用正则性结果和穿靴法, 可得

$$u \in C^1((0, \infty); C_{\text{per}}^\infty[0, c]).$$

作方程(1.1)和  $u_{xxx}$  的内积, 利用 Gagliardo-Nirenberg 不等式, Sobolev 嵌入定理以及某些基本不等式可得  $\frac{d}{dt} \|u_{xx}\|^2 + \gamma_r \|u_{xx}\|^2 \leq C_7 + C_8 \|u_{xx}\|^2$ , 因此  $\frac{d}{dt} (t \|u_{xx}\|^2) + \gamma_r (t \|u_{xxx}\|^2) \leq C_7 + C_8 (t \|u_{xx}\|^2) + \|u_{xx}\|^2$ , 由引理 1.4, 有

$$\int_0^1 \|u_{xx}\|^2 dt \leq C(R)t.$$

再由 Gronwall 引理可得

$$t \|u_{xx}\|^2 \leq C(R, t), t > 0.$$

因此, 我们得到当  $t > 0$  时,  $S(t)$  在  $V$  中是紧的, 利用[2]的结果可得

**定理 1.8** 设  $u(t)$  为问题(1.1)–(1.3)的解  $u(t) = S(t)u_0$ , 令

$$B = \{u \in V, \|u\|_V^2 \leq 2\rho^2 + \rho_2^2\},$$

则  $B$  的  $\omega$  极限集  $A = \omega(B)$  为  $S(t)$  在  $V$  中紧的整体吸引子.

现估计整体吸引子的维数, (1.1) 在  $u(t) = S(t)u_0$  的线性化方程为

$$\begin{aligned} \partial_t w + w w_x &= \chi w + (\gamma_r + i\gamma_i) w_{xx} - (\beta_r + i\beta_i)(2|u|^2 w + u^2 \bar{w}) \\ &\quad - (\delta_r + i\delta_i)(3|u|^4 w + 2|u|^2 u^2 \bar{w}) \\ &\quad - (\lambda_r + i\lambda_i)(|u|^2 w_x + w \bar{u} u_x + w u u_x) \\ &\quad - (\mu_r + i\mu_i)(u^2 \bar{w}_x + 2u u_x \bar{w}), \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$w(x, t) = w(x + L, t), \quad x \in R^1, t \geq 0, \quad (1.21)$$

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad x \in R^1. \quad (1.22)$$

**引理 1.9** 如  $w_0(x) \in V$ , 则问题(1.20)–(1.22) 存在惟一的解  $w(x, t) \in C([0, \infty); V) \cap C^1((0, \infty); V) \cap L^2([0, \infty), H_{\text{per}}^2(0, L])$ .

令  $w(x, t) = DS(t)u_0$ , 设  $R, T$  为两个正常数, 使得对任何  $u_0, v_0, t$  满足

$$\|u_0\|_V, \|v_0\|_V \leq R, t \leq T,$$

则有

$$\|S(t)(u_0 + v_0) - S(t)u_0 - DS(t)u_0\|_V \leq C \|v_0\|_V^2. \quad (1.23)$$

**证** 类似于问题(1.1)–(1.3) 存在、惟一性的证明. 我们能得到问题(1.20)–(1.22) 的存在惟一性. 即(1.23) 意味着半群算子  $S(t)$  在  $V$  中是 Frechet 可微. 令  $u_1 = S(t)u_0, u_2 = S(t)(u_0 + v_0)$ , 则  $u_1, u_2$  为方程(1.1) 的解分别具有初值  $u_0$  和  $u_0 + v_0$ , 令  $w = DS(t)v_0$ , 则  $w$  为(1.20) 具初值  $v_0$  的解, 由于  $\|u_0\|_R, \|v_0\|_V \leq R$ , 依上面的证明方法可知

$$\|u_1\|_V, \|u_2\|_V, \|w\|_V \leq C(R),$$

由 Sobolev 嵌入定理,

$$\|u_1\|_{L^\infty}, \|u_2\|_{L^\infty} \leq C_1(R). \quad (1.24)$$

由(1.24), 易得(1.23)的证明.

再记(1.20)为

$$w_t = F(u)w, \quad (1.25)$$

其中  $F(u)w$  表示(1.20)右端减去  $uw_t$ .

对任何  $m \in \mathbb{N}$ , 令  $w_0 = w_{01}, \dots, w_{0m}$  为  $V$  中元素, 问题(1.21)—(1.22)的解对应于  $w_1, \dots, w_m, u = u(\tau) = S(\tau)u_0$  为问题(1.1)—(1.3)的解, 依[2]有

$$\|w_1(t) \wedge \dots \wedge w_m(t)\|_{\wedge^m V} \leq \|w_{01} \wedge w_{02} \wedge \dots \wedge w_{0m}\|_{\wedge^m V} \cdot \exp\left(\int_0^t \operatorname{ReTr} F(u(\tau)) \cdot Q_m(\tau) d\tau\right), \quad (1.26)$$

其中  $Q_m(\tau)$  表示  $V$  在  $w_1(\tau), \dots, w_m(\tau)$  所张成子空间的正交投影,  $\operatorname{Tr}$  表示该算子的迹, 令  $\varphi_j(\tau), j \in \mathbb{N}$ , 表示对应于下列问题特征值  $\lambda_j$  的特征函数:

$$-u_{xx} = \lambda_1 u, u(x+L) = u(x),$$

则  $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$  为在  $H$  和  $V$  中的标准正交基, 现来估计  $\operatorname{ReTr} F(u(\tau)) \cdot Q_m(\tau)$ , 以下计算省略  $\tau$ .

$$\begin{aligned} & \operatorname{ReTr} F(u) \cdot Q_m \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{Re}(F(u) \cdot Q_m \varphi_j, \varphi_j)_V \\ &= \sum_{j=1}^m \operatorname{Re}(F(u) \varphi_j, \varphi_j)_V \\ &= \sum_{j=1}^m (\operatorname{Re}(F(u) \varphi_j, \varphi_j) + \operatorname{Re}((F(u) \varphi)_x, \varphi_{jx})) \\ &= \chi \|\varphi_3\|^2 - \gamma_r \|\varphi_{jx}\|^2 - \operatorname{Re}((\beta_r + i\beta_i)(2|u|^2 \varphi_j + u^2 \bar{\varphi}_j, \varphi_j)) \\ &\quad - \operatorname{Re}((s_r + is_i)(3|u|^4 \varphi_j + 2|u|^2 u^2 \bar{\varphi}_j, \varphi_j)) \\ &\quad - \operatorname{Re}((\lambda_r + i\lambda_i)(|u|^2 \cdot \varphi_{3x} + \varphi_3 u_x \bar{u} + \bar{\varphi}_j u u_x, \varphi_3)) \\ &\quad - \operatorname{Re}((\mu_r + i\mu_i)(u^2 \bar{\varphi}_{jx} + 2u \bar{u}_x \varphi_j, \varphi_j)) \\ &\leq \chi \|\varphi_j\|^2 - \gamma_r \|\varphi_{jx}\|^2 - (2\beta_r - \sqrt{\beta_r^2 + \beta_i^2}) \int_0^L |u|^2 |\varphi_j|^2 dx \\ &\quad + (2\sqrt{\delta_r^2 + \delta_i^2} - 3\delta_r) \int_0^L |u|^4 |\varphi_j|^2 dx + (\sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2} \end{aligned}$$

$$+ \sqrt{\mu_r^2 + \mu_i^2}) \cdot \int_0^L (|u|^2 |\varphi_{jx}| + |\varphi| + 2 |\varphi_j|^2 |u| + |u_x|) dx. \quad (1.27)$$

由于

$$\int_0^L |u|^2 |\varphi_j|^2 dx \leq \|u\|_{L^\infty}^2 \|\varphi_j\|^2 \leq C_9 \|u\|_V^2 \|\varphi_j\|^2, \quad (1.28)$$

$$\int_0^L |\varphi_j|^2 |u|^4 dx \leq \|u\|_{L^\infty}^4 \|\varphi_j\|^2 \leq C_{10} \|u\|^4 \|\varphi_j\|^2, \quad (1.29)$$

$$\begin{aligned} \int_0^L |u|^2 |\varphi_{jx}| + |\varphi_j| dx &\leq \|u\|_{L^\infty}^2 \int_0^L |\varphi_{jx}| + |\varphi_j| dx \\ &\leq \|u\|^2 (\epsilon_3 \|\varphi_{jx}\|^2 + \frac{1}{4\epsilon_3} \|\varphi_j\|^2), \end{aligned} \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} \int_0^L |\varphi|^2 |u| + |u_x| dx &\leq \|u\|_{L^\infty}^2 \int_0^L |\varphi|^2 + |u_x| dx \\ &\leq C_{11} \|u\|_V^2 \left( \int_0^L |\varphi|^4 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

再由 Gagliardo - Nirenberg 不等式

$$\begin{aligned} \int_0^L |\varphi_j|^4 dx &\leq C_{12} (\|\varphi_{jx}\| + \|\varphi_j\|) \|\varphi_j\|^3 \\ &\leq C_{13} \|\varphi_j\|^4 + \epsilon_4 \|\varphi_{jx}\|^4, \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \int_0^L |\varphi_j|^2 |u| + |u_x| dx &\leq C_{11} \|u\|_V^2 (C_{13} \|\varphi_j\|^2 + \epsilon_4 \|\varphi_{jx}\|^2). \end{aligned} \quad (1.31)$$

适当选取  $\epsilon_3, \epsilon_4$ , 将(1.28)–(1.31) 代入(1.2), 得

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(F(u)\varphi_j, \varphi_j) &\leq -\frac{\gamma_r}{2} \|\varphi_{jx}\|^2 \\ &\quad + K_3 (\|u\|_V^2 + \|u\|_V^4) \|\varphi_j\|^2, \end{aligned}$$

其中  $K_3$  为正常数, 仅依赖于  $L$  和(1.1) 的系数.

现再估计

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}((F(u)\varphi_j)_x, \varphi_{jx}) &\leq \chi \|\varphi_{jx}\|^2 + \gamma \|\varphi_{jxx}\|^2 + (2\beta_r \\
&+ \sqrt{\beta_r^2 + \beta_i^2}) \int_0^L (|u| |u_x| |\varphi_j| |\varphi_{jx}| + |u|^2 |\varphi_{jx}|^2) dx \\
&+ \sqrt{\delta_r^2 + \delta_i^2} \int_0^L (16 |u|^3 |u_x| |\varphi_j| |\varphi_{jx}| + |u|^4 |\varphi_j|^2) dx \\
&+ (\sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2} + \sqrt{\mu_r^2 + \mu_i^2}) \int_0^L (4 |u| |u_x| |\varphi_{jx}|^2 + |u|^2 |\varphi_{jxx}| \\
&\cdot |\varphi_{jx}| + 2 |\varphi_j| |u_x|^2 |\varphi_{jx}| + 2 |\varphi_j| |\varphi_{jx}| |u| |u_{xx}|) dx,
\end{aligned} \tag{1.32}$$

$$\int_0^L |u|^2 |\varphi_{jx}|^2 dx \leq C_9 \|u\|_V^2 \cdot \|\varphi_{jx}\|^2, \tag{1.33}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^L |u| |u_x| |u_{jx}| |\varphi_j| dx &\leq \|u\|_{L^\infty} \int_0^L |u_x| |\varphi_{jx}| dx \\
&\cdot \|\varphi_j\|_{L^\infty} \leq C_{14} \|u\|_V^2 \|\varphi_j\|_{L^\infty} \|\varphi_{jx}\|,
\end{aligned}$$

再由 Agmon 不等式  $\|\varphi_j\|_{L^\infty}^2 \leq C(\|\varphi_j\|^2 + \|\varphi_{jx}\| \|\varphi_j\|)$ , 于是

$$\int_0^L |u| |u_x| |\varphi_j| |\varphi_{jx}| dx \leq C_{14} (\|u\|_V^2 \|\varphi_{jx}\| + \|\varphi_j\|), \tag{1.34}$$

$$\int_0^L |u|^4 |\varphi_{jx}|^2 dx \leq C_{10} \|u\|_V^4 \|\varphi_{jx}\|^2, \tag{1.35}$$

$$\int_0^L |u|^3 |u_x| |\varphi_j| |\varphi_{jx}| dx \leq C_{15} \|u\|_V^4 \|\varphi_j\|_{L^\infty} \|\varphi_{jx}\|.$$

从以上讨论可得

$$\int_0^L |u|^3 |u_x| |\varphi_j| |\varphi_{jx}| dx \leq C_{16} \|u\|^4 (\|\varphi_j\|^2 + \|\varphi_{jx}\|^2), \tag{1.36}$$

$$\int_0^L |u| |u_x| |\varphi_j|^2 dx \leq C_7 (\|u\|_V^2 + \|u_{xx}\|^2) \|\varphi_{jx}\|^2, \tag{1.37}$$

$$\int_0^L |u|^2 |\varphi_{jxx}| |\varphi_{jx}| dx \leq C_9 \|u\|_V^2 (\varepsilon_5 \|\varphi_{jxx}\|^2$$

$$+ \frac{1}{4\epsilon_5} \|\varphi_{jx}\|^2), \quad (1.38)$$

$$\int_0^L |u_x|^2 |\varphi_j| |\varphi_{jx}| dx \leq C_{18} \|u_{xx}\|^2 (\|\varphi_j\|^2 + \|\varphi_{jx}\|^2), \quad (1.39)$$

$$\begin{aligned} \int_0^L |u| |u_{xx}| |\varphi_j| |\varphi_{jx}| dx &\leq C_{19} \|u\|_V \cdot \|u_{xx}\| \\ &\times C \left( \int_0^L |\varphi_j|^2 |\varphi_{jx}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \int_0^L |u| |u_{xx}| |\varphi_j| |\varphi_{jx}| dx &\leq C_{20} (\|u\|_V^2 + \|u_{xx}\|^2) \\ &\times (\|\varphi_j\|^2 + \|\varphi_{jx}\|^2). \end{aligned} \quad (1.40)$$

选取  $\epsilon$ , 将 (1.33) — (1.40) 代入 (1.32), 得

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}((F(u)\varphi_3)_x, \varphi_{jx}) &\leq -\frac{\gamma_1}{2} \|\varphi_{jx}\|^2 + K_4 (\|u\|^2 \\ &+ \|u\|^4 + \|u_{xx}\|^2) (\|\varphi_j\|^2 + \|\varphi_{jx}\|^2), \end{aligned}$$

其中常数  $K_4$  依赖于参数的关系如同  $K_3$ , 于是

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \operatorname{Re}(F(u)\varphi_j, \varphi_j)_V &\leq -\frac{\gamma_r}{2} \sum_{j=1}^m \|\varphi_{jxx}\|^2 + K_3 (\|u\|_V^2 \\ &+ \|u\|_V^4) \sum_{j=1}^m \|\varphi_j\|^2 + K_4 (\|u\|_V^2 + \|u\|_V^4 + \|u_{xx}\|^2) \\ &\cdot \left( \sum_{j=1}^m (\|\varphi_j\|^2 + \|\varphi_{jx}\|^2) \right), \end{aligned}$$

因  $\varphi_j(x) = \frac{1}{L} \exp\left(\frac{2ijx}{L}\right)$ , 对  $t \geq T+1$ , 有

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \operatorname{Re}(F(u)\varphi_j, \varphi_j)_V &\leq -\frac{\gamma_r}{2} \sum_{j=1}^m \|\varphi_{jxx}\|^2 + K_3 (\rho_3 + \rho_3^2) m \\ &+ K_4 (\rho_3 + \rho_3^2 + \|u_{xx}\|^2) (m + C(L)m^3), \end{aligned}$$

其中  $\rho_3 = 2\rho^2 + \rho_2^2$ , 于此我们用到了公式

$$1^2 + 2^2 + \cdots + m^2 = \frac{1}{6} m(m+1)(2m+1).$$

令  $\rho_0 = \sum_{j=1}^m |\varphi_j|^2$ , 由 Sobolev-Lieb-Thirring 不等式

$$\int_0^L \rho_0^5 dx \leq K_5 \sum_{j=1}^m \|\varphi_{j,x}\|^2,$$

其中  $K_5$  绝对常数, 仅依赖于  $L$ .

$$\sum_{j=1}^m \|\varphi_{j,x}\|^2 \geq K_5^{-1} \int_0^L \rho_0^5 dx \geq K_5^{-1} L^{-4} \left( \int_0^L \rho_0 dx \right)^5 = K_5^{-1} L m^5,$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \operatorname{Re}(F(u) \varphi_j, \varphi_j)_V &\leq -\frac{\gamma_r}{2} L K_5^{-1} m^5 + K_3(\rho_3 + \rho_3^2) m \\ &\quad + K_4(\rho_3 + \rho_3^2 + \|u_{xx}\|^2)(m + C(L)m^2). \end{aligned}$$

令  $\mathcal{Q}_m = \lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{u_0 \in \mathcal{A}} \frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{Re} \operatorname{Tr}(F(u(\tau)) \cdot Q_m(\tau)) d\tau$ . 由引理 1.1、引理 1.4, 有

$$\frac{1}{t} \int_0^t \|u_{xx}\|^2 d\tau \leq K_1 \gamma_r^{-1} \frac{1}{t} \int_0^t (1 + \|u_x\|^2)^2 d\tau.$$

故当  $t \geq T+1$  时, 有

$$\frac{1}{t} \int_0^t \|u_{xx}\|^2 d\tau \leq K_1 \gamma_r^{-1} \rho_2^4,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_m &\leq -\frac{\gamma_r}{2} L K_5^{-1} m^5 + K_3(\rho_3 + \rho_3^2) m \\ &\quad + K_4(\rho_3^2 + \rho_3^2 + K_1 \gamma_r^{-1} \rho_2^4) \cdot (m + C(L)m^3). \end{aligned}$$

于是当  $m \geq m_0 = [2(K_6 + K_7) \gamma_r^{-1} K_5 L^{-4}] + 1$  时,  $\mathcal{Q}_m < 0$ , 其

中  $K_6 = K_3(\rho_3 + \rho_3^2)$ ,  $K_7 = \frac{L^4 K_5}{\gamma_r} K_4(\rho_4 + \rho_3^2 + K_1 \gamma_r \rho_2^4)^2 C^2(L)$ ,

$[x]$  表示  $x$  的整数部分, 则由 [1] 的结果有

$$d_H(\mathcal{A}) \leq m_0, d_F(\mathcal{A}) \leq 2m_0,$$

其中  $d_H(\mathcal{A})$ 、 $d_F(\mathcal{A})$  分别表示吸引子  $\mathcal{A}$  的 Hausdorff 维数和 Fractal 维数.

## §2 广义 Ginzburg-Landau 方程的行波解分析

考虑如下广义 GL 方程

$$u_t = a_0 u + (1 + ib_1) u_{xx} + (a_2 + ib_2) |u|^2 u + (a_3$$

$$+ ib_3) |u|^2 u_x + (a_4 + ib_4) u^2 \bar{u}_x \\ - (1 + ib_5) |u|^4 u, \quad (2.1)$$

其中  $x \in R', t > 0, \bar{u}$  表示  $u$  的复数共轭,  $a_j, b_j$  为实数.

当  $a_3 = a_4 = b_3 = b_4 = 0$  时可得五次 GL 方程

$$u_t = a_0 u + (1 + ib_1) u_{xx} + (a_2 + ib_2) |u|^2 u \\ - (1 + ib_5) |u|^4 u. \quad (2.2)$$

设

$$u = r e^{i(kz - wt)}, \quad (2.3)$$

其中  $r, k, w$  为实数,  $z = x - ct$  将(2.3)代入(2.1)得

$$r^4 + [(b_3 - b_4)k - a_2]r^2 + k^2 - a_0 = 0, \quad (2.4)$$

$$w = -ck + b_1 k^2 - [b_2 + (a_3 - a_4)k]r^2 + b_5 r^4. \quad (2.5)$$

求解(2.4)得

$$r^2 = \frac{a_2 - (b_3 - b_4)k \pm \sqrt{[(b_3 - b_4)^2 - 4]k^2 - 2a_2(b_3 - b_4)k + a_2^2 + 4a_0}}{2}. \quad (2.6)$$

从上式可看出, 当  $|b_3 - b_4| \geq 2$  时,  $k$  增加时,  $r \rightarrow \infty$ , 因此总设整体存在性条件满足  $|b_3 - b_4| < 2$ , 为使平方根有意义, 取  $a_0 > -a_2^2/4$ . 此处对于平面波, 当  $k \in [k_{\text{lower}}, k_{\text{upper}}]$  时总是存在的, 其中

$$k_{\text{lower}} = \frac{a_2(b_3 - b_4) + 2\sqrt{-a_0(b_3 - b_4)^2 + a_2^2 + 4a_0}}{(b_3 - b_4)^2 - 4}, \quad (2.7)$$

$$k_{\text{upper}} = \frac{a_2(b_3 - b_4) - 2\sqrt{-a_0(b_3 - b_4)^2 + a_2^2 + 4a_0}}{(b_3 - b_4)^2 - 4}. \quad (2.8)$$

当  $-a_2^2/4 < a_0 < 0$  时零振幅波是线性稳定的, 而当  $a_0 > 0$  时, 它是不稳定的, 我们先讨论  $a_0 < 0$ , 再讨论  $a_0 > 0$ . 且设  $a_2 > 0$ , 为寻求更一般的行波解, 令

$$u = B e^{-iwt}, B(z) = r(z) e^{i \int k(z) dz}, z = x - ct, \quad (2.9)$$

代入(2.1)得



$$\begin{aligned}
-cB_z &= i\omega B + a_0 B + (1 + ib_1)B_{zz} \\
&\quad + (a_2 + ib_2)|B|^2 B + (a_3 + ib_3) \cdot |B|^2 B_z \\
&\quad + (a_4 + ib_4)B^2 B_z - (1 + ib_5)|B|^4 B. \quad (2.10)
\end{aligned}$$

易得如下一阶方程组

$$r' = (1 + b_1^2)s, \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned}
s' &= [-a_0 - b_1\omega - b_1ck + (1 + b_1^2)k^2]r - cs - (a_2 \\
&\quad + b_1b_2)r^3 - [(a_3 + a_4) + b_1(b_3 + b_4)]r^2s - [b_1(a_3 \\
&\quad - a_4) - (b_3 - b_4)]r^3k + (1 + b_1b_5)r^5, \quad (2.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k' &= [b_1c - 2(1 + b_1^2)k]s/r + a_0b_1 - \omega + ck \\
&\quad + (a_2b_1 - b_2)r^3 + [b_1(a_3 + a_4) - (b_3 + b_4)]rs \\
&\quad - [(a_3 - a_4) + b_1(b_3 - b_4)]r^2k + (b_5 - b_1)r^4, \quad (2.13)
\end{aligned}$$

其中  $\tau' = \frac{d}{d\tau}$ ,  $r = \frac{z}{(1 + b_1^2)}$ ,  $s = \frac{r'}{(1 + b_1^2)}$ .

$(r, s, k)$  方程组(2.11)–(2.13) 在  $r = 0$  上有奇性, 为此, 引入

$$v = s/r, \quad (2.14)$$

则有

$$v' = s'/r - (1 + b_1^2)v^2. \quad (2.15)$$

此时(2.11)–(2.13) 方程变化为  $(r, v, k)$  方程组

$$r' = (1 + b_1^2)rv, \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned}
v' &= -a_0 - b_1\omega - b_1ck + (1 + b_1^2)k^2 - cv - (1 + b_1^2)v^2 \\
&\quad - (a_2 + b_1b_2)r^2 - [(a_3 + a_4) + b_1(b_3 + b_4)]r^2v \\
&\quad - [b_1(a_3 - a_4) - (b_3 - b_4)]r^2k + (1 + b_1b_5)r^4, \quad (2.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k' &= [b_1c - 2(1 + b_1^2)k]v + a_0b_1 - \omega - ck + (a_2b_1 \\
&\quad - b_2)r^2 + [b_1(a_3 + a_4) - (b_3 + b_4)]r^2v - [(a_3 - a_4) \\
&\quad + b_1(b_3 - b_4)]r^2k + (b_5 - b_1)r^4. \quad (2.18)
\end{aligned}$$

这个方程组对  $r = 0$  平面是不变的, 因此奇点变成奇不变平面.

在不变平面  $r = 0$  上,  $(r, v, k)$  方程组为

$$\begin{aligned} v' &= -a_0 - b_1 w - b_1 c k + (1 + b_1^2) k^2 \\ &\quad - c v - (1 + b_1^2) v^2, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$k' = [b_1 c - 2(1 + b_1^2) k] v + a_0 b_1 - w - c k. \quad (2.20)$$

这个方程组不依赖于  $a_3, a_4, b_3, b_4$ , 也不依赖于  $b_2$  或  $b_5$ , 方程组 (2.19)(2.20) 可看成方程组  $(r, s, k)$  当  $r \rightarrow 0$  时解的状态.

以下设  $b_1, b_2, b_5, a_3, a_4$  为小量, 令

$$\epsilon = (b_1, b_2, a_3, a_4, b_5), \quad (2.21)$$

当  $\epsilon = 0$  时, (2.16) — (2.18) 归结为

$$r' = r v, \quad (2.22)$$

$$v' = -a_0 + k^2 - c v - v^2 - a_2 r^2 + (b_3 - b_4) r^2 k + r^4, \quad (2.23)$$

$$k' = -w - (c + 2v) k - (b_3 + b_4) r^2 v. \quad (2.24)$$

附设  $b_3 + b_4 = 0$ , 可得

$$r' = r v, \quad (2.25)$$

$$v' = -a_0 + k^2 - c v - v^2 - a_2 r^2 + (b_3 - b_4) r^2 k + r^4, \quad (2.26)$$

$$k' = -w - (c + 2v) k. \quad (2.27)$$

如果  $w = 0$ , 则平面  $k = 0$  对于第二个方程组是不变的, 这有利于寻找  $(r, v, k)$  方程组的临界点,  $\epsilon_1 b_3 + b_4$  和  $w$  为充分小, 对于零振幅波的临界点为  $[0, v^\pm(\epsilon, b_3, b_4, w, c), k^\pm(\epsilon, b_3, b_4, w, c)]$  为

$$v^\pm(0, 0, 0, 0, c) = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4a_0}}{2}, \quad (2.28)$$

$$k^\pm(0, 0, 0, 0, c) = 0. \quad (2.29)$$

由线性分析, 当  $-a_0^2/4 < a_0 < 0$  时可知临界点  $(0, v^+, k^+)$  具有一维不稳定流形,  $(0, v^-, k^-)$  具有一维稳定流形, 相关的特征向量对任何  $c$  垂直于  $r = 0$  平面. 当限制在  $r = 0$  不变平面上,  $(v^+, k^+)$  是一个汇, 而  $(v^-, k^-)$  是一个源, 对任何  $c$ .

对  $a_0 > 0$ , 当  $|c| > 2\sqrt{a_0}$  时, 一对临界点存在, 对  $c > 2\sqrt{a_0}$ ,  $(0, v^+, k^+)$  为一个汇,  $(0, v^-, k^-)$  具有一维稳定流形, 其特征向量垂直于  $r = 0$  平面, 对  $c < -2\sqrt{a_0}$ ,  $(0, v^-, k^-)$  是一个源, 而  $(0, v^+, k^+)$  具有一维不稳定流形, 其特征向量垂直于  $r = 0$  平面, 当限制在  $r = 0$  不变平面上,  $(v^+, k^+)$  是一个汇,  $(v^-, k^-)$  是一个源,  $|c| > 2\sqrt{a_0}$ .

当  $r_{0,1}(\varepsilon_1, b_3, b_4, w, c)$  和  $k_{0,1}(\varepsilon_1, b_3, b_4, w, c)$  满足(2.4), (2.5) 时, 则具有平面波临界点  $(r_0, 0, k_0)$  和  $(r_1, 0, k_1)$ , 特别

$$r_0^2(0, 0, 0, 0, c) = \frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 + 4a_0}}{2},$$

$$r_1^2(0, 0, 0, 0, c) = \frac{a_2 - \sqrt{a_2^2 + 4a_0}}{2},$$

$$k_0(0, 0, 0, 0, c) = 0, k_1(0, 0, 0, 0, c) = 0.$$

$r_0$  对应于大振幅平面波,  $r_1$  对应于小的振幅平面波, 线性化(2.25), (2.26), (2.27) 可得特征值

$$\lambda^\pm = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 4\gamma}}{2}, \lambda_3 = -c,$$

其中  $\gamma = a_2^2 + 4a_0 + a_2\sqrt{a_2^2 + 4a_0}$ .

对应的特征向量为  $(r_0, \lambda^\pm, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ . 由线性分析, 在空间  $(r, v, k)$  上, 当  $-a_2^2/4 < a_0 < 0$  时,  $(r_0, 0, k_0)$  具有二维稳定流形和一维不稳定流形,  $c > 0$ ; 一维稳定流形和二维不稳定流形,  $c < 0$ ; 一维稳定流形, 一维不稳定流形和一维中心流形,  $c = 0$ . 无论如何, 当限制在  $k = 0$  平面上,  $(r_0, 0, k_0)$  具有一维不稳定流形和一维稳定流形, 对任何  $c$ , 在  $(r_1, 0, k_1)$  上, 线性化算子具有一对复共轭特征值和一个实特征值, 对任何  $c$ , 更详细一点, 在  $(r_1, 0, k_1)$  上, 对  $c > 0$  为稳定焦点,  $c < 0$  为不稳定焦点, 当  $c = 0$  时, 具有一对纯虚特征值和一个零特征值.

对  $a_0 > 0$ , 仅有一个平面波临界点  $(r_0, 0, k_0)$ ,  $r_1^2$  为负的, 当  $-a_2^2/4 < a_0 < 0$  时, 它具有相同的线性化结构.

方程组(2.16), (2.17), (2.18), 流的整体结构对小的  $\epsilon, b_3 + b_4$  和  $w$  解的  $\epsilon = 0, b_3 + b_4 = 0, w = 0$  推得, 附设  $c = 0$ , 则下列两个函数

$$E = \frac{1}{2}r^2(v^2 + k^2) + \frac{a_0}{2}r^2 + \frac{a_2}{4}r^4 - \frac{r_6}{6}, \quad (2.30)$$

$$M = r^2k \quad (2.31)$$

为运动常数. 计算

$$E' = -(c(v^2 + k^2) + wk)r^2, \quad (2.32)$$

$$M' = -(w + ck)r^2. \quad (2.33)$$

事实上, 对  $b_3, b_4 \neq 0$ , 可修改积分

$$\tilde{E} = E + b_4k + b_4(b_3 + b_4)\frac{r^6}{6}, \quad (2.34)$$

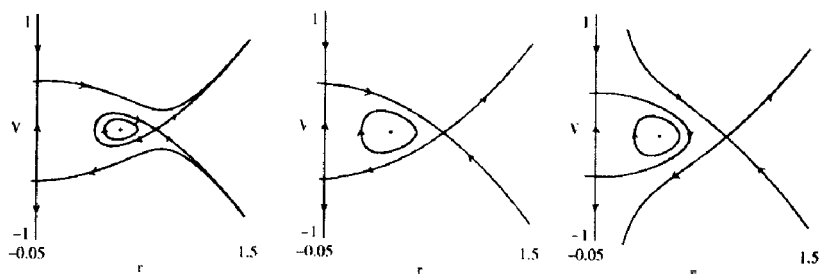
$$\tilde{M} = M + (b_3 + b_4)r^2/4, \quad (2.35)$$

$$\tilde{E}' = -(c(v^2 + k^2) + wk)r^2 - b_4(w + ck)r^4, \quad (2.36)$$

$$\tilde{M}' = -(w + ck)r^2, \quad (2.37)$$

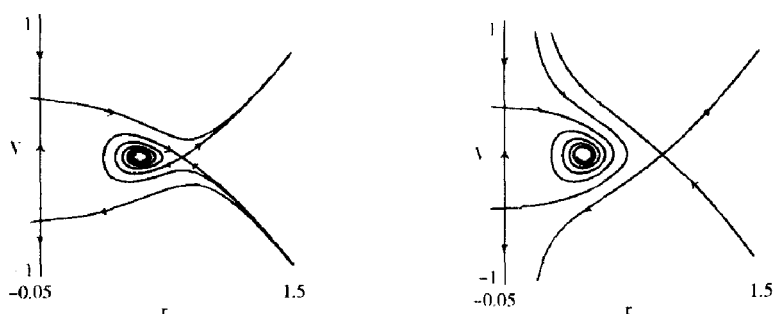
当  $w = c = 0$  时,  $\tilde{M}' = 0$ .

我们得到局部和整体结果如图 2.1 ( $w = c = 0$ ) 所示, 在图 2.1 中我们看到三种类型的解: 初始状态的波前 (fronts)、筹壁 (domain wall)、脉冲 (pulse) 在图 2.2 和图 2.3 中,  $w = 0, c > 0$ , 对于  $c < 0$  可由  $c > 0$  的对称性可得到



(a)  $a_0 \in \left(-\frac{1}{4}a_2^2, -\frac{3}{16}a_2^2\right)$ ; (b)  $a_0 = -\frac{3}{16}a_2^2$ ; (c)  $a_0 \in \left(-\frac{3}{16}a_2^2, 0\right)$

图 2.1 (2.16)–(2.18) 在不变平面  $k = 0$  上  $(r, v, k)$  的相图,  $c = w = 0$ .



$$(a) a_0 \in \left(-\frac{1}{2}a_2^2, -\frac{3}{16}a_2^2\right), \quad (b) a_0 \in \left(-\frac{3}{16}a_2^2, 0\right)$$

图 2.2 方程组(2.16)–(2.18)( $\varepsilon = 0$ )( $r, v, k$ )

在不变平面  $k = 0$  上的相图,  $c > 0, w = 0$

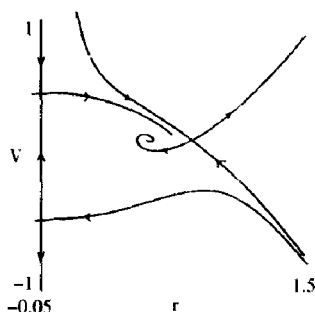


图 2.3  $g^s(c_0) > g^b(c_0)$

$$(r, v, k, w, c, z) \rightarrow (r, -v, k, -w, -c, -z). \quad (2.38)$$

这里研究可积结构形态, 对小的  $\varepsilon, b_3 + b_4, w$ , 适当选取波速  $c$ .

现考虑波前和筹壁:  $a_0 < 0$ .

当  $a_0 < 0$  时, 存在着连接任何二个零振幅  $r = 0$  波和大振幅波  $r = r_0$  的各种可能性, 对于小振幅波  $r = r_1$ , 如图 2.1 所示, 虽然小振幅平面波是动力学不稳定的, 但存在多种连接性.

**定理 2.1** 设  $\varepsilon = (b_1, b_2, a_2, a_4, b_5)$ ,  $b_3 + b_4$  和  $w$  充分小, 则

(1) 对  $a_0 \in \left(-\frac{1}{4}a_2^2, -\frac{3}{16}a_2^2\right)$  和任何  $c > 0$ , 存在异宿墙连接大振幅波( $z \rightarrow -\infty$ ) 和小振幅波( $z \rightarrow \pm\infty$ ).

(2) 对  $a_0 \in \left(-\frac{3}{16}a_2^2, 0\right)$  和任何  $c > 0$  存在连接零振幅波( $z \rightarrow -\infty$ ) 和小振幅波( $z \rightarrow +\infty$ ) 波前.

(3) 对任何  $a_0 \in \left(-\frac{1}{4}a_2^2, 0\right)$ , 存在两个局部惟一函数  $\tilde{c} = \tilde{c}(a_0, a_2) \geq 0$ ,  $\tilde{c} = \tilde{c}(a_0, a_2) \geq 0$ , 有  $c(-\frac{3}{16}a_2^2, a_2) = \tilde{c}(-\frac{3}{16}a_2^2, a_2) = 0$ .

(A) 情况(1): 如  $c = \tilde{c}$ , 存在连接零振幅波( $z \rightarrow -\infty$ ) 和大振幅平面波( $z \rightarrow +\infty$ ) 波前; 如  $c > \tilde{c}$ , 存在连接零振幅波( $z \rightarrow -\infty$ ) 和小振幅波( $z \rightarrow +\infty$ ) 波前.

(B) 情况(2): 如  $c = \tilde{c}$ , 存在连接大振幅平面波( $z \rightarrow -\infty$ ) 和零振幅波( $z \rightarrow +\infty$ ) 波前; 如  $c > \tilde{c}$ , 则异宿墙连接大振幅波( $z \rightarrow -\infty$ ) 和小振幅波( $z \rightarrow +\infty$ ) 存在.

(4) 类似结果对  $c < 0$  成立, 前波或异宿墙依相反方向跑.

证 置  $\epsilon = 0, b_3 + b_4 = w = 0$ , 考虑流在  $k = 0$  的不变平面( $r, v$ ) 上.

先设  $a_0 \in \left(-\frac{1}{4}a_2^2, -\frac{3}{16}a_2^2\right)$ , 对于  $c = 0$  存在  $r = r_0$  的同宿轨道(图 2.1(a)), 以(2.33)表达式( $E' = -cr^2v^2, w = k = 0$ ), 可知, 它对一切  $c \neq 0$  破裂, 产生结构稳定(横截), 鞍点  $\rightarrow$  汇连接从  $r_0$  到  $r_1, c > 0$  (图 2.2(a)). 而源  $\rightarrow$  鞍连接从  $r_1$  到  $r_0$  时  $c < 0$ , 从对称性(2.38) 和(图 2.2(a)) 能证明第一部分.

现转向第三部分(A), 考虑系统

$$r' = rv, \quad (2.39)$$

$$v' = -a_0 - cv - v^2 - a_2r^2 + r^4, \quad (2.40)$$

$$c' = 0. \quad (2.41)$$

在  $k = 0$  上, 能看出参数  $c$  为一平几分量, 因此可研究参数化的流形族, 令  $w^s = w^s(r_0, 0, k_0)$  和  $w^u(0, v', k')$  均依赖于  $c$ . 当限制在平面  $k = 0$  上, 它们是一维的. 令  $w^s = \bigcup_c (w^s x | c)$  表示中心稳定流形,  $w^u = \bigcup_c (w^u x | c)$  为中心不稳定流形, 它们都是二维的.

令  $s = \{(r, v, c) : r = r_1, v > 0\}$  表示流(2.39)–(2.41)的横截面. 因  $r' > 0$  对一切  $0 < r < r_0, v' > 0, w^s$  和  $w^u$  相交  $s$  仅一次对每个  $c$ . 令  $g^s(c), g^u(c)$  分别表示曲线  $w^s \cap s$  和  $w^u \cap s$ , 它们至少属于  $c'$ .

从上面(见 1(A)), 可知  $g^s(0)$ , 我们仅需证明存在一个  $c_0 > 0$  使得  $g^s(c_0) > g^u(c_0)$  (见图 2.3), 由此推出  $\bar{c} > 0$  的存在性, 使得  $g^s(\bar{c}) = g^u(\bar{c})$  推出波前的存在性, 即在  $\bar{c} > 0$  上  $w^s$  和  $w^u$  相交.

考虑在  $(r, v, c)$  空间中参数面  $v = \alpha(r - r_0), \alpha < 0$ , 在这个平面上向量满足

$$\frac{v'}{r'} = -\frac{[c + \alpha(r - r_0)]}{r} + \frac{(r^2 - r_1^2)(r + r_0)}{ar}, \quad (2.42)$$

因此存在  $c_1 > 0$ , 使得  $(v'/r') < \alpha, c > c_1, r \in [r_1, r_0)$ , 另一个方面, 在  $v = v^+$  上,  $0 < r < r_1$  有  $v' = r^4 - a_2 r^4 < 0$ , 注意到  $c \rightarrow +\infty, v^+ \rightarrow 0$ , 因此, 存在  $c_2 > 0$ , 使得  $v^+ < \alpha(r_1 - r_0)$ . 于是存在  $c_0 > 0$ , 使得  $g^s(c_0) > g^u(c_0)$ .

对  $c > \bar{c}_1, (0, v^+, k^+)$  的不稳定流形  $w^u$ , 上零振幅不动点位于  $(r_0, 0, k)$  的稳定流形  $w^s$  上支的下面(限制于  $k = 0$  平面), 因此位于  $(r_1, 0, k_1)$  的吸引区域内, 它是这个不变平面的汇, 这就建立了结构稳定鞍点  $\rightarrow$  汇的存在性, 即对应为波前当  $c > 0$  和  $c > \bar{c}$  (图 2.4(a)) (对  $c < 0$ , 为源  $\rightarrow$  鞍点).

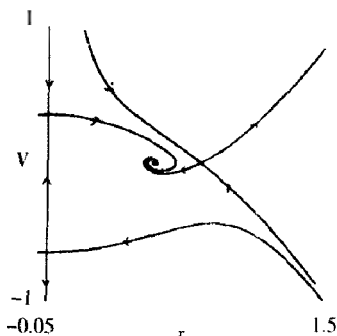


图 2.4 (A)(2.16)–(2.18) ( $\epsilon = 0$ ) 在不变平面  $k = 0$  上  $(r, v, k)$  的相图,  $c > 0, w = 0$ .

$$(A)a_0 \in \left( -\frac{1}{4}a_2^2, -\frac{3}{16}a_2^2 \right), c > c$$

定理的第一部分和  $c > \bar{c}$  (第三部分) 从这个事实即  $(r_1, 0, k_1)$  在整体  $(r, v, k)$  为汇空间,  $c > 0$  得出, 因此这种连接是结构稳定的.

为证明第三部分  $(A)c = \bar{c}$  的情况, 我们还需要证明  $w^s$  和  $w^u$  横截相交于  $\bar{c}, k = 0$ , 对它可利用微分形式去证明稳定、不稳定流形的横截相交: 设  $x, y, z$  为  $R^3$  的坐标系,  $w^s$  和  $w^u$  分别为二维(中心)稳定和(中心)不稳定流形, 设  $w^s, w^u$  相交具有任意正交基  $\{f_1, f_2\}, \{g_1, g_2\}$ , 分别沿着它们相交的  $k$  平面, 当 2 形式,  $dx dy$  作用于基上, 可得一个数, 它为一个行列式所给定, 这个行列式的元素为基向量是依  $x, y$  分量所组成. 令

$P_{xy}^- = dx dy, P_{xy}^+ = dx dy(f_1, f_2), P_{xy}^+ = dx dy(g_1, g_2)$ ,  
(- 为稳定, + 为不稳定), 因此相当于  $w^s, w^u$  的切平面有两个向量  $(P_{xy}^-, P_{xz}^-, P_{yz}^-), (P_{xy}^+, P_{xz}^+, P_{yz}^+)$ . 这些向量对有同一方向的任何正交基(右手系)取相同数值. 如两个向量无关, 则  $w^s$  和  $w^u$  的切平面不相交或平行, 它推出  $w^s$  和  $w^u$  横截相交.

相同的原理对于  $R^{n-1}$  的  $m$  维(中心)稳定和(中心)不稳定流形成立, 此时得考虑  $n$  形式和  $n$  向量.

现完成第三部分(A)  $c = \bar{c}$  情况的证明, 从(2.39), (2.40), (2.41) 可算出 1 形式的微分方程(微分或作一阶变分)

$$\delta r' = v \delta r + r \delta v, \quad (2.43)$$

$$\delta v' = (4r^3 - 2a_2 r) \delta r - (c + 2v) \delta v - v \delta c, \quad (2.44)$$

$$\delta c' = 0. \quad (2.45)$$

我们也能得到 2 形式  $P_{rv} = \delta r \delta v$  的方程, 我们仅需

$$P'_{rv} = -(c + v) P_{rv} - v P_{rv}. \quad (2.46)$$

注意到  $\Lambda_1^\pm = (rv, -a_0 - cv - v^2 - a_2 r^2 + r^4, 0)$ , 这个向量沿着(2.43) — (2.45) 的轨线, 是  $w^s$  和  $w^u$  的切向量, 令

$$\Lambda_2^\pm = (\delta r^\pm, \delta v^\pm, 1),$$

分别表示  $w^s$  和  $w^u$  切平面的第二个基向量, 它们显然是线性无关的. 因此对每个切平面构造一组基. 利用 Gram - Schmidt 过程, 可



得正交基  $|\hat{\Lambda}_1^\pm, \hat{\Lambda}_2^\pm|$ , 令  $N > 0$  为规范因子, 则有

$$P_{rv}^\pm = \delta_r \delta_c (\Lambda_1^\pm, \Lambda_2^\pm) = N \begin{vmatrix} rv & 0 \\ \delta r^\pm & 1 \end{vmatrix} = Nrv > 0, \quad v > 0. \quad (2.47)$$

从(2.46)得

$$P_{rv}^{\pm'} = -(c + v)P_{rv}^\pm - Nrv^2. \quad (2.48)$$

因此,  $w^s, w^u$  均会有临界点组成的线, 它的切向量在  $c$  方向, 对于任何平面会有这样一条线, 2 形式  $P_{rv} = 0$  推出

$$P_{rv}^+ \rightarrow 0, z \rightarrow -\infty,$$

$$P_{rv}^- \rightarrow 0, z \rightarrow +\infty.$$

因  $P_{rv}^+ = 0, z \rightarrow -\infty$ , (2.48) 表明初始  $P_{rv}^+$  是负的, 且必须保持严格负的. 对一切  $z$ , 因  $P_{rv}^{\pm'} = -Nrv^2 < 0, \forall r, v > 0$ , 在  $P_{rv}^\pm = 0$  上, 因此(2.48) 的解不能依  $P_{rv}^+$  增加的方向越过  $P_{rv}^+ = 0$ , 类似原理推出  $P_{rv}^-$  有结论

$$P_{rv}^+ < 0; \quad P_{rv}^- > 0.$$

从(2.47)可知  $P_{rv}^+ = P_{rv}^-$ , 类似计算得  $P_{wv}^+ = P_{wv}^-$ , 因此二个向量  $(P_{rv}^+, P_{rv}^+, P_{wv}^+), (P_{rv}^-, P_{rv}^-, P_{wv}^-)$  是无关的, 这就推出  $w^s$  和  $w^u$  在  $c = \bar{c} > 0 (k = 0)$  横截相交, 由维数公式,  $w^s$  和  $w^u$  在空间  $(r, v, k, c)$  上  $\bar{c}$  上相交, 以上推导故由  $\varepsilon \rightarrow 0, b_3 + b_4 = 0, w = 0$  得到. 最后, 对于充分小的和非零的  $\varepsilon_1, b_3 + b_4, v$ , 我们仅需注意到交面是保持平移不变的.

这就证明了第三部分(A) 的  $c = \bar{c}$  的情况.

第二部分和 3(B) 解被类似证明, 第四部分由对称性  $(r, v, k, w, c, t) \rightarrow (r, -v, k, -w, -c, -t)$  得到.

简单利用 Melnikov 扰动方法可得函数  $c$  和  $\bar{c}$  的估计,

$$a_0 \approx -\frac{3}{16} a_2^2,$$

对于方程组

$$r' = rv, \quad (2.49)$$

$$v' = \frac{3}{16}a_2^2 - cv - v^2 - a_2r^2 + r^4 + \alpha, \quad (2.50)$$

其中  $a_0 = -\frac{3}{16}a_2^2 - d$ , 对  $c = d = 0$  积分正变成

$$\hat{E} = \frac{1}{2}r^2v^2 - \frac{r^2}{6}\left(\frac{3}{4}a_2 - r^2\right)^2, \quad (2.51)$$

则存在鞍 $\rightarrow$ 鞍相连以  $(0, v^+, 0) \rightarrow (r_0, 0, 0)$  和  $(r_0, 0, 0) \rightarrow (0, \bar{v}, 0)$  (图 2.1(b)) 这些相连的保持性对于  $a_0 < -\frac{3}{16}a_2^2, a_0 > -\frac{3}{16}a_2^2$  分别对应于临界点  $\tilde{c}$  和  $\tilde{c}$ , 于此部分(3)的波前或异宿墙存在. 为此估计  $\tilde{c}$  和  $\tilde{c}$ , 计算

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}' dz = \int_{-\infty}^{\infty} (-cr^2v^2 + ar^2v) dz. \quad (2.52)$$

从(2.51), 对于上轨道,

$$v = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{3}{4}a_2 - r^2\right), \quad (2.53)$$

由(2.52)和在(2.49)中改变积分变量计算得

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}' dz &= \int_0^{\sqrt{3}a_2/4} \left(-\frac{cr}{\sqrt{3}}\left(\frac{3}{4}a_2 - r^2\right) + ar\right) dr \\ &= \frac{3a_2}{8}\left(a - \frac{\sqrt{3}}{8}a_2c\right). \end{aligned} \quad (2.54)$$

类似地, 对于下轨道有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}' dz = \frac{3a_2}{8}\left(-a - \frac{\sqrt{3}}{8}a_2c\right). \quad (2.55)$$

从 Melnikov 分支结果, 可得估计

$$\tilde{c}: c = \frac{8a}{\sqrt{3}a_2}\left(\frac{3}{16}a_2^2 + a_0\right) \quad (2.56)$$

和

$$\tilde{c} = -\frac{8a}{\sqrt{3}a_2} = \frac{8}{\sqrt{3}a_2}\left(\frac{3}{16}a_2^2 + a_0\right). \quad (2.57)$$

对于小的  $c$ , 和  $a_0 \approx -\frac{3}{16}a_2^2$  是好的近似.

对于前波和墙:  $a_0 > 0$  的情况.

**定理 2.2** 令  $\varepsilon = (b_1, b_2, a_3, a_4, b_5)$  和  $w$  充分小,  $a_0 > 0$ , 则对系数在  $(b_1, b_2, b_3, b_4, a_3, b_5)$  空间的一个子集上, 存在同宿连接惟一平面波 ( $z \rightarrow -\infty$ ) 和它自己 ( $z \rightarrow +\infty$ ), 适当选择频率  $w$  和波速  $c$ .

**定理 2.3** 令  $\varepsilon = (b_1, b_2, a_3, a_4, b_5)$ ,  $b_3 + b_4$  和  $w$  充分小, 设  $a_0 > 0$ , 则对  $c > 2\sqrt{a_0}$  且充分大, 存在波前惟一平面波 ( $z \rightarrow -\infty$ ) 和零振幅波 ( $z \rightarrow +\infty$ ), 对  $c < -2\sqrt{a_0}$  和  $|c|$  充分大, 存在波前从相反方向路过, 进一步, 对任何  $|c| > 2\sqrt{a_0}$  没有同宿墙存在.

**证** 考虑 (2.25) — (2.27) 在不变平面  $k = 0$  上,  $w = 0$ , 我们仅需证明  $c > 2\sqrt{a_0}$  情况. 因为  $c < -2\sqrt{a_0}$  能从对称性 (2.38) 得到. 因不稳定流形  $w^u(r_0, 0, k_0)$  正切于特征向量  $(r_0, \lambda^+, 0)$  (靠近  $(r_0, 0, k_0)$ ), 它的下支进入  $v < 0$  半平面 (见图 2.5). 论这支,  $r$  是减少,  $r = rv < 0$  近一点, 这支不能进入  $v > 0$  上半空间, 因在  $v = 0$  上,

$$v' = -a_0 - a_2 r^2 + r^4 = (r^2 - r_0^2) \left| r^2 - \frac{a_2 - \sqrt{a_2^2 + 4a_0}}{2} \right| < 0. \quad (2.58)$$

因此下支沿  $r$  的减少方向, 这支不能穿过半线  $\{v = v^+, r > \sqrt{a_2}\}$  上. 于此

$$v' = r^2(r^2 - a_2) > 0. \quad (2.59)$$

无论如何, 它能穿过半线  $\{v = v^+, r < \sqrt{a_2}\}$ , 如果成立, 能选取  $c$  充分大, 使得

$$\begin{aligned} v' &= -a_0 - cv - v^2 - a_2 r^2 + r^4 \\ &= -(v - v^+)(v - v^-) + r^2(r^2 - a_2) > 0. \end{aligned} \quad (2.60)$$

因此我们用这个事实:  $c \rightarrow +\infty$ ,  $v^+ \rightarrow 0$ ,  $v^- \rightarrow -\infty$ , 可知  $r^2(r^2 - a_2)$  具有极子:  $-a_2^2/4$ , 对这样的  $c$ , 下支向上运动进入汇  $(0, v^+, k^+)$  的吸引区, 我们得到结构稳定, 鞍  $\rightarrow$  汇连接, 因

$w''(r_0, 0, r_0)$  的下支永远依  $r$  的减少方向离开, 它不能再回到  $r_0$ , 类似能证上支永远离开依  $r$  的增加方向, 因此不存在同宿区域墙.

再看脉冲:  $a_0 < 0$  和  $a_0 > 0$  的情况.

**定理 2.4** 设  $a_0 \in \left(-\frac{1}{4}a_2^2, 0\right)$ ,  $(w, c) \neq (0, 0)$  或  $a_0 > 0$ ,  $|c| > 2\sqrt{-a_0}$ , 则对  $\varepsilon = (b_1, b_2, a_3, a_4, b_5)$ ,  $b_3 + b_4$  和  $w$  充分小, 不存在 pulses.

**证** 初始置  $\varepsilon = 0$ ,  $b_3 + b_4 = 0$ , 则可得到结构稳定和横截性. 首先考虑  $w = 0$  的情况, 此时  $k = 0$  平面保持不变, 无损于一般性, 设  $c > 0$  ( $c < 0$ , 对称性), 因零振幅波不动点  $(0, v^+, 0)$ ,  $(0, v^-, 0)$ , 有

$$v^\pm = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4a_0}}{2}, \quad (2.61)$$

点位于这个平面上, 对于  $a_0 \in \left(-\frac{1}{4}a_2^2, -\frac{3}{16}a_2^2\right)$ ,  $(0, v^+, 0)$  的不稳定流形不能进入  $v < 0$  半空间,  $(0, v^-, 0)$  位于其中, 由于定理 2.1 第一部分 (见图 2.2(a)) 的相连轨线, 和在  $\{v = 0, 0 < r < r_1\}$  上, 导致满足

$$v' = -a_0 - a_2 r^2 + r^4 = (r^2 - r_0^2)(r^2 - r_1^2) > 0,$$

当  $a_0 \in \left(-\frac{3}{16}a_2^2, 0\right)$ , 因  $E' = -cr^2 v^2 \leq 0$ , 则

$$E = \frac{1}{2}r^2 v^2 + \frac{a_0}{2}r^2 + \frac{a_2}{4}r^2 + \frac{a_2}{4}r^4 - \frac{r^6}{6} \quad (2.62)$$

的任何水平集的分量的内部是正不变的 (见图 2.2(b)). 因为  $(0, v^+, 0)$  位于水平集合有点  $r = 0, v = \pm\sqrt{-a_0}$  的内部, 而  $(0, v^-, 0)$  在其外部, 因此没有轨线从第一者通过它者.

现设  $w \geq 0, c \leq 0$ , 不动点  $(0, v^+, k^+)$  和  $(0, v^-, k^-)$  分别位于  $(k, v)$  平面的左 ( $k < 0$ ) 和右 ( $k > 0$ ), 我们有  $k^\pm = -w/(c + 2v^\pm)$ , 考虑不稳定流形  $w''(0, v^+, k^+)$ , 它进入半空间  $H = \{(r, v, k) \mid k < 0 < r\}$ , 任何包含在这个流形上的任何轨线有

$$\mu' = -(w + ck)r^2, \quad (2.63)$$

它在  $H_-$  上是严格负的,因此轨线穿过水平集,  $M = r^2 k = \text{常数}$  在  $M$  减小的方向上,推出这样的轨线不能离开  $H_-$  且进入正半空间  $H_+ = \{(r, v, k) \mid k, r > 0\}$ , 其中局部稳定流形  $u^s\{0, v^-, k^-\}$  位于其中,因此不存在脉冲.

对  $w > 0, c \geq 0$  类似讨论表明稳定流形  $u^s(0, v^-, k^-) \subset H_+$ . 因此不能和不稳定流形  $u^u(0, v^+, k^+)$  相连,对于  $w < 0$  情况处理是类似的.

对  $a_0 > 0, c > 2\sqrt{a_2}, (0, v^+, k^+)$  为在  $(r, v, k)$  空间中的一个汇,而  $(0, v^-, k^-)$  中的二维不稳定流被限制于不变平面  $r = 0$ . 因此没有(不平凡)pulse 存在,  $c < 2\sqrt{a_0}$  情况类似.

### § 3 Ginzburg-Landau 方程拟周期解的不稳定性

考虑 GL 方程

$$u_t = (1 - |u|^2)u + u_{xx}. \quad (3.1)$$

定常问题

$$0 = (1 - |u|^2)u + u_{xx}. \quad (3.2)$$

如表示(3.2)的解  $u(x) = \rho(x)e^{i\theta(x)}$ , 则有

$$u_t = \rho^2 \theta',$$

$$K = \rho_x^2 + \rho^2 - \frac{\rho^4}{2} + \frac{u^2}{\rho^2}$$

为(3.2)的积分,则  $\rho(x)$  满足方程

$$\rho'' + f(\rho) = 0, \quad (3.3)$$

其中

$$f(\rho) = -\frac{u^2}{\rho^3} + \rho - \rho^3.$$

(3.3)的周期解  $\rho(x)$  形成(3.2)的拟周期解,为了利用于特征值指数,作  $z(x, t) = u(x, t)e^{-i\theta(x)}$ , 其中  $u(x, t)$  为(3.1)的

解,且  $\theta(x) = \int_0^x \frac{w}{\rho(s)^2} ds$ . 其中  $\rho(x)$  为正的(3.3)的周期解,于是可得方程

$$z_t = z_{xx} + \frac{2iw}{\rho^2} z_x - \left( \frac{2iw}{\rho^3} \rho_x + \frac{w^2}{\rho^4} \right) z + z - |z|^2 z.$$

令  $z = \alpha + i\beta$ , 可得

$$\alpha_t = \alpha_{xx} - \frac{2w}{\rho^2} \beta_x + \frac{2w\rho_x}{\rho^3} \beta + \left( 1 - \frac{w^2}{\rho^4} - (\alpha^2 + \beta^2) \right) \alpha, \quad (3.4)$$

$$\beta_t = \beta_{xx} + \frac{2w}{\rho^2} \alpha_x - \frac{2w\rho_x}{\rho^3} \alpha + \left( 1 - \frac{w^2}{\rho^4} - (\alpha^2 + \beta^2) \right) \beta. \quad (3.5)$$

由此可得  $(\rho(x), 0)$  为(3.4), (3.5) 的周期定常解. 此时解(3.4), (3.5) 线性化得特征值的线性方程组

$$\lambda \alpha = \alpha_{xx} - \frac{2w}{\rho^2} \beta_x + \frac{2w\rho_x}{\rho^3} \beta + \left( 1 - \frac{w^2}{\rho^4} - 3\rho^2 \right) \alpha, \quad (3.6)$$

$$\lambda \beta = \beta_{xx} + \frac{2w}{\rho^2} \alpha_x - \frac{2w\rho_x}{\rho^3} \alpha + \left( 1 - \frac{w^2}{\rho^4} - \rho^2 \right) \beta. \quad (3.7)$$

线性方程组具有  $T$  周期系数, 它能写为等价的一阶方程组

$$Y' = A(x, \lambda) Y, \quad (3.8)$$

其中  $Y \in \mathbb{C}^4$  为向量  $(\alpha, \alpha_x, \beta, \beta_x)^t$ ,  $A(x, \lambda)$  为矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ (\lambda + w^2/\rho^4 - 1 + 3\rho^2) & 0 & -2w\rho_x/\rho^3 & 2w/\rho^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2w\rho_x/\rho^3 & -2w/\rho^2 & (\lambda + w^2/\rho^4 - 1 + \rho^2) & 0 \end{pmatrix}.$$

**定义 3.1** 设  $\Phi(x, \lambda)$  为(3.8)的矩阵解, 满足  $\Phi(0, \lambda) = I$ , 其中  $I$  为  $4 \times 4$  单位矩阵, 令  $I$  为由(2.6), (2.7) 右端所确定的作用于一段有界连续函数空间的二阶算子. 给定  $\gamma \in S^1$ , 称  $\lambda$  为  $L$  的一个  $\gamma$  特征值, 是指  $\gamma$  为  $\Phi(T, \lambda)$  的一个特征值,  $\lambda$  的几何  $\gamma$  重数为  $(\Phi(T, x) - \gamma I)$  的维数, 代数  $r$  重数的定义则更为复杂. 以下可知, 算子  $I$  不具有广义特征函数, 因而几何和代数  $r$  重数是一样

的.

现设  $K \subset \mathbb{C}$  为一简单闭曲线, 有定理

**定理 3.2** 设  $S^1 = \{\gamma \in S^1 : \gamma \neq 1\}$ ,  $\gamma \in S^1_*$ , 设  $K$  为在  $\{\operatorname{Re} \lambda \geq 0\}$  中的简单闭曲线. 它和虚轴相交仅在  $\lambda = 0$  一点, 它含有一个凸区域. 设  $c > 0$  为  $K$  和正  $\lambda$  轴相交的惟一交点.

(1) 对每个固定  $w_0 \in \left(0, \sqrt[4]{\frac{4}{27}}\right)$  存在  $c(w_0) > 0$  使得如  $c \geq c(w_0)$ , 则  $K$  对于  $L$  的  $\gamma$  特征值,  $\forall \gamma \in S^1_*$ , 对于一切 (3.3) 的周期解,  $w_0 < w < \sqrt[4]{\frac{4}{27}}$  是不相连的.

(2)  $r$  特征值指标  $c_1(\epsilon(K, \gamma, \rho)) = 2$ ,  $\forall \gamma, T, w$ , 因此  $L$  的谱含有一个区间,  $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1$ , 其中  $\lambda_1 > \lambda_0 \geq 0$ .

**定理 3.3** 关于 (3.4), (3.5) 周期解  $(\rho(x), 0)$ , 线性化方程组 (3.6), (3.7) 的谱可从 (3.3) 的周期解  $\rho(x)$ ,  $w = 0$  得到, 且它振荡地通过零点, 含有一个区间位于正实轴的一个部分.

为了证明定理 3.2(1) 的断言, 必须证明  $K$  对于适当的参数值  $T$  和  $w$ ,  $L$  的  $\gamma$  特征值是不相连的. 这从以下三个断言得到

- (i)  $L$  的谱是实的;
- (ii)  $\lambda = c$  决不是  $L$  的特征值, 对于适当的参数,  $c$  充分大;
- (iii)  $\lambda = 0$  决不是  $\gamma$  特征值,  $\forall \gamma \in S^1_*$ .

**证(i)** 因  $\lambda$  为  $L$  的谱当且仅当它是  $\gamma$  特征值对  $\gamma \in S^1$  充分证明  $L$  的  $\gamma$  特征值是实的. 这从为 (2.6) (2.7) 所定义的线性算子是关于  $L^2$  内积对称性得出, 即

$$\left( \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, L \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right)_{L^2} = \left( L \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right)_{L^2},$$

其中在  $R^1$  上光滑函数配对  $\alpha, \beta$  的空间满足  $\gamma$  特征值条件

$$\begin{aligned} (\alpha(T), \beta(T)) &= (\gamma\alpha(0), r\beta(0)), \\ (\alpha'(T), \beta'(T)) &= (\gamma\alpha'(0), r\beta'(0)). \end{aligned}$$

更详细一些, 乘 (3.6) 以  $\bar{\alpha}$ , (3.7) 以  $\bar{\beta}$ , 部分积分取虚部. 计算表明  $\operatorname{Im} \lambda = 0$ , 因此  $L$  的谱是实的,  $L$  的对称性推出对  $L$  的每个  $\gamma$

特征值  $\lambda$  具有上升性. 因此  $\lambda$  的几何  $\gamma$  重数等于它们代数  $\gamma$  重数.

(ii) 对  $w_0 \leq \omega < \sqrt{\frac{4}{27}}$ , 存在  $\kappa > 0$ , 仅依赖于  $w_0$ , 使得对  $L$  的每个系数关于  $|\kappa|$  是一致有界的,  $0 \leq x \leq T(p)$ ,  $\forall p \in (\rho_0, \rho_1)$ , 设  $\lambda > 0$  为  $L$  的一个特征值,  $(\alpha, \beta)$  为相应的规范化特征函数, 使得

$$\int_0^T (\alpha^2 + \beta^2) dx = 1.$$

对任何  $\varepsilon > 0$ , 有

$$|\beta_x \alpha| \leq \frac{\varepsilon^2}{2} \beta_x^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2} \alpha^2.$$

选取  $\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{\kappa}}$ , 估计  $\alpha_x \beta$  项, 可得

$$\lambda < \int_0^T \left( \kappa + \frac{\kappa}{2\varepsilon^2} \right) (\alpha^2 + \beta^2) dx.$$

因此  $\lambda < \kappa + \frac{\kappa^2}{2}$ . 因  $\kappa$  仅依赖于  $w_0$ , 如选取  $c(w_0) = \kappa + \frac{\kappa^2}{2}$ , 则  $c \geq c(w_0)$ , 推出  $\lambda = c$  不是  $L$  的一个特征值,  $\forall p \in (\rho_0, \rho_1]$ ,

$$|\omega| \in \left( w_0, \sqrt{\frac{4}{27}} \right).$$

(iii) 现证没有  $\gamma$  特征值能通过原点,  $\gamma \in S^1_t$ . 这个命题等价于证明如  $\Phi(T, \lambda, P)$  为线性化方程组(3.8)的 Floquet 矩阵, 则  $\gamma$  不是矩阵  $\Phi(T, 0, P)$  ( $\forall p \in (p_0, p_1]$ ) 的一个特征值, 一般说来, 证明是困难的, 计算量是大的, 但这里由于方程组(3.2)的对称性, 导致(3.2)的是 4 个参数的解具有某些附加的结构, 此时解集可表示为

$$u = u(x, p, \omega, \psi) = \rho(x, p, \omega) e^{i(\psi + \theta(x, p, \omega))},$$

其中  $\rho$  为(3.3)的解, 满足初始条件

$$\rho(0, p, \omega) = 0, \quad (3.9)$$

$$\rho_x(0, p, \omega) = p. \quad (3.10)$$



$\rho^2 \theta' = \omega$ ,  $\psi$  为附加的自由参数, 为方便计算, 解依赖于参数  $p, \omega, \psi$ , (3.2) 的变分方程为

$$0 = v_{xx} + (1 - 2uu)v - u^2 \bar{v}.$$

简单计算表明  $\alpha + i\beta = \exp(-i\theta)v$  为方程组 (3.6)、(3.7) 在  $\lambda = 0$  的解.  $u(x)$  对  $x, \psi, p, \omega$  分别微商得

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho(x) \\ \rho'(x) \end{bmatrix}, & y_2(x) &= \begin{bmatrix} \rho'(x) \\ \rho''(x) \\ \frac{\omega}{\rho(x)} \\ -\frac{\omega \rho'(x)}{\rho(x)} \end{bmatrix}, \\ y_3(x) &= \begin{bmatrix} \rho_p \\ \rho_{px} \\ \rho_R \\ (\rho_R)_x \end{bmatrix}, & y_4(x) &= \begin{bmatrix} \rho_\omega \\ \rho_{\omega x} \\ \rho_S \\ (\rho_S)_x \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} R(x) &= -\int_0^x \frac{2\omega \rho_p(s)}{\rho(s)^3} ds = \theta_p, \\ S(x) &= -\int_0^x \left( \frac{2\omega}{\rho^3} \rho_\omega - \frac{1}{\rho^2} \right) ds = \theta_\omega. \end{aligned}$$

注意到  $\rho(x)$  为 (3.2) 的周期  $T(p)$  的周期解, 显然  $p \rightarrow \rho_0$  时,  $T(p) \rightarrow +\infty$ , 因为周期轨道逼近于同宿轨道, 从基本的分支理论可知, 当  $p \rightarrow \rho_1$  时  $T(p) \rightarrow \frac{2\pi}{\sqrt{f'(\rho_1)}}$ , 还可证明  $T(p)$  关于  $p$  单调减少, 见附录 B, 对于 (3.8) 的四个独立解. 我们计算 Floquet 矩阵, 为此需要这四个解在  $x = 0$  和  $x = T(p)$  上的正确边界条件, 我们边界条件对这些参量微分, 方便记  $\rho$  为  $\rho(x, F, \omega)$ , 从 (3.9), (3.10) 有

$$Y_1(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = Y_1(T(p)),$$

$$Y_2(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ B \\ \omega \\ p \\ 0 \end{bmatrix} = Y_2(T(p)),$$

其中  $B = \rho_{xz}(0) > 0$ ,  $p \in (\rho_0, \rho_1)$ ,  $Y_3, Y_4$  的边界条件易从 (3.9), (3.10) 得到, 特别有

$$\rho(0, p, \omega) = \rho(T(p), p, \omega) = p.$$

因此

$$\rho_p(0, p, \omega) = 1,$$

$$\rho_x(T(p), p, \omega)T'(p) + \rho_p(T(p), p, \omega) = 1.$$

无论如何, 由 (3.10) 知, 上式左端第一项为零, 因此  $\rho_p(T(p), p, \omega) = 1$ .

从 (3.10) 得  $\rho_x(0, p, \omega) = 0 = \rho_x(T(p), p, \omega)$ . 因此

$$\rho_{px}(0, p, \omega) = 0,$$

$$0 = \frac{d}{dp} \rho_x(T(p), p, \omega) \rho_{xz}T(p), p, \omega) T'(p) + \rho_{px}(T(p), p, \omega).$$

因此有

$$Y_3(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{2\omega}{p^2} \end{bmatrix}, Y_3(T(p)) = \begin{bmatrix} 1 \\ -BT'(p) \\ PR(T(p), p) \\ -\frac{2\omega}{p^2} \end{bmatrix}.$$

现计算  $Y_4$  边界条件, (3.9), (3.10) 对  $\omega$  微分,  $\rho_\omega, \rho_{\omega x} = 0$ ;  $x = 0, T(p)$ , 故有

$$Y_4(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{p} \end{bmatrix}, \quad Y_4(T(p)) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho S(T(p)) \\ \frac{1}{p} \end{bmatrix}.$$

再考虑(3.8)的基本矩阵解在  $\lambda = 0$  上:

$$\Psi(x) = [y_1(x), y_2(x), y_3(x), y_4(x)].$$

Floquet 矩阵  $\Phi(x, 0)$ , 有  $\Phi(x, 0) = \Psi(x)\Psi(0)^{-1}$ .

简单计算表明

$$\Psi(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \\ p & \frac{\omega}{p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2\omega}{p^2} & \frac{1}{p} \end{bmatrix},$$

$$\Psi(0)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\omega}{(p^2 B)} & p^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\omega}{p} & 0 & & p \end{bmatrix}.$$

因此

$$\Phi(T(p), 0) = \Psi(T(p))\Psi(0)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -BT'(p) & 1 & 0 & 0 \\ \rho R + 2\omega S & 0 & 1 & p^2 S \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

其中  $R, S$  在  $T(p)$  上取值, 虽然  $\Phi(T(p), 0)$  只有简单特征值  $\gamma = 1$  是代数重数为 4, 因  $T'(p) < 0$  下面的, 推出  $\gamma = 1$  的几何重数至多为 3, 除非  $S = 0$  在  $T(p)$  上, 此时重数为 2, 由此可知, 对任何  $\lambda = 0$  不是  $\Phi(T(p), 0)$  的  $\gamma$  特征值,  $\forall \gamma \in S_*^1, p \in (\rho_0, \rho_1]$ , 这就完成了定理 3.2(1) 的证明.

现在计算  $\gamma$  特征值指标  $c_1(\varepsilon(k, \gamma, \rho_1))$  在常数解  $\rho = \rho_1$  上这对应于 GL 方程(3.2) 的周期解  $u(x), u(x) = \rho_1 e^{ikx}$ , 其中波数  $k$  满足  $k^2 + \rho_1^2 = 1, k = \frac{\omega}{\rho_1^2}$ , 此时线性化方程(3.8) 的矩阵  $A(x, \lambda)$  具有常数系数.

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda + 2(1 - k^2) & 0 & 0 & 2k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2k & \lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

简单计算可得这个矩阵的特征值满足的特征方程为

$$\sigma^4 - 2(3 - (3k^2 - 1))\sigma^2 + \lambda(\lambda + 2(1 - k^2)) = 0.$$

因此

$$\sigma^2 = \lambda - H \pm \sqrt{(\lambda - H)^2 - \lambda(\lambda + 2(1 - k^2))}, \quad (3.11)$$

其中  $H = 3k^2 - 1$ . 因  $f(p) = \frac{\omega^2}{\rho^3} + p - \rho^3$ , 则  $f'(\rho_1) = 2H$ , 因此  $\frac{1}{\sqrt{3}} < k \leq 1, H > 0$ ; 这是因为  $\rho_1$  为  $f(\rho)$  两个正根较小的一个, 令  $T_0 = T(\rho_1)$  为极限周期 ( $p \rightarrow \rho_1$ ), 可由以下方法得到. 对方程

$$\frac{4\pi^2}{T^2} r'' + f(\rho_1 + r) = 0.$$

由分支理论可构造小振幅周期, 其中  $r = r(y), 0 \leq y \leq 2\pi$ .

分支的线性化准则可得方程  $\frac{4\pi^2}{r^2} r'' + f'(\rho_1)r = 0$ , 具有  $2\pi$  周期解, 产生于参数值

$$T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{f'(\rho_1)}} = \frac{2\pi}{\sqrt{2H}}. \quad (3.12)$$

$L$  的  $\gamma$  的特征值  $\lambda$  能在  $p = \rho_1$  处显式计算.

注意到  $\lambda$  为这个算子的  $\gamma$  特征值, 当矩阵  $A(\lambda)$  具有纯虚特征值  $\sigma$  (因 Floquet 矩阵  $\Phi(T_0, \lambda) = \exp(A(\lambda)T_0)$ ), 对此  $\lambda$  值  $\sigma^2$  是非正的, 如图 4.1 所示. 从图 4.1 中可看到, 具有分支点  $\lambda = \lambda_0 =$

$\frac{H^2}{2(H + (1 - k^2))}$ , 对  $\lambda \in [0, \lambda_0)$ , 具有两个非正  $\sigma^2$ . 从(3.11)可设  $-2H \leq \sigma^2 \leq 0$ , 对于  $\lambda \in [0, \lambda_0]$ , 令  $-\sigma^2(\lambda)$  表示对应  $\sigma^2$  的两个值,  $\sigma$  取正实数, 对于  $\lambda \in [0, \lambda_0]$ ,  $L$  的  $\gamma$  特征值为

$$\gamma_1(\lambda) = e^{-I(\sigma, \lambda)it},$$

令

$$\gamma_2(\lambda) = e^{-I(\sigma, \lambda)it},$$

$$\gamma_3(\lambda) = e^{I_0(\sigma, \lambda)it},$$

$$\gamma_4(\lambda) = e^{T(\sigma, \lambda)it}.$$

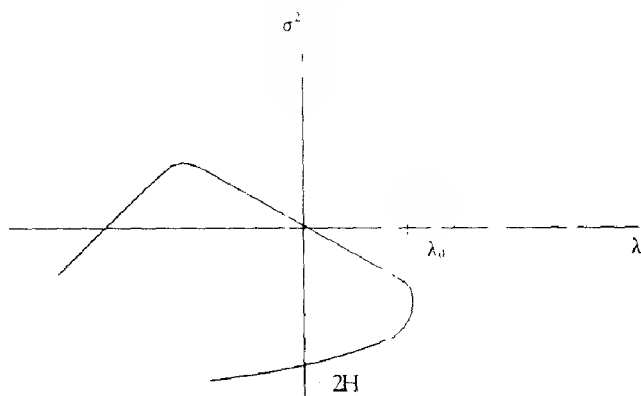


图 4.1

这四个函数在  $S^1$  上的像如图 4.2 所示, 特别  $\lambda = -1$  特征值,  $(\sigma^2 = -\frac{H}{2})$  简单计算表明,  $\sigma_1^2(\lambda_0) < \frac{H}{2}$ , 因此  $\gamma_1(\lambda_0)$  和  $\gamma_4(\lambda_0)$  位于第三象限, 从图 4.1 中可清楚看出, 对任何  $\gamma \in S^1_*$ , 存在  $\lambda \in (0, \lambda_0]$  二个值从图中可看到, 在  $\lambda = \lambda_1$  上, Floquet 矩阵  $\Phi(T_0, \lambda_1)$  具有其他三个不同特征值,  $\gamma_2(\lambda_1), \gamma_3(\lambda_1), \gamma_4(\lambda_1)$  分别在第三、第一、第四象限, 因此  $\gamma$  是 Floquet 矩阵的简单特征值, 类似可看到对 Floquet 矩阵  $\Phi(T, \lambda_2)$ ,  $\gamma$  也是一个简单特征值, 这就推出  $\gamma$  特征指标  $c_1(\varepsilon(k, \gamma, \rho_1)) = 2$ , 定理 3.2 的证明现已完成. 由此对于任何  $\gamma \in S^1_*$ , 存在在  $K$  中二个  $\gamma$  特征值.

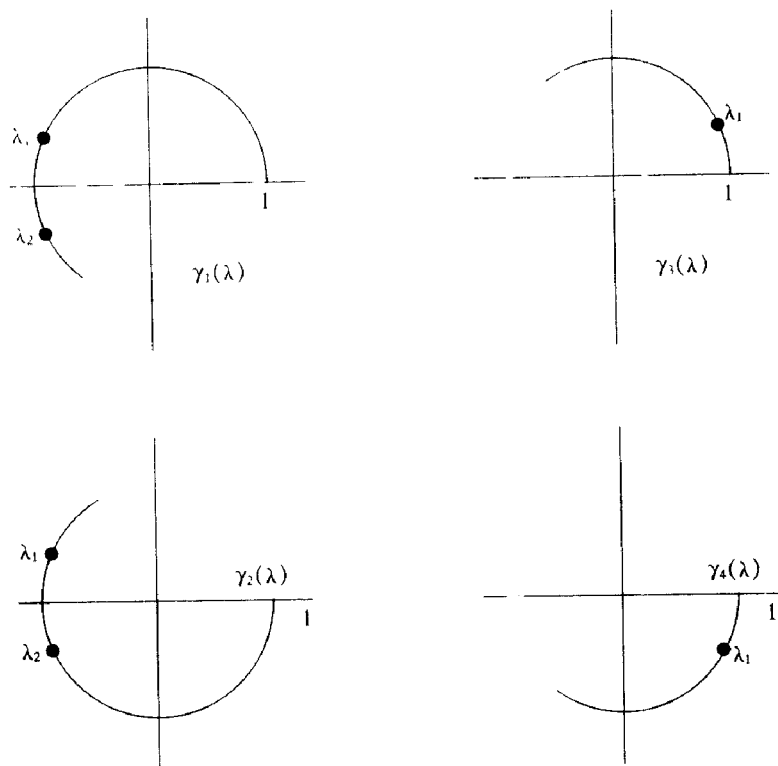


图 4.2

$\lambda_{\min}(\gamma) \leq \lambda_{\max}(\sigma)$ , 因  $\gamma$  特征值指数给出精确在闭曲线  $K$  内一切  $\gamma$  特征值的数目, 于是有

$$\lambda_0 = \inf\{\lambda_{\min}(\gamma) : \gamma \in S_*^I\},$$

$$\lambda_1 = \max\{\lambda_{\max}(\gamma) : \gamma \in S_*^I\}.$$

这就推出区间  $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1$  位于  $L$  的谱中.

#### 附录 A $\gamma$ 特征值指标

我们提供一个从  $\epsilon(K, \gamma)$  构造  $\gamma$  特征值和计算  $\gamma$  特征值指标的方法. 设  $L$  为二阶微分算子.

$$Lp = Dp'' + a(x)p' + b(x)p,$$

其中  $p \in C^n$ ,  $a(x), b(x)$  具有  $T$  周期矩阵,  $K \subset \mathbb{C}$  为简单闭曲线, 它和  $L$  的  $\gamma$  特征值  $|\gamma| = 1$  不连接. 考虑一阶方程组

$$Y' = A(x, \lambda)Y, \quad (\text{A.1})$$

其中  $Y = (p, g)^t \in C^{2n}$ , 且

$$A(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ D^{-1}(\lambda I - b(x)) & -D^{-1}a(x) \end{pmatrix}.$$

它等价于方程组  $Lp = \lambda p$ , 如  $\lambda$  为这个方程组的  $\gamma$  特征值, 则存在相应的解  $Y(x, \lambda)$  满足边界条件  $Y(T, \lambda) = \gamma Y(0, \lambda)$ , 为了给出边界条件的几何解释, 附加  $2n$  个变元  $W$ :

$$Y' = A(x, \lambda)Y, \quad (\text{A.2})$$

$$W' = 0. \quad (\text{A.3})$$

令

$$X_\gamma = \{( \gamma W, W) \in C^{4n}; W \in C^{2n}\}$$

为子空间, 显然,  $Y(x)$  是 (A.1) 满足边界条件  $Y(T) = \gamma Y(0)$  的一个解当且仅当  $Z(x) = (Y(x), W)$  为 (A.2), (A.3) 的一个解, 满足几何边界条件

$$Z(0) = X_1, Z(T) \in X_\gamma. \quad (\text{A.4})$$

$\gamma$  特征值丛构造如下: 令  $K_0 \subset K$ , 丛的基空间  $B: B = \{0\} \times K^0 \cup [0, T] \times K \cup \{T\} \times K^0$ . 因此  $B$  为 2 球. 其次, 定义  $\varepsilon(K, \gamma)$  的纤维, 令  $\gamma(x) \in S^1$ , 为连续曲线使得  $\gamma(0) = 1, \gamma(T) = \gamma$ , 令  $\mathcal{A}$  为平凡丛

$$\mathcal{A} = \bigcup_{(x, \lambda) \in B} {}^{4n}/X_{\gamma(x)} \cup {}^{4n}/X_{\gamma(x)}^*.$$

令  $e_i (1 \leq i \leq 2n)$  为  $\mathbb{R}^{2n}$  中的标准基,  $Z(x, \lambda)$  为 (A.3), (A.4) 的解满足初始条件

$$Z_i(0, \lambda) = (e_i, e_i). \quad (\text{A.5})$$

用  $Z_i$  形成截面

$$\chi_i(x, \lambda) = (Z_i(x, \lambda) + X_{\gamma(x)}, \frac{\Gamma - x}{T} Z_i(x, \lambda) + X_{\gamma(x)}^\perp).$$

注意到条件 (A.5) 构成半个边界条件 (A.4), 为  $\gamma$  特征函数所满足, 在  $x = 0$  上, 这些截面展成空间  $\{0\} \times {}^{4n}/X_1^\perp$ ; 在  $x = T$  上, 如  $\lambda$  不是  $L$  的  $\gamma$  特征值, 则它们展成空间  ${}^{4n}/X_\gamma \times \{0\}$ .

**定义 A.1**  $\gamma$  特征值丛  $\varepsilon(K, \gamma) = (E, B, \pi)$ , 其中  $\pi: B \rightarrow B$

为投影映照, 定义为

$$\pi^{-1}(x, \lambda) = \begin{cases} \{0\} \times L^{4n}/X_1 & (x = 0, \lambda \in K^0), \\ \text{Span} \chi_i(x, \lambda) & (0 \leq x \leq T, \lambda \in K), \\ L^{4n}/X_\gamma \times \{\bar{0}\} & (x = T, x \in K^0). \end{cases}$$

$\gamma$  特征数值指标定义为在丛  $\epsilon(K, \gamma)$  上的第一阵数  $C_1(\epsilon(K, \gamma))$ . 已经被证明, 这个数不变是等于在  $K$  中  $L$  的  $\gamma$  特征值的数目, 这两者之联系是通过某解析函数  $D(\lambda, r)$  (该函数被称为 Evans 函数) 来进行的, Evans 函数的根精确等于  $L$  的  $\gamma$  特征值.

### 附录 B $T(p)$ 的单调性

方程(3.3)是可积的, 具有积分  $k = (\rho')^2 + \rho + \frac{1}{2}\rho^4 + \frac{\omega^2}{\rho^2}$ , 初始条件  $p$  为多项式

$$F_{k,w}(\rho) = \frac{1}{2}\rho^6 - \rho^4 + k\rho^2 - \omega^2 \quad (\text{B.1})$$

的零点,  $F_{k,w}$  具有三个零点  $P > 0$ ;  $P_1(k, w) = p \leq P_2(k, w) \leq P_3(k, w)$ ,  $P_2$  对应于  $p'$  的第二个零点,  $\rho$  为(3.3)方程具初值  $\rho(0, p) = p, p'(0, p) = 0$  的周期解;  $P_3 > \rho_2$ , 现证

$$\frac{\partial}{\partial k} T(p) = \frac{\partial}{\partial k} T(p(k), w) > 0. \quad (\text{B.2})$$

因此, 因  $p$  为  $k$  的单调减少函数,  $T$  为  $P$  的单调函数(固定  $w$ ) 可证:

$$T(k, w) = \frac{\pi\sqrt{2}}{\mathcal{M}(\sqrt{p_3^2 - p_2^2}, \sqrt{p_3^2 - p_1^2})}.$$

其中  $\mathcal{M}(a, b)$  为  $a, b$  的代数几何平均, 定义为:  $0 < a = a_0 \leq b = b_0$ .

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n), \mathcal{M}(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

因而(B.2) 是对的, 如果

$$\begin{aligned} M(k + \delta) &= \mathcal{M}(\sqrt{P_3^2(k + \delta) - P_2^2(k + \delta)}, \sqrt{P_3^2(k + \delta) - P_1^2(k_1 + \delta)}) \\ &< \mathcal{M}(\sqrt{P_3^2(k) - P_2^2(k)}, \sqrt{P_3^2(k) - P_1^2(k)}) \\ &= \mathcal{M}(k) \quad \forall \delta > 0, w \text{ 固定}. \end{aligned}$$



展开  $P_i(k + \delta)$  为  $p_i(k) + r_i\delta + O(\delta^2)$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  
 $0 < \delta \ll 1$ .  $r_i$  能由 (B.1) 决定, 因此常数  $a_0, a_1, b_0, b_1$  能被找到使得

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(k + \delta) &= \mathcal{M}(a_0 + a_1\delta + O(\delta^2), b_0 + b_1\delta + O(\delta^2)) \\ &= \mathcal{M}(\sqrt{a_0 b_0} + s_1\delta + O(\delta^2), \\ &\quad \frac{1}{2}(a_0 + b_0) + s_2\delta + O(\delta^2)), \\ s_1 &= \frac{a_1 b_0 + a_0 b_1}{2\sqrt{a_0 b_0}}, s_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1).\end{aligned}$$

推出  $s_j < 0$  ( $j = 1, 2$ ), 因而  $\mathcal{M}(k + \delta) < \mathcal{M}(k)$ .

#### § 4 广义 Ginzburg-Landau 方程平面波的非线性稳定性

考虑如下的 Ginzburg-Landau 方程

$$\begin{aligned}w_t &= \alpha_1 w_{xx} + (\lambda(w) + i\omega(|w|))w \\ &\quad + \alpha_3 |w|^2 w_x + \alpha_4 w^2 w_x^*,\end{aligned}\quad (4.1)$$

其中  $w \in \mathbb{C}$ ,  $(x, t) \in R \times R^+$ ,  $\alpha_j = a_j + ib_j \in \mathbb{C}$ , 且

$$\lambda(r) = c_1 + c_2 r^2 + c_3 r^4,$$

$$w(r) = d_1 r^2 + d_2 r^4.$$

因此  $c_j, d_j \in R$ , 设 GL 方程的平面波解为

$$w_p(x, \rho_1) = r_0 e^{-i(\theta_0 x + \sigma_0 t)},$$

其中

$$\lambda(r_0) = \theta_0^2 - (b_3 - b_4)r_0^3\theta_0,$$

$$\omega(r_0) = (a_3 - a_4)r_0^2\theta_0 + \sigma_0.$$

若作变换  $w \rightarrow we^{i\sigma_0 t}$ , 即可设  $\sigma_0 = 0$ .

**定义 4.1** 平面波称为是谱稳定的, 如果曲线  $\text{Re} \gamma = -C(\text{Im} \gamma)^2$ , ( $C > 0$ ) 所界的复平面的谱是有界的.

令  $w(x, t) = r(x, t)e^{i\theta(x, t)}$ , 方程 (4.1) 变为

$$\begin{aligned}r_t &= r_{xx} + r\lambda(r) - r\theta_x^2 + A_+ r^2 r_x + B_- r^3 \theta_x, \\ \theta_t &= \theta_{xx} - \omega(r) + 2 \frac{r_x}{r} \theta_x - B_+ r r_x + A_- r^2 \theta_x,\end{aligned}\quad (4.2)$$

其中  $A_{\pm} = a_3 \pm a_4, B_{\pm} = b_3 \pm b_4$ .

在此坐标系下,平面波解对应于  $r = r_0, \theta = \theta_0 x$ .

为了研究平面波的稳定性,引入以下参数:

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= 4\theta_0^2 - 4b_3 r_0^2 \theta_0 + (B_- B_- - a_4^2) \gamma_0^4, \\ \Gamma_2 &= 2r_0 \theta_0 \omega'(r_0) + a_4 \Gamma_3 \gamma_0^2 + 2A_- B_- \gamma_0^4 \theta_0 \\ &\quad - 4A_- \gamma_0^2 \theta_0^2 - B_- \gamma_0^3 \omega'(r_0), \\ \Gamma_3 &= \gamma_0 \lambda'(r_0) + 2B_- \gamma_0^2 \theta_0.\end{aligned}$$

假设 A, 设这些参数  $\Gamma_i$  满足条件

$$(a) \quad \Gamma_3 < 0,$$

$$(b) \quad \Gamma_1 + \Gamma_3 + \left(\frac{\Gamma_2}{\Gamma_3}\right)^2 < 0.$$

当  $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$  时,上述条件简化为

$$(a) \quad \lambda'(r_0) < 0,$$

$$(b) \quad \gamma_0 \lambda'(r_0) + 4\theta_0^2 \left[1 + \frac{\omega'(r_0)}{\lambda'(r_0)}\right] < 0.$$

引入波的扰动

$$r = r_0 + \rho, \theta = \theta_0 x + \phi. \quad (4.3)$$

我们这一节要证明如下定理

**定理 4.2** 设  $u = (\rho, \phi)$ , 令  $\mu = \left(2^{\frac{3}{4}} + \max\left(1, \left(\frac{2}{|\Gamma_3|}\right)^{\frac{3}{4}}\right)\right) / |\Gamma_3|$ .

设  $(s)\mu + r_0(B_- r_0^2 - 2\theta_0) < 1$ , 则当  $E_0 = \|u_0\|_{H^3} + \|u_0\|_{L^1}$  充分小时,平面波是稳定的,且其扰动满足估计:

$$(a) \quad \|\rho(t)\|_{H^3} \leq c(1+t)^{-\frac{3}{4}} E_0,$$

$$(b) \quad \|\phi_t(t)\|_{H^2} \leq c(1+t)^{-\frac{3}{4}} E_0,$$

$$(c) \quad \|\phi(t)\|_{H^2} \leq c(1+t)^{\frac{1}{4}} E_0.$$

**推论 4.3** 在定理 4.1 假设下,平面波的扰动满足估计:

$$(a) \|\partial_x^i \rho(t)\|_{L^\infty} \leq c(1+t)^{-\frac{3}{4}} E_0, \quad i = 0, 1, 2;$$

$$(b) \|\varphi(t)\|_{L^\infty} \leq c(1+t)^{-\frac{1}{4}} E_0, \quad i = 0, 1, 2,$$

**推论 4.4** 在推论 4.3 假设下,有估计:

$$(c) \|\partial_x^i \varphi(t)\|_{L^\infty} \leq c(1+t)^{-\frac{3}{4}} E_0, \quad i = 1, 2.$$

为了证明以上定理,需要证明某些引理.

将(4.3)代入(4.2)可得发展方程

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix}_t = L \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} + H(\rho, \rho_x, \varphi_x), \quad (4.4)$$

其中线性算子  $L$  为

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{bmatrix},$$

$$L_1 = \partial_x^2 + A^+ r_0^2 \partial_x + r_0(\lambda'(r_0) + 2B_- \gamma_0 \theta_0),$$

$$L_2 = \gamma_0(B_- r_0^2 - 2\theta_0) \partial_x,$$

$$L_3 = \left( \frac{2\theta_0}{r_0} - B_+ r_0 \right) \partial_x + (2A_- \gamma_0 \theta_0 - \omega'(\gamma_0)),$$

$$L_4 = \partial_x^2 + A_- r_0^2 \partial_x.$$

高阶项满足  $|H(u)| = O(|u|^2), |u| \rightarrow 0$ .

线性算子  $L$  能写成  $L = I_2 \partial_x^2 + N \partial_x + M$ , 其中  $I_2$  为  $2 \times 2$  恒等矩阵,  $M, N$  为

$$N = \begin{bmatrix} A^+ r_0^2 & B_- r_0^3 - 2r_0 \theta_0 \\ 2\theta_0/r_0 - B_+ r_0 & A_- r_0^2 \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} r_0 \lambda'(r_0) + 2B_- r_0^2 \theta_0 & 0 \\ 2A_- r_0 \theta_0 - \omega'(\gamma_0) & 0 \end{bmatrix}.$$

从文献[27]可知,  $L$  的谱在任何  $L^p$  空间中 ( $1 \leq p \leq \infty$ ) 是界于此曲线

$$C_s = \{\gamma : 1 - k^2 I_2 + i N k + (M - \gamma I_2) = 0, k \in R\}.$$

**引理 4.5** 设假设 A 成立, 则平面波是谱稳定的,

**证** 通过计算可知对  $\gamma \in C_s$ ,

$$\gamma(k) = -k^2 + \frac{\Gamma_3}{2} + ia_3 r_0^2 k + \left( \left( \frac{\Gamma_3}{2} \right)^2 + \Gamma_1 k^2 + i\Gamma_2 k \right)^{\frac{1}{2}},$$

由此得

$$k_0 \gamma(k) = -k^2 + \frac{\Gamma_3}{2} + \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} (\Lambda + \Omega)^{\frac{1}{2}},$$

其中

$$\Lambda = \left( \frac{\Gamma_3}{2} \right)^2 + \Gamma_1 k^2.$$

注意到因  $\Gamma_3 < 0$ , 则  $\operatorname{Re} \gamma(0) = 0$ , 且

$$\left[ \frac{d}{dk} \operatorname{Re} \gamma \right]_{k=0} = -1 + \frac{1}{(\Gamma_3)} \left( \Gamma_1 + \left( \frac{\Gamma_2}{\Gamma_3} \right)^2 \right),$$

故

$\frac{d}{dk} (\operatorname{Re} \gamma) < 0$  (假设 1 成立) 因

$$\left[ \frac{d}{dk} \gamma \right]_{k=0} = i \left( a_3 r_0^2 + \frac{\Gamma_2}{|\Gamma_3|} \right).$$

因此平面波对小的  $k$  是谱稳定的.

由文献[27]可知, 算子  $L$  当  $|\gamma| \rightarrow \infty$  时为谱稳定, 于是余下来是证明对一切  $k$ ,  $\operatorname{Re} \gamma(k) < 0$ , 这等价于证明

$$\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} (\Lambda + \Omega)^{\frac{1}{2}} < k^2 - \frac{\Gamma_3}{2}.$$

因  $\Gamma_3 < 0$ , 以上等式两端平方可得

$$\Omega < 2k^4 - (2\Gamma_3 + \Gamma_1)k^2 + \left( \frac{\Gamma_3}{2} \right)^2.$$

由假设 A 可知上式右端为正, 再平方之, 由简单计算, 可知条件  $\operatorname{Re} \gamma(k) < 0$  包含在引理假设中.

由于  $L$  为 Laplace 算子的低阶振动, 因此  $L$  形成解析半群, 现

已知平面波为谱稳定,我们能对半群进行估计,因矩阵  $M$  和  $N$  为常系数,故可进行  $F$  氏变换.

**引理 4.6** 由  $L$  形成的半群  $S(t)$  满足估计

$$\begin{aligned} (a) \quad & \| \partial_x^k S(t) u \|_{L^2} \leq e(1+t)^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+k)} \| u \|_{L^1} \\ & + C e^{-\beta t} \| \partial_x^k u \|_{L^2}, \\ (b) \quad & \| \partial_x^k S(t) u \|_{L^2} \leq e(1+t)^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+k)} \| u \|_{L^1} + C t^{-\frac{1}{2}} e^{-\beta t} \\ & \cdot \| \partial_x^{k-1} u \|_{L^2}, \end{aligned}$$

对某  $\beta > 0$ .

**证** 此证明是标准的,(a)从略,证明(b),考虑线性方程

$$\begin{cases} v_t = L v, \\ v(0) = v_0. \end{cases} \quad (4.5)$$

它的解为  $v(t) = S(t)v_0$ ,以  $p(\xi)$  表示  $L$  的符号,故对(4.5)的解有

$$\partial_x^k v(\xi t) = (i\xi)^k e^{ip(\xi)t} \hat{v}_0(\xi), \quad k = 0, 1, \dots.$$

因  $L$  是谱稳定的,故存在常数  $C, \beta > 0$ ,使得  $|e^{ip(\xi)t}| \leq C e^{-\beta \xi^2 t}$ .

先设  $k = 1$ ,有  $|\partial_x \hat{v}(\xi, t)| \leq C \xi^2 e^{-\beta \xi^2 t}$ . 由两端平方积分得

$$\begin{aligned} \| \partial_x \hat{v}(k) \|_{L^2}^2 & \leq C \int_{|\xi| \leq 1} \xi^2 e^{-2\beta \xi^2 t} | \hat{v}_0(\xi) |^2 d\xi \\ & + C \int_{|\xi| > 1} \xi^2 e^{-2\beta \xi^2 t} | \hat{v}_0(\xi) |^2 d\xi, \end{aligned} \quad (4.6)$$

因  $\| \partial_x^k v \|_{L^2} = \| \partial_x^k v \|_{L^2}, k \geq 0$ , 和  $\| \hat{v} \|_{L^\infty} \leq \| v \|_{L^1}$  中的第一项可估计为

$$\begin{aligned} \int_{|\xi| \leq 1} \xi^2 e^{-2\beta \xi^2 t} | \hat{v}_0(\xi) |^2 d\xi & \leq \| \hat{v}_0 \|_{L^\infty}^2 \int_{|\xi| \leq 1} \xi^2 e^{-2\beta \xi^2 t} d\xi \\ & \leq C \| v_0 \|_{L^1}^2 (1+t)^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

为估计第二项,注意到  $|y| e^{-2\beta y} \leq C e^{-2\alpha y}, 0 < \alpha < \beta$ , 因此

$$\begin{aligned}
\int_{|\xi|>1} \xi^2 \cdot e^{-2a\xi^2 t} |\hat{v}_0(\xi)|^2 d\xi &= t^{-1} \int_{|\xi|>1} (\xi^2 t) e^{-2a\xi^2 t} |\hat{v}_0(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq ct^{-1} \int_{|\xi|>1} e^{-2a\xi^2 t} |\hat{v}_0(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq ct^{-1} e^{-2at} \int_{|\xi|>1} |\hat{v}_0(\xi)| d\xi \\
&\leq ct^{-1} e^{-2at} \|\hat{v}_0\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

注意到  $a^2 + b^2 \leq (a+b)^2$ ,  $a, b > 0$ , (4.6) 两端开方, 得到  $k = 1$  的结果, 对于  $k > 1$  的证明是类似的.

现证明主要定理 4.2, 令线性算子  $L_1$  为

$$L_1 = \partial_x^2 + A_+ r_0^2 \partial_x + \Gamma_3.$$

用 F 氏变换易证  $L_1$  生成半群  $S_1(t)$ , 且对  $k \geq 0$  满足

$$\|\partial_x^k S_1(t)\|_{L^2} \leq e^{\Gamma_3 t} \|\partial_x^k u\|_{L^2}. \quad (4.7)$$

因  $\Gamma_3 < 0$ , 令  $H = (H_1, H_2)$ , 使得

$$\rho_t = L_1 \rho + r_0(B - r_0^2 - 2\theta_0)\phi_r + H_1(\rho, \rho_x, \phi_x). \quad (4.8)$$

令  $u = (\rho, \phi)$ , 考虑积分方程

$$\begin{cases} \rho(t) = S_1(t)\rho_0 + r_0(B - r_0^2 - 2\theta_0) \int_0^t S_1(t-\tau) \partial_x u_2(\tau) d\tau \\ \quad + \int_0^t S_1(t-\tau) H_1(\rho(\tau), u_x(\tau)) d\tau, \end{cases} \quad (4.9)$$

$$u_x(t) = \partial_x S(t)u_0 + \int_0^t \partial_x S(t-\tau) H(\phi(\tau), u_x(\tau)) d\tau.$$

显然, 如果  $(\rho, \phi)$  为 (4.9) 的解, 则它也是原来问题 (4.4) 的解, 更简化些, 令  $v = u_x$ , 注意到  $\partial_x S(t) = S(t)\partial_x$ , 由 (4.9) 得

$$\begin{cases} \rho(t) = S_1(t)\rho_0 + r_0(B - r_0^2 - 2\theta_0) \int_0^t S_1(t-\tau) v_2(\tau) d\tau \\ \quad + \int_0^t S_1(t-\tau) H_1(\rho(\tau), u_x(\tau)) d\tau, \end{cases} \quad (4.10)$$

$$v(t) = S(t)v_0 + \int_0^t \partial_x S(t-\tau) H(\phi(\tau), v(\tau)) d\tau.$$

以下引理证明 (4.10) 至少具有局部解

**引理 4.7** 设  $(\rho_0, v_0) \in H^2$ , 则存在  $T > 0$  使得

$$\rho(t), v(t) \in H^2, t \in [0, T).$$

**证** 由引理 4.6 知  $S(t)$  满足估计

$$\| \partial_x^k S(t) u \|_{H^2} \leq C t^{-\frac{k}{2}} \| u \|_{H^2}, k = 0, 1,$$

注意  $t^{-\frac{1}{2}}$  当  $x \rightarrow 0$  时可积, 由 (4.7) 知

$$\| S(t) u \|_{H^2} \leq e^{\Gamma_3 t} \| u \|_{H^2}.$$

由 Sobolev 嵌入定理知  $\| u^2 \|_{H^2} \leq c \| u \|_{H^2}^2$ , 高阶项  $H_1$  和  $H$  在  $H^2$  中连续, 存在性证明可由标准的应用半群理论得到.

现已知 (4.9) 的解至少在短时间内存在, 现作长时间形态分析, 令

$$v = (\rho, u_x), u = (\rho, \phi), \text{ 令}$$

$$E_0 = \| u_0 \|_{H^2} + \| u_0 \|_{L^4}.$$

以下引理将给出定理 4.2 的 (a), (b) 部分,

$$\| \rho \|_{H^2} \leq \| v \|_{H^2}, \| \phi_x \|_{H^2} \leq \| v \|_{H^2}.$$

**引理 4.8** 如  $E_0$  充分小, 则 (1.9) 的解满足估计

$$\| v(t) \|_{H^2} \leq c(1+t)^{\frac{3}{4}} E_0$$

**证** 首先注意到  $\| H_1(v) \|_{H^2} \leq C \| v \|_{H^2}^2$ ,  $\| H_1(v) \|_{L^4} \leq C \| v \|_{H^2}^2$ , 由引理 4.6 和方程 (4.9) 可得

$$\begin{aligned} \| \rho(t) \|_{H^2} &\leq e^{\Gamma_3 t} \| v_0 \|_{H^2} + \alpha \int_0^t \Gamma_3(t-\tau) \| \phi_x(\tau) \|_{H^2} d\tau \\ &\quad + \int_0^t e^{\Gamma_3(t-\tau)} \| v(\tau) \|_{H^2}^2 d\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \| u_x(t) \|_{H^2} &\leq C(1+t)^{\frac{3}{4}} E_0 + C \int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{3}{4}} \| v(\tau) \|_{H^2}^2 d\tau \\ &\quad + C \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} e^{-\beta(t-\tau)} \| v(\tau) \|_{H^2}^2 d\tau, \end{aligned}$$

其中

$$\alpha = 1/r_0(B - r_0^2 - 2\theta_0).$$

注意到  $\| \rho_0 \|_{H^2} \leq E_0$ ,  $\| \phi_x \|_{H^2} \leq \| v \|_{H^2}$ , 则有

$$\begin{aligned}\|v(t)\|_{H^2} &\leq CE_0(1+t)^{-\frac{3}{4}} + \alpha \int_0^t e^{T_3(t-\tau)} \|v(\tau)\|_{H^2} d\tau \\ &\quad + C \int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{3}{4}} \|v(\tau)\|_{H^2}^2 d\tau \\ &\quad + C \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} e^{-\beta(t-\tau)} \|v(\tau)\|_{H^2}^2 d\tau. \quad (4.11)\end{aligned}$$

令

$$M(t) = \sup_{0 \leq \tau \leq t} (1+\tau)^{-\frac{3}{4}} \|v(\tau)\|_{H^2},$$

由  $M(t)$  的定义, (4.11) 可写为

$$\begin{aligned}\|v(t)\|_{H^2} &\leq CE_0(1+t)^{-\frac{3}{4}} + 2M(t) \int_0^t T_3(t-\tau)(1+\tau)^{-\frac{3}{4}} d\tau \\ &\quad + CM^2(t) \int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{3}{4}} (1+\tau)^{-\frac{3}{2}} d\tau \\ &\quad + CM^2(t) \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} e^{-\beta(t-\tau)} (1+\tau)^{-\frac{3}{2}} d\tau, \quad (4.12)\end{aligned}$$

$T_3 < 0$ , 先从  $(0, \frac{t}{2})$ , 再从  $(\frac{t}{2}, t)$  积分, 可知

$$\int_0^t e^{T_3(t-\tau)} (1+\tau)^{-\frac{3}{4}} d\tau \leq \mu(1+t)^{-\frac{3}{4}},$$

其中

$$\mu = \left( \tau^{\frac{3}{4}} + \max \left\{ 1, \left( \frac{2}{|\Gamma_3|} \right)^{\frac{3}{4}} \right\} \right) / |\Gamma_3|.$$

类似有

$$\begin{aligned}\int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{3}{4}} (1+\tau)^{-\frac{3}{2}} d\tau &\leq C(1+t)^{-\frac{3}{4}}, \\ \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} e^{-\beta(t-\tau)} (1+\tau)^{-\frac{3}{2}} d\tau &\leq C(1+t)^{-\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

此时(4.12) 可写为

$$\begin{aligned}\|v(t)\|_{H^2} &\leq CE_0(1+t)^{-\frac{3}{4}} + \alpha\mu M(t)(1+t)^{-\frac{3}{4}} \\ &\quad + CM^2(t)(1+t)^{-\frac{3}{4}}. \quad (4.13)\end{aligned}$$

因  $M(t)$  为  $t$  的减函数, 有  $M(t) \leq CE_0 + \alpha\mu M(t) + CM^2(t)$ , 由条件(s) 有  $\alpha\mu < 1$ , 因此如  $E_0$  充分小, 则  $M(t) \leq CE_0$ .

由上述引理还可得出定理的第三部分(c) 由(4.4) 有



$$\phi_t = L_3\phi + L_4\rho + H_2(v),$$

具有解

$$\begin{aligned}\phi(t) &= S_3(t)\phi_0 + \int_0^t S_3(t-\tau)L_4\rho(\tau)d\tau \\ &\quad + \int_0^t S_3(t-\tau) \cdot H(v(\tau))d\tau,\end{aligned}$$

其中  $S_3(t)$  为  $L_3$  所形成的半群.

用 F 氏变换可证  $S_3(t)$  满足引理 1.2 估计.

$$\|S_3(t)u\|_{H^2} \leq C\|u\|_{H^2},$$

$$\|L_4\rho\|_{H^2} \leq C\|\rho\|_{H^2} \leq C\|v\|_{H^2},$$

$$\|H_2(v)\|_{H^2} \leq C\|v\|_{H^2}^2, \|H_2(v)\|_{L^1} \leq C\|v\|_{H^2}^2.$$

因此,利用适当的半群估计可得

$$\begin{aligned}\|\phi(t)\|_{H^2} &\leq C(1+t)^{-\frac{1}{4}}E_0 + C\int_0^t \|v(\tau)\|_{H^2}d\tau \\ &\quad + C\int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{1}{4}}\|v(\tau)\|_{H^2}^2d\tau.\end{aligned}$$

由引理 4.8 推出

$$\begin{aligned}\|\phi(t)\|_{H^2} &\leq C(1+t)^{-\frac{1}{4}}E_0 + CE_0\int_0^t (1+\tau)^{-\frac{3}{4}}d\tau \\ &\quad + CE_0^2\int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{1}{4}}(1+\tau)^{-\frac{3}{2}}d\tau,\end{aligned}$$

因

$$\int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{1}{4}}(1+\tau)^{-\frac{3}{2}}d\tau \leq C(1+t)^{-\frac{1}{4}},$$

由此得

$$\begin{aligned}\|\phi(t)\|_{H^2} &\leq CE_0(1+t)^{-\frac{1}{4}} + CE_0(1+t)^{\frac{1}{4}} \\ &\leq CE_0(1+t)^{\frac{1}{4}}.\end{aligned}$$

## §5 广义 Ginzburg-Landau 方程的 有限维惯性形式

在 §1 中,我们考虑了如下方程

$$\begin{aligned} \partial_t u + vu_t &= \chi u + (\gamma_r + i\gamma_i)u_{xx} - (\beta_r + i\beta_i)|u|^2 u \\ &\quad - (\delta_r + i\delta_i)|u|^4 u - (\lambda_i + i\lambda_i)|u|^2 u_x \\ &\quad - (\mu_r + i\mu_i)u^2 \bar{u}_x, \quad x \in R^1, t > 0, \end{aligned} \quad (5.1)$$

在条件  $-4\gamma_r\delta_r > (\lambda_i - \mu_i)^2$  下,证明了方程(5.1)周期初值问题整体解的存在性、惟一性和整体吸引子的存在性. 现先来证明条件  $4\gamma_r\delta_r > (\lambda_i - \mu_i)^2$  是不可改进的. 如果  $4\gamma_r\delta_r \leq (\lambda_i - \mu_i)^2$ , 考虑空间周期解  $u = \text{Re}^{ikx}$  代入(5.1)或取实部解出  $R^2$ , 得

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{1}{2\delta_r} \left( -c(\beta_r - (\lambda_i - \mu_i)k) \pm \sqrt{(\beta_r - (\lambda_i - \mu_i)k)^2 - 4\delta_r\gamma_r k^2 + 4\delta_r\chi} \right) \\ &= \frac{k}{2\delta_r} \left( -\frac{\beta_r}{k} - (\lambda_i - \mu_i) \right) \pm \sqrt{\left( \frac{\beta_r}{k} - (\lambda_i - \mu_i) \right)^2 - 4\delta_r\gamma_r + \frac{4\delta_r\chi}{k^2}}, \end{aligned}$$

可见当  $k \rightarrow \pm \infty$  时,  $R^2 \rightarrow +\infty$ . 这说明解爆破. 因此  $4\gamma_r\delta_r > (\lambda_i - \mu_i)^2$  是不可改进的.

因为(5.1)的解半群  $S(t)$  具有有限维吸引子, 为了有效地考虑解的长时间行为, 我们期望用一个有限维常微分方程组来描述吸引子, 为此必须考虑惯性流形, 但惯性流形存在的一个很重要条件是谱裂口条件:  $\lambda_{m+1} - \lambda_m \geq M_0^2 \frac{1+l}{l} (\lambda_{m+1}^\alpha + \lambda_m^\alpha)$ , 这里  $\{\lambda_m\}_{m=1}^\infty$  是算子  $-\gamma_r \partial_{xx}$  具周期条件的一组特征值  $\lambda_m = \gamma_r \left( \frac{2\pi m}{L} \right)^2$ ,  $L$  是空间周期长度,  $l \leq \frac{1}{8}$  所定,  $M_0 > 0$  是估计得到的一个常数, 这里, 因(5.1)式中有非线性导数项, 故此时  $\alpha = \frac{1}{2}$ . 如谱裂口条件满足, 即

$$\gamma_r \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 (2m+1) > M_0^2 \frac{1+l}{l} \cdot \frac{2\pi}{l} \cdot \gamma_r^{\frac{1}{2}} (2m+1),$$

即

$$\frac{1+l}{l} \gamma_r^{\left(\frac{1}{2}\right)} L < \frac{2\pi}{M_0^2}.$$

从上式可以看出, 当  $L$  适当小或  $\gamma_r$  充分大时, 谱裂口条件才能满足, 此时可得到(5.1)式惯性流形的存在性.

我们这里设法改进上述结果,考虑(5.1)的一个适当简化形式:

$$\partial_t u = \chi u + \gamma u_{xx} - (\beta_r + i\beta_i) |u|^2 u - (\delta_r + i\delta_i) |u|^4 u - (\lambda_r + i\lambda_i) (|u|^2 u)_x, \quad x \in R^1, t > 0, \quad (5.2)$$

其中  $\gamma > 0, \delta_r, \delta_i > 0$ .

设  $A = -(\mu + \gamma \partial_{xx})$ , 对  $\gamma > 0$  和适当的  $\mu$ , 则周期边界条件的特征值问题,  $-(\mu + \gamma \partial_{xx})g = \lambda g$  没有零特征值, 所以  $A$  是一个线性自伴无界正算子, 故可定义  $A$  的幂次  $A^\alpha, \alpha \in [0, 1], V_{2\alpha} = D(A^\alpha)$  ( $A^\alpha$  的定义域), 记  $V_1 = D(A^{\frac{1}{2}}) = H_{\text{per}}^1[0, L], V_2 = D(A) = H_{\text{per}}^2[0, L], V_1, V_2$  的范数分别记为  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ .

由于(5.2)式是(5.1)式的特殊形式, 故  $\gamma, \delta_r > 0$ , 当  $4\delta_r \gamma > \lambda_i^2$  成立时, (5.2) 周期初值问题的整体解在  $V_1$  中存在惟一, 且在  $V_1$  中存在有限维的整体吸引子  $\mathcal{A}_{\text{GGL}}$ , 进而有

**命题 5.1** 如  $u \in \mathcal{A}_{\text{GGL}}$ , 则存在常数  $\rho_0, \rho_1, \rho_2 > 0$ , 有  $\|u_0\| \leq \frac{\rho_0}{2}, \|u\|_1 \leq \frac{\rho_1}{2}, \|u\|_2 \leq \frac{\rho_2}{2}$ , 即有  $\mathcal{A}_{\text{GGL}} \subset H_{\text{per}}^2[0, L]$ .

**证** 由 §4 已知, 如  $u \in \mathcal{A}_{\text{GGL}}$ , 则  $\|u_0\| \leq \frac{\rho_0}{2}, \|u\|_1 \leq \frac{\rho_1}{2}$ .

下面只要证  $\|u\|_2 \leq \frac{\rho_2}{2}$ . 由 §4 可知, 当  $t > 0$  时,  $u(t)$  是足够光滑的, 则(5.2)式与  $u_{xxx}$  作内积取实部得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_{xx}\|_0^2 + \gamma \|u_{xxx}\|_0^2 \\ &= \chi \|u_{xx}\|_0^2 - \operatorname{Re} \left( (\beta_r + i\beta_i) \int_0^L |u|^2 u \bar{u}_{xxx} dx \right) \\ & \quad - \operatorname{Re} \left( (\delta_r + i\delta_i) \int_0^L |u|^4 u \bar{u}_{xxx} dx \right) \\ & \quad - \operatorname{Re} \left( (\lambda_r + i\lambda_i) \int_0^L (|u|^2 u)_x \bar{u}_{xxx} dx \right). \end{aligned} \quad (5.3)$$

由于存在  $T > 0$ , 当  $t \geq T$  时, 有

$$\|u_0\| \leq \rho_0, \|u\|_1 \leq \rho_1.$$

在下面估计中, 我们用到了嵌入  $\|u\|_{L^\infty} \leq c \|u\|_1$  和 Gagliardo-Nirenberg 不等式, 估计式中出现的常数  $C$  表示仅依赖于方程(5.2) 的系数及  $\rho_0, \rho_1$  的正常数. 对  $t \geq T$  有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_{xx}\|_0^2 + \gamma \|u_{xxx}\|_0^2 &\leq \chi \|u_{xx}\|_0^2 \\ &+ \sqrt{\beta_r^2 + \beta_i^2} \left| \int_0^L (|u|^2 u)_{xx} \bar{u}_{xxx} dx \right| \\ &+ \sqrt{\delta_1^2 + \delta_i^2} \left| \int_0^L (|u|^4 u)_{xx} \bar{u}_{xxx} dx \right| \\ &+ \sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2} \left| \int_0^L (|u|^2 u)_{xx} \bar{u}_{xxx} dx \right|. \end{aligned} \quad (5.4)$$

显然, 我们只需处理最后一项即可:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^L (|u|^2 u)_{xx} \bar{u}_{xxx} dx \right| &\leq \frac{\gamma}{4} \|u_{xxx}\|_0^2 + \frac{1}{\gamma} \int_0^L (6|u|^2 |u_x|^2 \\ &+ 3(|u|^2 |u_{xx}|)) dx \leq \frac{\gamma}{4} \|u_{xxx}\|_0^2 \\ &+ C(\rho_0, \rho_1) \int_0^L |u_x|^4 dx + C(\rho_0, \rho_1) \|u_{xx}\|_0^2. \end{aligned}$$

对  $\int_0^L |u_x|^4 dx$  可利用 G-N 不等式估计, 于是(5.4) 变为

$$\frac{d}{dt} \|u_{xx}\|_0^2 \leq C + C \|u_{xx}\|_0^2.$$

由此可得  $\int_t^{t+1} \|u_{xx}(\cdot, \tau)\|_0^2 d\tau \leq C(\rho_0, \rho_1)$ , 对  $t \geq T$ , 利用一致 Gronwall 不等式得到

$$\|u_{xx}\|_0^2 \leq \rho^2, t \geq T,$$

其中  $\rho$  仅与方程中的系数  $\rho_0, \rho_1$  有关, 所以

$$\|u\|_2 \leq \frac{\rho_2}{2}, \quad u \in \mathcal{H}_{GL}.$$

命题 5.1 得证.

为了保持变换后的方程组的耗散性, 需要适当改变方程(5.2) 为

$$u_t = \gamma u_{xx} - (\lambda_r + i\lambda_i)(|u|^2 u)_x - \varphi_\rho \cdot g(u)$$

$$-(1-\varphi_\rho)\left(\delta_r + 9\gamma + 9\frac{\lambda_r^2 + \lambda_i^2}{\gamma}\right)|u|^4u, \quad (5.5)$$

这里

$$g(u) = (\beta_r + i\beta_i)|u|^2u + (\delta_r + i\delta_i)|u|^4u - \chi u,$$

$$\varphi_\rho = \varphi\left(\frac{|u|_0^2 + 2|u_x|_0^2 + |u|_{L^6}^6}{\rho^2}\right), \quad 0 < \rho \leq \infty,$$

其中  $\varphi(s): R^+ \rightarrow [0, 1]$  为光滑单调函数, 使得  $\varphi(s) = 1, 0 \leq s \leq 1, \varphi(s) = 0, s \geq 2, |\varphi'(s)| \leq 2$ . 如果  $\rho = \infty$ , 则  $\varphi_\rho = 1$ . (5.5) 式就是 (5.2) 式. 给定初值  $u_0 \in V_1$ , 有

**命题 5.2** 给定初值  $u_0 \in V_1$ , 设  $\gamma, \delta_r > 0, 4\delta_r\gamma > \lambda_i^2$ , 则 (5.5) 式存在惟一解  $u \in C([0, \infty); V_1) \cap L^2(0, T; V_2) \cap C([0, \infty); H_{\text{per}}^n)(n \geq 2 \text{ 任意})$ . 进一步还有, 存在常数  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$  (与  $u_0$  和  $\rho$  无关) 有

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} |u|_0 \leq r_0, \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} |u|_1 \leq r_1, \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} |u|_2 \leq r_2.$$

由此可见, 方程 (5.5) 存在整体吸引了  $\mathcal{A}_\rho$ , 且当  $\rho^2 \geq 4r^2 = 4(r_0^2 + 2r_1^2 + r_3^2)$  (这里  $r_3$  是  $|u|_{L^6}^3$  的界) 时,

$$\mathcal{A}_\rho = \mathcal{A}_{\text{GGL}}.$$

命题 5.2 的证明类似于 §4 中吸收集的存在性的证明, 从略.

由命题 5.2 引进下列函数变换

$$J(u) = (u, u_x, |u|^2u) = (u, v, w),$$

则  $u, v, w$  满足如下方程组

$$\begin{aligned} u_t &= \gamma u_{xx} - (\lambda_r + i\lambda_i)w_x + \eta_1, \\ v_t &= \gamma v_{xx} - (\lambda_r + i\lambda_i)w_{xx} + \eta_2, \\ w_t &= \gamma w_{xx} + \eta_3, \end{aligned} \quad (5.6)$$

这里

$$\eta_1 = -\varphi_\rho g(u) - (1 - \varphi_\rho)\left(9\gamma + \delta_r + 9\frac{\lambda_r^2 + \lambda_i^2}{\gamma}\right)|u|^4u,$$

$$\begin{aligned} \eta_2 &= -\varphi_\rho k(u, v) - (1 - \varphi_\rho)\left(9\gamma + \delta_r + 9\frac{\lambda_r^2 + \lambda_i^2}{\gamma}\right)(3|u|^4v \\ &\quad + 2|u|^2u^2\bar{v}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k(u, v) &= (\beta_r + i\beta_i)(2|u|^2 v + u^2 \bar{v}) \\
&\quad + (\delta_r + i\delta_i)(3|u|^4 v + 2|u|^2 u^2 \bar{v}), \\
\eta_3 &= -(4\gamma|v|^2 u^2 + 2\gamma v^2 \bar{u}) + 2|u|^2 \eta_1 + u^2 \bar{\eta}_1 \\
&\quad - 2(\lambda_r + i\lambda_i)(2|u|^4 v + |u|^2 u^2 \bar{v}) \\
&\quad - (\lambda_r - i\lambda_i)(2|u|^2 u^2 \bar{v} + |u|^4 v).
\end{aligned}$$

对方程组(5.6) 加上一些附加项如下(也是为了保持耗散性):

$$\begin{cases}
u_t = \gamma u_{xx} - (\lambda_r + i\lambda_i) w_x + \eta_1 + \xi_1, \\
v_t = \gamma v_{xx} - (\lambda_r + i\lambda_i) w_{xx} + \eta_2 - k_1(v - u_x) + \xi_2, \\
w_t = \gamma w_{xx} - (4\gamma|v|^2 u + 2\gamma v^2 \bar{u}) + 2|u|^2(\eta_1 + \xi_1) \\
\quad + u^2(\bar{\eta}_1 + \bar{\xi}_1), - (k_2 - 16(\lambda_r^2 + \lambda_i)) \left(1 + \frac{1}{\gamma}|u|^4\right) (w - f(u)),
\end{cases} \quad (5.7)$$

这里  $f(u) = |u|^2 u$ ;  $k_1, k_2$  为待定常数;  $\xi_1, \xi_2$  取为

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= -2\gamma|u|^2(w - f(u)) + \gamma u^2 \overline{(w - f(u))}, \\
\xi_2 &= 2\gamma \bar{u} v (w - f(u)) + 2\gamma u w \overline{(w - f(u))} + 2\gamma u \bar{v} (w - f(u)).
\end{aligned}$$

注意到如果  $v = u_x, w = f(u)$ , 则附加项消失, 设  $J(u) = (u, u_x, f(u))$ ,  $u \in V_1$ , 这些附加项将导致(5.7) 式的解指数收敛于  $J(u)$ .

至此, 我们已经看到, 如果  $u(t)$  是(5.5) 式具初值  $u_0 \in V_1$  的解, 则  $J(u(t))$  是(5.7) 的解, 由(5.7) 式解的惟一性, 反过来结论也对. (5.7) 式的解的存在惟一性将在下面给出, 因此, 方程(5.5) 的解和方程(5.7) 式的解在集合  $J(V_1)$  上具有相同的动力学, 有

**命题 5.3** 设  $u(t)$  是(5.5) 式具初值  $U_0 \in V_1$  的解, 则  $J(u(t))$  是(5.7) 式的解. 反之, 如果  $(u, v, w)$  是(5.7) 式具初值  $J(u_0)$ ,  $u_0 \in V_1$  的解, 则  $u(t)$  是(5.5) 式的解.

下面研究方程组(5.7) 解的存在、惟一性.

设  $U = (u, v, w)'$ , 定义  $D(A) \times D(A) \times D(A)$  上算子  $A$  为

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} Au + (\lambda_r + i\lambda_i)w \\ Av + ku_{,r} + (\lambda_r + i\lambda_i)w_{,r} \\ Aw \end{bmatrix}.$$

$A$  如前所定义, 同样定义  $\tilde{F} = (F_1, F_2, F_3)^t$ , 这里  $F_1 = \eta_1 + \xi_1 + \mu u$ ,  $F_2 = \eta_2 + \xi - k_1 v + \mu w$ ,  $F_3$  为 (5.7) 式第三个方程的右端加  $\mu w$ , 则 (5.7) 式可写成

$$\frac{d}{dt}U = -AU + \tilde{F}(U). \quad (5.8)$$

算子  $\mathcal{A}$  显然不是自伴的, 但可以证明  $\mathcal{A}$  是一扇形算子, 即  $-A$  在  $\mathcal{H} = H \times H \times H$  上生成一解析半群.

**引理 5.4** 算子  $\mathcal{A}$  是  $\mathcal{H}$  上的一扇形算子.

**证** 首先注意到  $A$  是  $H$  上的扇形算子, 所以存在  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  和  $M \geq 1$ , 使得

$$\begin{aligned} \rho(A) \supset \Sigma &= \{\lambda : \theta < |\arg \lambda| \leq \pi, \lambda \neq 0\}, \\ \|(\lambda - A)^{-1}\|_{0p} &\leq \frac{M}{|\lambda|}, \quad \lambda \in \Sigma. \end{aligned} \quad (5.9)$$

定义

$$(\lambda - \mathcal{A})U = F,$$

这里  $\lambda \in \Sigma$ ,  $\bar{F} = (f_1, f_2, f_3)^t \in \mathcal{H}$ , 则关于  $w$  的方程可写为

$$Aw - \lambda w = f_3. \quad (5.10)$$

由 (5.9) 式有

$$\|w\|_0 \leq \frac{M}{|\lambda|} \|f_3\|_0. \quad (5.11)$$

(5.10) 式与  $w$  作内积取实部, 并利用 (5.11) 式得

$$\begin{aligned} \|A^{\frac{1}{2}}w\|_0^2 &\leq |\lambda| \|w\|_0^2 + \|f_3\|_0 \|w\|_0 \\ &\leq \frac{M^2 + M}{|\lambda|} \|f_3\|_0^2. \end{aligned} \quad (5.12)$$

由 (5.10) 式, 有

$$\|w_{,r}\|_0 \leq (|\lambda| + |\mu|) \|w\|_0 + \|f_3\|_0. \quad (5.13)$$

关于  $u$  的方程为

$$Au + (\lambda_r + i\lambda_i)w_x - \lambda u = f_1.$$

由(5.9), (5.12) 式可得

$$\begin{aligned} \|u\|_0 &\leq \frac{M}{|\lambda|} (\|f_1\|_0 + \sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2} \|w_x\|_0) \\ &\leq \frac{M}{|\lambda|} \left( \|f_1\|_0 + \left( \frac{M^2 + M}{\|A\|} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2} \|f_3\|_0 \right) \\ &\leq \frac{M_1}{|\lambda|} (\|f_1\|_0 + \|f_3\|_0), \text{ 对某 } M_1 \geq 1. \end{aligned} \quad (5.14)$$

上面用到了  $\|u_x\|_0 \leq \|A^{\frac{1}{2}}u\|_0, u \in D(A^{\frac{1}{2}})$ . 同样有

$$\begin{aligned} \|A^{\frac{1}{2}}u\|_0^2 &\leq |\lambda| \|u\|_0^2 + \sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2} \|w_x\|_0 \|u\|_0 + \|f_1\|_0 \|u\|_0 \\ &\leq (|\lambda| + 1) \|u\|_0^2 + \frac{1}{2} (\lambda_r + \lambda_i^2) \|w_x\|_0^2 + \frac{1}{2} \|f_1\|_0^2. \end{aligned} \quad (5.15)$$

最后考虑关于  $v$  的方程. 由(5.9) 式得

$$\|v_0\| \leq \frac{M}{|\lambda|} (k_1 \|u_x\|_0 + \sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2} \|w_{xx}\|_0 + \|f_2\|_0).$$

由(5.12), (5.13) 和(5.15) 式, 得

$$\|v\|_0 \leq \frac{M_2}{|\lambda|} (\|f_1\|_0 + \|f_2\|_0 + \|f_3\|_0), \text{ 对某 } M_2 \geq 1. \quad (5.16)$$

由(5.11), (5.14) 和(5.16) 式, 得到对  $\lambda \in \Sigma, (\lambda - \lambda I)^{-1}$  存在且

有  $\|(-\lambda I + A)^{-1}\|_{0p} \leq \frac{M_3}{|\lambda|}$ , 对某  $M_3 \geq 1$ . 这就证明了  $A$  是  $\mathbb{H}$  上的一个扇形算子, 由此可知  $-A$  在  $\mathbb{H}$  上生成一解析半群. 由于  $-A$  是一扇形算子, 可以定义  $A$  的分数次幂, 且容易看出  $\tilde{F}: D(A^{\frac{1}{2}}) = V_1 \times V_1 \times V_1 \rightarrow \mathbb{H}$  是局部 Lip 连续. 因此, 如果  $U(0) = U_0 \in D(A^{\frac{1}{2}})$ , 则(5.7) 式存在惟一强解, 使得  $U(x, t) \in C([0, T]; D(A^{\frac{1}{2}})), 0 < T \leq \infty$ .

下面我们证明方程组(5.7) 具有整体吸引子  $\mathcal{A}$ . 事实上,  $\mathcal{A}$  是  $\mathcal{A}_\rho$  在嵌入  $J$  之下的像, 即

$$J(\mathcal{A}_\rho) = \mathcal{A}.$$



如果  $U$  是(5.7) 式的充分光滑解, 则  $u$  的方程为

$$u_t = \gamma u_{xx} - (\lambda_r + i\lambda_i)u_x + \eta_1 + \xi_1, \quad (5.17)$$

则(5.17) 式关于  $x$  求导得

$$(u_x)_t = \gamma u_{xxt} - (\lambda_r + i\lambda_i)u_{xx} + \eta_{1x} + \xi_{1x},$$

则从(5.17) 式中的  $v$  的方程减去上述方程得

$$(v - u_x)_t = \gamma(v - u_x)_{xx} + \eta_2 - \eta_{1x} + \xi_2 - \xi_{1x} - k(v - u_x). \quad (5.18)$$

设  $\bar{w} = f(|u|^2)u$ , 容易验证  $\bar{w}$  满足

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{w} &= \gamma \bar{w}_{xx} - (4\gamma - u_x |u|^2 u + 2\gamma u_x^2 \bar{u}) \\ &\quad + 2|u|^2(\eta_1 + \xi_1) + u^2(\bar{\eta}_1 + \bar{\xi}_1) \\ &\quad - 2|u|^2(\lambda_r + i\lambda_i)u_x - u^2(\lambda_r - i\lambda_i)\bar{w}_x, \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} (w - \bar{w})_t &= \gamma(w - \bar{w})_{xx} - 4\gamma u(|v|^2 - |u_x|^2) - 2\gamma \bar{u}(v^2 - u^2) \\ &\quad - 2(\lambda_r + i\lambda_i) |u|^2(2|u|^2 v + u^2 \bar{v} - w_x) \\ &\quad - (\lambda_r - i\lambda_i) u^2(2|u|^2 \bar{v} + \bar{u}^2 v - \bar{w}_x) \\ &\quad - \left(k_2 - 16(\lambda_r^2 + \lambda_i^2) \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) |u|^4\right)(w - \bar{w}). \end{aligned} \quad (5.19)$$

首先估计  $|u|_0^2 + |u_x|_0^2 + |v - u_x|_0^2 + |w - \bar{w}|_0^2$  的一致上界, 然后通过 Minkowsky 不等式, 得到  $|U|_{L^\infty}$  的一致有界, 即需要证明下面命题.

**命题 5.5** 设  $k_1 > 0, k_2 > \gamma + \frac{\lambda_r^2 + \lambda_i^2}{2\alpha}, \gamma > 2\sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2}(\alpha$  是一常数),  $U$  为(5.7) 具初值  $U_0 \in D(\epsilon, \frac{1}{2})$  的解, 则存在  $\rho_4 \geq \sqrt{2}\rho$  时, 有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|U\|_{L^\infty}^2 \leq \rho_4^2.$$

**证** 设  $U = (u, v, w)^T$  为(5.7) 式的光滑解, 则(5.17) 式和  $u$  作内积取实部, 得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_0^2 = -\gamma \|u_x\|_0^2 - \operatorname{Re}((\lambda_r + i\lambda_i) \int_0^L w_x \bar{u} dx)$$

$$+ \operatorname{Re}(\eta_1 + \xi_1, u)$$

因

$$\begin{aligned} & - \operatorname{Re}\left((\lambda_r + i\lambda_i) \int_0^L w_x \bar{u} dx\right) - \operatorname{Re}\left((\lambda_r + i\lambda_i) \int_0^L w \bar{u}_x dx\right) \\ & = \operatorname{Re}\left((\lambda_r + i\lambda_i) \int_0^L (w - f(u)) u_x dx\right) \\ & \quad + \operatorname{Re}\left((\lambda_r + i\lambda_i) \int_0^L f(u) \bar{u}_x dx\right) \\ & = \operatorname{Re}\left((\lambda_r + i\lambda_i)(w - \bar{w}, u_x)\right) - \lambda_i \operatorname{Im} \int_0^L |u|^2 u \bar{u}_x dx, \\ & \operatorname{Re}(\eta_1 + \xi_1, u) = - \operatorname{Re}\left(\varphi_\rho \int_0^L ((\beta_r + i\beta_i) |u|^4 + (\delta_r + i\delta_i) |u|^6 \right. \\ & \quad \left. - \chi |u|^2) dx\right) - \operatorname{Re}\left((1 - \varphi_\rho) \left(\delta_r + 9\gamma + 9 \frac{\lambda_r^2 + \lambda_i^2}{\gamma}\right) \int_0^L |u|^6 dx\right) \\ & \quad + \operatorname{Re}(\xi_1, u) \leq \delta_r \int_0^L |u|^6 dx + |\beta_r| \int_0^L |u|^4 dx \\ & \quad + |\chi| \int_0^L |u|^2 dx - \operatorname{Re}\left((1 - \varphi_\rho) 9\gamma \int_0^L |u|^6 dx\right) + \operatorname{Re}(\xi_1, u), \end{aligned}$$

根据  $\xi_1$  的选取, 有

$$\operatorname{Re}(\xi, u) \leq 3\gamma \int_0^L |u|^3 |w - \bar{w}| dx.$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_0^2 & \leq -\gamma \|u_x\|_0^2 - \operatorname{Re}((\lambda_r + i\lambda_i)(w - \bar{w}, u_x)) + |\lambda_i| \\ & \cdot \int_0^L |u|^3 |u_x| dx - \delta_r \int_0^L |u|^6 dx + |\beta_r| \int_0^L |u|^4 dx + |\chi| \\ & \int_0^L |u|^2 dx - (1 - \varphi_\rho) \int_0^L |u|^6 dx + 3\gamma \int_0^L |u|^3 |w - \bar{w}| dx, \\ 3\gamma \int_0^L |u|^3 |w - \bar{w}| dx & \leq 9\gamma \int_0^L |u|^6 dx + \frac{\gamma}{4} \|w - \bar{w}\|_0^2. \end{aligned}$$

假设  $4\delta_r\gamma > \lambda_i^2$ , 可选择

$$2\alpha = 2\gamma - b^2, \beta = 2\delta_r - a^2, \quad |a \cdot b| = |\lambda_i|,$$

可得估计

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \|u_0\|^2 &\leq 2\alpha \|u_x\|_0^2 - \|u\|_0^2 + p + 18\varphi_r \gamma \int_0^L |u|^6 dx \\
&\quad + \frac{\gamma}{2} \|\bar{w} - \bar{w}\|_0^2 - 2R((\lambda_r + i\lambda_i)(\bar{w} - \bar{w}), u_x)) \\
&\leq -\alpha \|u_x\|_0^2 - \|u\|_0^2 + p + 18\varphi_r \gamma \int_0^L |u|^6 dx \\
&\quad + \left( \frac{\gamma}{2} + \frac{\lambda_r^2 + \lambda_i^2}{\alpha} \right) \|\bar{w} - \bar{w}\|_0^2, \quad (5.20)
\end{aligned}$$

这里  $p = \frac{1}{8} \left( \frac{|\beta_r| + 1}{\beta} + 2|\chi| + 1 \right)^2$ .

(5.17) 与  $u_{xr}$  作内积取实部, 得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_x\|_0^2 &= -\gamma \|u_{xr}\|_0^2 + \operatorname{Re} \left( (\lambda_r + i\lambda_i) \int_0^L w_x \bar{u}_{xr} dx \right) \\
&\quad - \operatorname{Re}(\eta_1 + \xi_1, u_{xr}),
\end{aligned}$$

因

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re} \left( (\lambda_r + i\lambda_i) \int_0^L w_x \bar{u}_{xr} dx \right) = \operatorname{Re} \left( (\lambda_r + i\lambda_i) \int_0^L (\bar{w} - \bar{w})_x \bar{u}_{xr} dx \right) \\
&\quad + \operatorname{Re} \left( (\lambda_r + i\lambda_i) \int_0^L (|u|^2 u)_x \bar{u}_{xr} dx \right) \\
&\leq \frac{\gamma}{2} \|u_{xr}\|_0^2 + \frac{\lambda_r^2 + \lambda_i^2}{\gamma} \|(\bar{w} - \bar{w})_x\|_0^2 \\
&\quad + \frac{9}{\gamma} (\lambda_r^2 + \lambda_i^2) \int_0^L |u|^4 |u_x|^2 dx, \operatorname{Re}(\eta_1 + \xi_1, u_{xr}) \\
&= -\varphi_r \operatorname{Re}(g(u), u_{xr}) - (1 - \varphi_r) \left( 9\gamma + \delta_r + 9 \frac{\lambda_r^2 + \lambda_i^2}{\gamma} \right) \\
&\quad \cdot \operatorname{Re}(|u|^4 u, u_{xr}) + \operatorname{Re}(\xi_1, u_{xr}), \\
&\operatorname{Re}(|u|^4 u, u_{xr}) = 3 \int_0^L |u|^4 |u_x|^2 dx + 2 \int_0^L |u|^2 u^2 \bar{u}_x dx \\
&\quad \geq \int_0^L |u|^4 |u_x|^2 dx, \\
&\operatorname{Re}(\xi_1, u_{xr}) \leq 3\gamma \int_0^L |u|^2 |\bar{w} - \bar{w}| dx \\
&\quad \leq 9\gamma \int_0^L |u|^4 |\bar{w} - \bar{w}|^2 dx + \frac{\gamma}{4} \|u_{xr}\|_0^2.
\end{aligned}$$

综合上面的计算得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_x\|_0^2 &\leq -\frac{\gamma}{2} \|u_{xx}\|_0^2 + \varphi_\rho \frac{18}{\gamma} (\lambda_r + \lambda_l^2) \int_0^L |u|^4 |u_x|^2 dx \\ &\quad + 2\varphi_\rho \operatorname{Re}(g(u), u_{xx}) + \frac{2(\lambda_r^2 + \lambda_l^2)}{\gamma} \|(\bar{w} - \bar{w})_x\|_0^2 \\ &\quad + 9\gamma \int_0^L |u|^4 \|\bar{w} - \bar{w}\|_x^2 dx. \end{aligned} \quad (5.21)$$

(5.18) 式 $\langle v - u_x, \cdot \rangle$ 作内积取实部得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v - u_x\|_0^2 &= -\gamma \|(\bar{v} - \bar{u}_x)_x\|_0^2 + \operatorname{Re}(\eta_2 - \eta_{1x}, v - u_x) \\ &\quad + \operatorname{Re}(\xi_2 - \xi_{1x}, v - u_x) - k_1 \|v - u_x\|_0^2. \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} g_1(u) &= (\beta_r + i\beta_l)(2\|u\|^2 u_x + u^2 \bar{u}_x) \\ &\quad + (\delta_\gamma + i\delta_l)(3\|u\|^4 u_x + 2\|u\|^2 u^2 \bar{u}_x) - \chi u_x, \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\eta_2 - \eta_{1x}, v - u_x) &= \varphi_\rho \operatorname{Re}((g_1(u) - k(u, v), (v - u_x))) \\ &= (1 - \varphi_\rho) \cdot \left(9\gamma + \delta_r + 9 \frac{\lambda_r + \lambda_l^2}{\gamma}\right) \operatorname{Re} \int_0^L (3\|u\|^4 \|v - u_x\|^2 \\ &\quad + 2\|u\|^2 (\bar{v} - \bar{u}_x)^2) dx \leq \varphi_\rho \operatorname{Re}((g_1(u) - k(u, v), v - u_x)) \\ &= (1 - \varphi_\rho) \left(9\gamma + \delta_r + 9 \frac{\lambda_r^2 + \lambda_l^2}{\gamma}\right) \cdot \int_0^L |u|^4 \|v - u_x\|^2 dx, \\ \operatorname{Re}(\xi_2 - \xi_{1x}, v - u_x) &= \gamma \operatorname{Re} \left[ \int_0^L (2\bar{u}(v + u_x)(\bar{w} - \bar{w})(\bar{v} - \bar{u}_x) \right. \\ &\quad + 2u(\bar{v} + \bar{u}_x)(\overline{\bar{w} - \bar{w}})(\bar{v} - \bar{u}_x) + 2u(\bar{v} + \bar{u}_x)(\bar{w} - \bar{w})(\bar{v} \\ &\quad \left. - \bar{u}_x) dx \right] + \gamma \operatorname{Re} \left[ \int_0^L (2\|u\|^2 (\bar{w} - \bar{w})_x + u^2 \overline{(\bar{w} - \bar{w})_x} (\bar{v} - \bar{u}_x) dx \right], \\ \operatorname{Re}(2\bar{u}(v + u_x)(\bar{w} - \bar{w})(\bar{v} - \bar{u}_x) + 2u(\bar{v} + \bar{u}_x) \\ &\quad \cdot \overline{(\bar{w} - \bar{w})(\bar{v} - \bar{u}_x)}) = 4\operatorname{Re}(\operatorname{Re}(\bar{u}(\bar{w} - \bar{w}))(\|v\|^2 - \|u_x\|^2 \\ &\quad - \bar{v}\bar{u}_x + \bar{v}u_x)) = 4\operatorname{Re}(\bar{u}(\bar{w} - \bar{w})) \cdot (\|v\|^2 - \|u_x\|^2), \end{aligned}$$

所以

$$\operatorname{Re}(\xi_2 - \xi_{1x}, v - u_x) \leq 4\gamma \operatorname{Re} \int_0^L (\bar{u}(\bar{w} - \bar{w})) (\|v\|^2$$

$$\begin{aligned}
& -|u_x|^2)dx + 2\gamma \operatorname{Re} \int_0^L u(\bar{w} - \bar{w}_x)(\bar{v} - \bar{u}_x)dx \\
& + 3\gamma \int_0^L |u|^2 |(\bar{w} - \bar{w}_x)_x| |\bar{v} - \bar{u}_x| dx \leq I + \frac{\gamma}{2} |(\bar{w} \\
& - \bar{w}_x)_x|_0^2 + \frac{9}{2} \gamma \int_0^L |u|^4 |v - u_x|^2 dx,
\end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned}
I &= 4\gamma \operatorname{Re} \int_0^L (u(\bar{w} - \bar{w}_x))(\bar{v}^2 - |u_x|^2)dx \\
&+ 2\gamma \operatorname{Re} \int_0^L u \cdot (\bar{w} - \bar{w}_x)(\bar{v}^2 - u_x^2)dx.
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} |v - u_x|_0^2 &\leq -2\gamma |(\bar{v} - \bar{u}_x)|_0^2 - 2k_1 |v - u_x|_0^2 + 2I \\
&+ \gamma |(\bar{w} - \bar{w}_x)_x|_0^2 + \varphi_p \left( 9\gamma \int_0^L |u|^4 |v - u_x|^2 dx \right. \\
&\quad \left. - (k(u, v) - g_1(u), v - u_x) \right), \quad (5.22)
\end{aligned}$$

(5.19) 式与  $w - \bar{w}$  作内积取实部, 得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w - \bar{w}|_0^2 &= -\gamma |(\bar{w} - \bar{w}_x)_x|_0^2 - k_2 |(\bar{w} - \bar{w}_x)|_0^2 \\
&- \operatorname{Re} \left( \int_0^L (4\gamma u \cdot (|v|^2 - |u_x|^2) - 2\gamma \bar{u}(\bar{v}^2 - u_x^2)) (\overline{w - \bar{w}}) dx \right) \\
&- \operatorname{Re} \left( \int_0^L 2|u|^2 \cdot (\lambda_r + i\lambda_i)(2|u|^2 \bar{v} + u^2 \bar{v} - \bar{w}_x) (\overline{w - \bar{w}}) dx \right) \\
&- \operatorname{Re} \left( \int_0^L u^2 (\lambda_r - i\lambda_i)(2|u|^2 \bar{v} + \bar{u}^2 \bar{v} - \bar{w}_x) (\overline{w - \bar{w}}) dx \right) \\
&- \left( 9\gamma + 16(\lambda_r^2 + \lambda_i^2) \left( 1 + \frac{1}{\gamma} \right) \right) \int_0^L |u|^4 |w - \bar{w}|^2 dx.
\end{aligned}$$

对  $2|u|^2 \bar{v} + u^2 \bar{v} - \bar{w}_x$  和  $2u^2 \bar{v} + \bar{u}^2 \bar{v} - \bar{w}_x$  的处理是分别插入  $\bar{w}_x$  和  $\bar{w}_x$  ( $\bar{w} = f(u) = |u|^2 u$ ), 具体步骤从略, 则

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w - \bar{w}|_0^2 \leq -\gamma |(\bar{w} - \bar{w}_x)_x|_0^2 - k_2 |(\bar{w} - \bar{w}_x)|_0^2 - I$$

$$\begin{aligned}
& + 12\sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2} \int_0^L |u|^2 |v - u_x| |w - \bar{w}| dx \\
& + 4\sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2} \int_0^L |u|^2 |w - \bar{w}| |(w - \bar{w})_x| dx \\
& - \left( q\gamma + 16(\lambda_r^2 + \lambda_i^2) \left( 1 + \frac{1}{r} \right) \right) \int_0^L |u|^4 |w - \bar{w}|^2 dx \\
\leq & -\frac{3}{4} \gamma |(w - \bar{w})_x|_0^2 - k_2 |w - \bar{w}|_0^2 - I \\
& + 9 \int_0^L |u|^4 |v - u_x|^2 dx - 9\gamma \int_0^L |u|^4 |w - \bar{w}|^2 dx.
\end{aligned} \tag{5.23}$$

将(5.20)–(5.23) 四式相加,得

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} (& |u|_0^2 + |u|_0^2 + |v - u_x|_0^2 + |w - \bar{w}|_0^2) \leq -|u|_0^2 + p \\
& - \alpha |u_x|_0^2 + \left( \frac{\gamma}{2} + \frac{\lambda_r^2 + \lambda_i^2}{\alpha} - 2k_2 \right) |w - \bar{w}|_0^2 \\
& + 18\varphi_\rho \gamma \int_0^L |u|^6 dx - \frac{\gamma}{2} |u_{xx}|_0^2 + 18\varphi_\rho \cdot \frac{\lambda_r^2 + \lambda_i^2}{\gamma} \int_0^L |u|^4 |u_x|^2 dx \\
& - 2\varphi_\rho \operatorname{Re}(g(u), u_{xx}) + 18\gamma \varphi_\rho \int_0^L |u|^4 |v - u_x|^2 dx \\
& + \left( \frac{\lambda_r^2 + \lambda_i^2}{\gamma} - \frac{\gamma}{2} \right) |(w - \bar{w})_x|_0^2 - 2\gamma |(v - u_x)_x|_0^2. \tag{5.24}
\end{aligned}$$

对于给定的  $\rho > 0$ , 不失一般性, 假设  $|u|_0^2 + |u_x|_0^2 + |v|_0^2 + |w|_0^2 \geq 2\rho^2$ , 则命题 5.5 得证. 此时  $\varphi_\rho = 0$ , 这里

$$\varphi_\rho = \varphi \left( \frac{|u|_0^2 + |u_x|_0^2 + |v|_0^2 + |w|_0^2}{\rho^2} \right).$$

所以当  $k_1 > 0, k_2 > \gamma + \frac{\lambda_r^2 + \lambda_i^2}{2\alpha}, \gamma > 2\sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2}$  时, 由(5.24)

式有  $|u|_0^2 + |u_x|_0^2 + |v - u_x|_0^2 + |w - \bar{w}|_0^2$  指数衰减, 且一致有界. 又  $|u|_0^2 + |u_x|_0^2 + |v|_0^2 + |w|_0^2 \leq |u|_0^2 + 2|u_x|_0^2 + |v - u_x|_0^2 + |w - \bar{w}|_0^2 + |\bar{w}|_0^2, |w| = \int_0^L |u|^6 dx$ , 利用 Sobolev 嵌入定理,

$\int_0^L |u|^6 dx \leq C(|u_x|_0^2 + |u|_0^2)^3$ , 故存在  $\rho_4 \geq 2\rho$  有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (|u|_0^2 + |u_x|_0^2 + |v|_0^2 + |w|_0^2) \leq \rho_4^2.$$

命题 5.5 得证.

作为命题 5.5 的推论, 得到 (5.7) 式的解以指数收敛到集合  $J(V_1)$ .

**推论 5.6** 在命题 5.5 的假设下, 如果  $U(t)$  是 (5.7) 式的解, 则存在  $T_1, K_1 > 0$ , 使得  $t \geq T_1$  时有

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (|v - u_x|_0^2 + |w - \tilde{w}|_0^2) \\ & \leq (K_1 - 2\gamma) (|v - u_x|_0^2 + |w - \tilde{w}|_0^2). \end{aligned}$$

**证** 将 (5.22) 和 (5.23) 相加, 得

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (|v - u_x|_0^2 + |w - \tilde{w}|_0^2) \leq -2\gamma (|v - u_x|_x|_0^2 \\ & - 2k_1 |v - u_x|_0^2 - \frac{3}{2}\gamma (|w - \tilde{w}|_x|_0^2 - 2k_2 |w - \tilde{w}|_0^2 \\ & + 18\gamma\varphi_\rho \int_0^L |u|^4 |v - u_x|^2 dx). \end{aligned}$$

由于

$$\int_0^L |u|^4 |v - u_x|^2 dx \leq |u|_{L^4}^4 |v - u_x|_0^2,$$

由命题 5.5 和  $H_{\text{per}}^1(I) \hookrightarrow L^\infty(I)$ , 知存在  $T_1 > 0$ , 使得

$$|u|_{L^4} \leq C_1, \quad t \geq T_1,$$

因此取  $K_1 = 18rc_1^4$ , 推论得证.

下面证明 (5.7) 式的解在  $D(-\frac{1}{2})$  一致有界且在  $D(\frac{1}{2})$  中存在整体吸引子.

**命题 5.7** 当  $k_1 > \frac{K_1}{2}, k_2 > \gamma + \frac{\lambda_r^2 + \lambda_i^2}{2}, \gamma > \sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2}$  时, (5.7) 式的解在  $D(-\frac{1}{2})$  中一致有界, 并且在  $D(\frac{1}{2})$  中存在整体吸引子  $\omega$ .

**证** 用  $u, v, w$  分别与 (5.7) 式的 3 个方程作内积并取实部,

然后利用 Hölder 不等式及命题 5.5 得到

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_0^2 \leq -\gamma \|u_x\|_0^2 + \sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2} \|w_{x,0}\| \|u\|_0 + C_1,$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_0^2 \leq -\gamma \|v_x\|_0^2 + \sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2} \|w_{x,0}\| \|v\|_0 + C_2,$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|_0^2 \leq -\gamma \|w_x\|_0^2 + C_3(\|v\|_{L^4}^2 + 1),$$

这里  $C_i (i = 1, 2, 3)$  仅依赖于方程中的系数和命题 5.5 的一致界.

由 Sobolev 嵌入定理和 Young 不等式有

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^4}^2 &\leq C \|v\|_0 \|v\|_1 \leq C (\|v\|_0^2 + \|v\|_0 \|v_x\|_0) \\ &\leq C_4(1 + \|v_x\|_0), \end{aligned} \quad (5.25)$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u\|_0^2 + \|v\|_0^2 + \|w\|_0^2) &\leq -(\gamma \|u_x\|_0^2 \\ &\quad + \frac{\gamma}{4} \|v_x\|_0^2 + \left(\gamma - \frac{\lambda_r^2 + \lambda_i^2}{\gamma}\right) \|w_x\|_0^2) + C_5. \end{aligned} \quad (5.26)$$

方程组(5.7)的3个方程分别与  $-u_{xx}$ ,  $-v_{xx}$ ,  $-w_{xx}$  作内积并取实部, 然后利用 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_x\|_0^2 &\leq -\gamma \|u_{xx}\|_0^2 + \sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2} \|w_{x,0}\| \|u_{xx}\|_0^2 \\ &\quad + C_6 \|u_{xx}\|_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_x\|_0^2 &\leq -\gamma \|v_{xx}\|_0^2 + \sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2} \|w_{x,0}\| \|v_{xx}\|_0 \\ &\quad + C_7 \|v_{xx}\|_0, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_x\|_0^2 \leq -\gamma \|w_{xx}\|_0^2 + C_8(\|v\|_{L^4}^2 + 1) \|w_{xx}\|_0$$

利用 Young 不等式和(5.25)式得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u_x\|_0^2 + \|v_x\|_0^2 + \|w_x\|_0^2) &\leq -\frac{1}{2} \left(\gamma - \frac{\lambda_r^2 + \lambda_i^2}{\gamma}\right) \|w_{xx}\|_0^2 + \frac{\lambda_r^2 + \lambda_i^2}{2\gamma} \|w_x\|_0^2 \\ &\quad + C_9 \|v_x\|_0^2 + C_{10}. \end{aligned} \quad (5.27)$$



由(5.26), (5.27) 式及假设  $\gamma > 2\sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2}$  以及一致 Gronwall 不等式可以得到  $U$  在  $D(\frac{1}{2})$  中一致有界, 由于算子  $\mathcal{A}$  是扇形算子, 它生成的半群当  $t > 0$  时在  $D(\frac{1}{2})$  中是聚点, 可得到整体吸引子的存在性.

利用推论 5.6, 可以证明如下引理.

**引理 5.8** 设  $k_1 > \frac{K_1}{2}, k_2 > \gamma + \frac{\lambda_r^2 + \lambda_i^2}{2\gamma}, \gamma > 2\sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2}$ , 则  $\mathcal{A}$  包含在集合  $J(V_1)$  中.

**证** 首先注意到存在常数  $\rho_5$  使得

$$\|v - u_x\|_0^2 + \|w - f(u)\|_0^2 \leq \rho_5^2, \forall (u, v, w) \in \mathcal{A}.$$

现设  $U(U_0, t) = (u(t), v(t), w(t))'$  为(5.7) 式具初值  $U_0 \in \mathcal{A}$  的解, 由推论 5.6 得到

$$\begin{aligned} \|v - u_x\|_0^2 + \|w(t) - \tilde{w}(t)\|_0^2 &\leq e^{-\bar{\mu}t} (\|v(T_1) - u_x(T_1)\|_0^2 \\ &\quad + \|w(T_1) - \tilde{w}(T_1)\|_0^2) \leq \rho_5^2 e^{-\bar{\mu}t} \text{ (根据 } \mathcal{A} \text{ 的不变性)}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

对  $t \geq T_1$ , 这里  $\bar{\mu} = \min(2k_1 - K, 2k_2)$ , 进而, 由  $\mathcal{A}$  的不变性, 对任意  $U^* \in \mathcal{A}$  和  $t \geq T_1$ , 则存在  $U_0$ , 使得  $U(U_0, t) = U^*$ . 因此由(5.28) 得

$$\begin{aligned} \text{dist}(U^*, J(V_1)) &\leq \rho_5^2 e^{-\bar{\mu}t}, t \geq T_1, \\ \text{dist}(\mathcal{A}, J(V_1)) &= \sup_{U \in \mathcal{A}} \text{dist}(U, J(V_1)) \leq \rho_5^2 e^{-\bar{\mu}t}, t \geq T_1, \\ \text{dist}(\mathcal{A}, J(V_1)) &= 0. \end{aligned}$$

下面只要证明  $J(V_1)$  在  $H$  中是闭的就可以推出  $\mathcal{A} \subset J(V_1)$ . 事实上, 如果  $(u_n, (u_n)_x, f(u_n)) \in \mathcal{A}$  收敛到  $(u, v, w) \in H$ , 则  $v$  是  $u$  的弱导数,  $v \in \mathcal{D}$ . 现

$$\begin{aligned} \|H\|_0 &\leq \|v - (u_n)_x\|_0 + \|(u_n)_x\|_0 < \infty, \\ \|w - f(u)\|_0 &\leq \|u - f(u_n)\|_0 + \|f(u_n) - f(u)\|_0, \\ \|f(u_n) - f(u)\|_0 &\leq \left( \int_0^L (|u_n|^6 - |u|^6)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (\|u\|_{L^\infty}^2 + \|u_n\|_{L^\infty}^2) \|u_n - u\|_{L^\infty} + \|u_n\|_{L^\infty}^2 \|u_n - u\|_{L^\infty} \end{aligned}$$

$$\cdot ( \| u_n \|_L^3 + \| u \|_L^3 ) \| u_n - u_0 \|_0,$$

因  $\| u_n \|_L$  是一致有界的, 所以  $\| u \|_L$  也是一致有界的, 故  $w = f(u)$ . 引理得证.

于是可得

**定理 5.9** 设  $k_1 > \frac{K_1}{2}, k_2 > \gamma + \frac{\lambda_r^2 + \lambda_l^2}{2\alpha}, \gamma > 2\sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_l^2}$ ,

则有  $\mathcal{A} = J(\mathcal{A}_\rho)$ .

**证** 显然  $J(\mathcal{A}_\rho) \subset \mathcal{A}$ , 又  $\mathcal{A}$  是  $J(V_1)$  中的有界不变集, 但由于  $\mathcal{A}_\rho$  是 (5.5) 式整体吸引子, 则  $J(\mathcal{A}_\rho)$  是  $J(V_1)$  中的极大不变集, 因此  $\mathcal{A} \subset J(\mathcal{A}_\rho)$ , 所以

$$\mathcal{A} = J(\mathcal{A}_\rho).$$

根据前面的讨论, 我们知道方程组 (5.7) 保持 (5.2) 式的长时间动力学行为, 特别地, 由命题 5.5 和命题 5.7 知存在常数  $\rho_6 > 0$ , 使得

$$\| e^{-\frac{1}{2}U} \|_0 \leq \rho_6, \forall U \in \mathcal{A}.$$

为了证明方程组 (5.7) 的惯性流形的存在性, 对非线性项  $\widetilde{F}$  进行截断, 即考虑

$$\frac{dU}{dt} + A_\mu U = F(U), \quad (5.29)$$

这里  $F(U) = \varphi\left(\frac{\|A^{\frac{1}{2}}U\|_0^2}{\rho_6}\right)\widetilde{F}(U)$ , 可见 (5.29) 式与 (5.7) 式在整体吸引子  $\mathcal{A}$  上具有相同的长时间行为.

**命题 5.10** 在以上假定下, 方程组 (5.29) 存在惯性流形.  $\mu = \text{graph } \Phi$ , 这里  $\Phi: P\mathbb{R}^N \rightarrow Q\mathbb{R}^N \cap D(\mathcal{A}^{-\frac{1}{2}})$  是 Lip 映射;  $P$  关于  $A$  的前  $N+1$  个特征向量在  $\mathbb{R}^N$  中的投影;  $Q = I - P$ .

因为  $\mathcal{A}$  是如下形式的微分算子

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & O & (\lambda_r + i\lambda_l)\partial_x \\ -k_l\partial_x & A & -(\lambda_r + i\lambda_l)\partial_{x_l} \\ O & O & A \end{pmatrix}.$$

类似于引理 5.4 的讨论,  $\mathcal{A}$  具有离散谱, 由经典的泛函分析理论可

知  $P_-$ ,  $Q_-$  在  $-$  作用下是不变的, 因为  $-$  不是自伴算子, 可用 [2] 的结果来证此命题, 此时  $-$  的谱为  $\left\{ \left( \frac{2\pi n}{L} \right)^2 \right\}_{n \geq 1}$ , 故所需的谱裂口条件满足.

**推论 5.11** (5.2) 解半群本质上的长时间动力学可由如下常微分方程所描述:

$$\frac{d}{dt}PU = -A_-PU + PF(PU + \Phi(PU)), \quad (5.30)$$

由惯性流形的指数吸引性, 有

**推论 5.12** 如  $U(t)$  为 (5.2) 式的解, 则存在常微分方程 (5.30) 的解  $PU(t)$ , 且满足

$$\|u(t) - (P_1(t) + \Phi_1(PU))\| \leq ce^{-\alpha t}, t > 0, c, \alpha > 0,$$

这里  $PU(t) = (P_1(t), P_2(t), P_3(t))$ ,  $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ .

## §6 广义 Ginzburg-Landau 方程的指数吸引子

考虑广义 Ginzburg-Landau 方程

$$\begin{aligned} u_t + \nu u_x &= \chi u + (\gamma_r + i\gamma_i)u_{xx} - (\beta_r + i\beta_i)|u|^2u \\ &\quad - (\delta_r + i\delta_i)|u|^4u - (\lambda_r + i\lambda_i)|u|^2u_x \\ &\quad - (\mu_r + i\mu_i)u^2\bar{u}_x, \end{aligned} \quad (6.1)$$

其中  $\gamma_r, \delta_r$  为正常数,  $\nu, \chi, \gamma_i, \beta_r, \beta_i, \delta_i, \lambda_r, \lambda_i, \mu_r, \mu_i$  均为实数, (6.1) 满足周期边界条件

$$u(x, t) = u(x + L, t), x \in R^1, t \geq 0, L > 0 \quad (6.2)$$

和初始条件

$$u(x, 0) = u_0(x), x \in R^1. \quad (6.3)$$

我们前面曾证明问题 (6.1) — (6.3) 当满足条件

$$\gamma_r > 0, \delta_r > 0, 4\delta_r\gamma_r > (\lambda_i - \mu_i)^2 \quad (*)$$

时, 在  $V_1 = H_{\text{per}}^1[0, L]$  上存在惟一整体解和有限维整体吸引子的存在性.

为证明惯性流形的存在性, 一般要求满足谱裂口条件, 由于方

程(6.1)中出现非线性导数项,要求  $L$  充分小或  $\gamma_r$  充分大,在 §5 中我们得问题(6.1)–(6.3) 惯性形式的存在性,其中  $\gamma_i = 0$ ,  $\lambda_r = 2\mu_r, \lambda_i = 2\mu_i$ , (\*) 条件为  $\gamma_r > 2\sqrt{\mu_r^2 + \mu_i^2}$ ,这一节我们要证明(6.1)–(6.3) 指数吸引子的存在性,指数吸引子的概念见 [7]. 它是介于整体吸引子与惯性流形之间的要求,比惯性流形的要求要低一些.

设  $\mathcal{H}$  为可分 Hilbert 空间,  $B$  为  $\mathcal{H}$  中的紧子集,  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  为非线性连续半群保持  $B$  为不变集,  $\mathcal{A} = \bigcap_{t \geq 0} S(t)B$ ,  $\mathcal{A}$  为整体吸引子.

**定义 6.1** 集合  $\mathcal{M}$  称为  $(\{S(t)\}_{t \geq 0}, B)$  指数吸引子, 如果 (i)  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M} \subseteq B$ ; (ii)  $S(t)\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}, \forall t \geq 0$ ; (iii)  $\forall u_0 \in B, \text{dist}_{\mathcal{H}}(S(t)u_0, \mathcal{M}) \leq c_1 e^{-c_2 t}, \forall t \geq 0$ ,  $c_1$  和  $c_2$  为与  $u_0$  无关的正常数; (iv)  $\mathcal{M}$  具有有限分形维数.

**定义 6.2** 连续半群  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  称在  $B$  上满足挤压性质, 如果存在  $t_* > 0$  使得  $S_* = S(t_*)$  满足: 存在阶数  $N_0$  的正交投影  $P$  使得对一切  $u, v \in B$ , 如果  $\|P(S_* u - S_* v)\|_{\mathcal{H}} \leq \|(I - P)(S_* u - S_* v)\|_{\mathcal{H}}$ , 则有

$$\|S_* u - S_* v\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{8} \|u - v\|_{\mathcal{H}}.$$

**定理 6.3** 如果  $(\{S(t)\}_{t \geq 0}, B)$  在  $B$  上满足挤压性质且  $S_* = S(t_*)$  在  $B$  上 Lip 连续, 具有 Lip 常数  $\bar{L}$ , 则存在  $(\{S(t)\}_{t \geq 0}, B)$  的指数吸引子  $\mathcal{M}$ , 使得

$$d_F(\mathcal{M}) \leq N_0 \max \left\{ 1, \frac{\ln(16\bar{L} + 1)}{\ln 2} \right\},$$

$$\text{dist}_{\mathcal{H}}(S(t)u_0, \mathcal{M}) \leq c_1 \exp \left\{ -\frac{c_2}{t_*} t \right\},$$

其中  $c_1, c_2$  为与  $u_0, t$  无关的常数.

现证明问题(6.1)–(6.3) 指数吸引子的存在性.

取  $\mathcal{H} = V_1 = H_{\text{per}}^1[0, L]$ , 选取  $B_0$  如下, 先令

$$B_0 = \{u \in H_{\text{per}}^1[0, L], \|u\|_0 \leq 2\rho_0, \|u\|_1 \leq 2\rho_1\}.$$

如前所知, 常数  $\rho_0, \rho_1$  依赖于 (6.1) 的系数, 由嵌入定理知  $\|u\|_{L^\infty} \leq \rho_1$ , 而且已知存在  $T_1 > 0$ , 当  $t \geq T_1$  时,  $\|u(t)\|_2 \leq 2\rho_2$ , 且  $B = \bigcup_{t \geq T_2} S(t)B_0$  在  $V_1$  中是紧的, 且是  $S(t)$  的不变集, 设  $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  为  $-\partial_{xx}$  是周期边界条件的特征值,  $\{w_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  为对应于  $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  的特征函数. 令

$$H_N = \text{Span}\{w_1, \dots, w_N\},$$

$P_N$  为在  $H_N$  上的正交投影,  $Q_N = I - P_N$ . 易知

$$\|u\|_0^2 \leq \frac{1}{\lambda_{N+1}} \|u\|_1^2, \quad \forall u \in Q_N V_1. \quad (6.4)$$

作 (6.1)–(6.3) 两解之差, 且设  $\chi = v = 0$ ,  $u, v$  为具分别初值为  $u_0, v_0$  (6.1)–(6.3) 的解, 且

$$u, v \in C([0, \infty); V_1) \cap C^1((0, \infty); V_1) \cap C((0, \infty); H_{\text{per}}^k[0, L]),$$

令  $w = u - v$ , 则  $w$  满足

$$\begin{aligned} w_t = & (\gamma_r + i\gamma_i)w_{xx} - (\beta_r + i\beta_i)(2\|v\|^2 w + u^2 w + u w \bar{v}) \\ & - (\delta_r + i\delta_i)(\|u\|^4 w + 2\|u\|^2 u^2 \bar{w} + \|v\|^2 u^2 \bar{w} \\ & + \|u\|^2 u w \bar{v} + \|v\|^2 u w \bar{v}) - (\lambda_r + i\lambda_i)(\|v\|^2 w_x + u \bar{v} v_x \\ & + \bar{w} u u_x) - (\mu_r + i\mu_i)(v^2 \bar{w}_x + (u + v) \cdot \bar{u}_x w), \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$w(x, t) = w(x + L, t), \quad x \in R^1, t \geq 0, \quad (6.6)$$

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad x \in R^1. \quad (6.7)$$

(6.5) 和  $w$  作内积取实部

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|w\|_0^2 + \gamma_r \|w_x\|_0^2 = & -\beta_r \int_0^L \|u\|^2 \|w\|^2 dx - \text{Re}((\beta_r + i\beta_i) \\ & \cdot \int_0^L (u^2 \bar{w}^2 + \|v\|^2 u \bar{w}) dx) - \delta_r \int_0^L \|v\|^4 \|w\| dx \\ & - \text{Re}((\delta_r + i\delta_i) \int_0^L (\|u\|^2 u^2 w^2 + \|v\|^2 u^2 \bar{w}^2 \\ & + \|u\|^2 \bar{v} w \|w\|^2 + \|v\|^2 u \bar{v} \|w\|^2) dx) \\ & - \text{Re}((\lambda_r + i\lambda_i) \int_0^L (\|v\|^2 \bar{u} w_x + u u_x \bar{w}^2 + \bar{v} u_x \|w\|^2) dx) \end{aligned}$$

$$- \operatorname{Re}((\mu_r + i\mu_i) \int_0^L (v^2 \bar{w}_r w + u_x (u + v) |w|^2) dx).$$

对  $u, v \in B$  有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |w|_0^2 + \gamma_r |w|_0^2 &\leq |\beta_r| \rho^2 |w|_0^2 + 2\sqrt{\beta_r^2 + \beta_i^2} \rho^2 |w|_0^2 \\ &+ 4\sqrt{\delta_r^2 + \delta_i^2} \rho^4 |w|_0^2 + (\sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2} + \sqrt{\mu_r^2 + \mu_i^2}) \\ &\cdot \left( \int_0^L |w_x| |w| dx + 2\rho\phi_3 |w|_0^2 \right), \end{aligned}$$

由此可得

$$\frac{d}{dt} |w|_0^2 + \gamma_r |w_x|_0^2 \leq M |w|_0^2, \quad (6.8)$$

其中

$$\begin{aligned} M &= |\beta_r| \rho^2 + 2\rho^2 \sqrt{\beta_r^2 + \beta_i^2} + 4\rho^4 \sqrt{\delta_r^2 + \delta_i^2} + 2\rho\phi_3 (\sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2} \\ &+ \sqrt{\mu_r^2 + \mu_i^2}) + \frac{\rho^4}{\gamma_r} (\lambda_r^2 + \lambda_i^2 + \mu_r^2 + \mu_i^2) \frac{d}{dt} |w|_0^2 \\ &\leq M_0 |w|_0^2. \end{aligned}$$

(6.5) 和  $-w_{xx}$  作内积取实部, 得

$$\frac{d}{dt} |w_x|_0^2 \leq M_1 (|w_x|_0^2 + |w|_0^2),$$

因此  $\frac{d}{dt} (|w|_0^2 + |w_x|_0^2) \leq (M_0 + M_1) (|w|_0^2 + |w_x|_0^2),$

$$|w|_{V_1}^2 = |w|_1^2 \leq \exp[(M_0 + M_1)t] |w(0)|_1^2. \quad (6.9)$$

以  $Q_N$  作用于(6.5), 并注意  $Q_N$  和  $- \partial_{xx}$  可交换, 令  $\varphi = Q_N w$  得

$$\varphi_t - (\gamma_r + i\gamma_i)\varphi_{xx} = Q_N(F(u) - F(v)). \quad (6.10)$$

(6.10) 和  $\varphi$  作内积取实部, 可得类似估计

$$\frac{d}{dt} |\varphi|_0^2 + \gamma_r |\varphi|_1^2 \leq (M_0 + \gamma_r) |\varphi|_0^2 \leq \frac{M_0 + \gamma_r}{\lambda_{N+1}} |w|_1^2,$$

因

$$|\varphi_x|_0^2 \leq \frac{1}{\lambda_{N+1}} |\varphi_x|_1^2,$$

故有

$$\frac{d}{dt} \|\varphi_r\|_0^2 + \gamma_r \|\varphi_r\|_1^2 \leq (M_1 + \gamma_r) \|\varphi_r\|_0^2 + M \|\varphi\|_0^2.$$

因  $N \rightarrow \infty, \lambda_{N+1} \rightarrow \infty$ , 故能选取  $N_0$  使得当  $N \geq N_0$ ,

$$\gamma_r \lambda_{N+1} \geq M_1 + \gamma_r,$$

因此

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \|\varphi_r\|_0^2 \leq M_1 \|\varphi\|_0^2 \leq \frac{M_1}{\lambda_{N+1}} \|\varphi\|_1^2, \\ \frac{d}{dt} \|\varphi\|_1^2 + \gamma_r \|\varphi\|_1^2 \leq \frac{1}{\lambda_{N+1}} (M_0 + M_1 + \gamma_r) \|\varphi\|_1^2. \end{cases} \quad (6.11)$$

给定  $t_*$  和  $N_0$ , 使得  $\|P_{N_0} w(t_*)\|_1 \leq \|Q_{N_0} w(t_*)\|_1$ , 则有

$$\|\varphi(t_*)\|_1 \leq \frac{1}{8} \|\varphi(0)\|_1.$$

定理得证.

由(6.9)和(6.11), 得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\varphi\|_1^2 + \gamma_r \|\varphi\|_1^2 &\leq \frac{1}{\lambda_{N+1}} (M_0 + M + \gamma_r) \|\varphi\|_1^2 \\ &\leq \frac{1}{\lambda_{N+1}} (M_0 + M + \gamma_r) \exp[(M_0 + M_1)t] \|\varphi(0)\|_1^2, \end{aligned}$$

积分上不等式得

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_1^2 &\leq \exp[-\gamma_r t] \|\varphi(0)\|_1^2 + \frac{1}{\lambda_{N+1}} (\exp[(M_0 + M_1)t] \\ &\quad - \exp[-\gamma_r t]) \|\varphi(0)\|_1^2 \leq \exp[-\gamma_r t] \|\varphi(0)\|_1^2 \\ &\quad + \frac{1}{\lambda_{N+1}} \exp[(M_0 + M_1)t] \cdot \|\varphi(0)\|_1^2, \end{aligned}$$

即有

$$\begin{aligned} \|Q_N w(t)\|_1^2 &\leq \exp[-\gamma_r t] \|\varphi(0)\|_1^2 + \frac{1}{\lambda_{N+1}} \exp[(M_0 \\ &\quad + M_1)t] \|\varphi(0)\|_1^2. \end{aligned} \quad (6.12)$$

现选取  $t_*$  与  $N_0$ , 首先选取  $t_*$  使得  $\exp[-\gamma_r t_*] = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{8}\right)^2$ , 再选取  $N_1$  充分大, 使得

$$\frac{1}{\lambda_{N_1+1}} \exp[-(M_0 + M_1)t_*] \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{8}\right)^2.$$

特别选取

$$\|P_{N_1} w(t_*)\|_1^2 \leq \|Q_{N_1} w(t_*)\|_1^2,$$

则从(6.12),得

$$\begin{aligned} \|w(t_*)\|_2^2 &= \|P_{N_1} w(t_*)\|_1^2 + \|Q_{N_1} w(t_*)\|_1^2 \\ &\leq 2 \|Q_{N_1} w(t_*)\|_1^2 \leq \left(\frac{1}{8}\right)^2 \|w(0)\|_1^2. \end{aligned}$$

取  $N_0 = \max(\bar{N}_0, N_1)$ ,  $t_* = \frac{8}{\gamma_r} \ln 2$ ,  $\bar{L} = \frac{\lambda_{N_0+1}}{512}$ , 则定理 6.3 条件满足, 因此可得

**定理 6.4** 存在  $t_* = \frac{8}{\gamma_r} \ln 2$ ,  $N_0$  充分大, 使得

$$\lambda_{N_0+1} \geq \max\left(512 \exp[(M_0 + M_1)t_*], 1 + \frac{M_1}{\gamma_r}\right),$$

则  $S(t)$  由问题(6.1)–(6.3)所形成的半群满足在  $B$  上的挤压性质, 且  $S_* = S(t_*)$  在  $B$  上是 Lip 的, 具 Lip 常数  $\bar{L}$ , 由定理 6.3 的结果, 则存在  $(\{S(t)\}_{t>0}, B)$  的指数吸引子  $\mathcal{M}$  使得

$$d_F(\mathcal{M}) \leq N_0 \max\{1, \ln(16\bar{L} + 1)/\ln 2\},$$

和  $\text{dist}_{V_1}(S(t)u_0, \mathcal{M}) \leq c_1 \exp\left\{\left(-\frac{c_2}{t_*}\right)t\right\}$ ,  $\forall u_0 \in B$ ,  $c_1, c_2$  与  $u_0, t$  无关,  $d_F(\mathcal{M})$  表示  $\mathcal{M}$  的分形维数.

## §7 Ginzburg-Landau 方程的惯性流形的构造

考虑如下 GL 方程的周期初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - (1 + i\nu)\Delta u + (1 + i\mu)|u|^2 u - au = 0, & (7.1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x+1, t) = u(x, t), & (7.2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), & (7.3) \end{cases}$$

其中  $\mu, \nu, a$  为实数, 对于  $R$  中的有界区域的 Dirichlet 边界问题和 2D 周期边界问题同样处理. 空间  $H$  为  $L^2(0, 1)$ , 在  $H$  中引入内积



$$(u, v) = \operatorname{Re} \int_0^1 u(x) \overline{v(x)} dx. \quad (7.4)$$

其中  $\bar{v}$  表示复数共轭. 算子  $A$  为

$$A = -\Delta + 1, \quad (7.5)$$

非线性项

$$R(u) = -iv\Delta u + (1 + i\mu) |u|^2 u - (a + 1)u. \quad (7.6)$$

于是(7.1)可改写为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au + R(u) = 0. \quad (7.7)$$

考虑  $u_0 \in H$ ,  $\Sigma_0$  为通过  $u_0 \in H$  的光滑  $N$  维曲面.  $\Sigma_0$  的切平面在  $u_0$  处是  $H$  的  $N$  维线性子空间, 考虑正交投影  $P_0$  从  $H$  到这个空间. 现考虑在  $S(t)$  作用下接触元素  $(u_0, p_0)$  随时间的发展. 令  $p(t)$  表示正交投影: 从切平面到  $S(t)\Sigma_0$ , 在  $S(t)u_0 = u(t)$  上, 可得到  $p(t)$  的发展方程

$$\dot{p} + (I - p) \left( A + \frac{\delta R}{\delta u}(u) \right) p + p \left( A + \frac{\delta R}{\delta u}(u) \right)^* (I - p) = 0, \quad (7.8)$$

其中  $u = u(t) = S(t)u_0$ ,  $T^*$  表示  $T$  在  $H$  中的共轭.

现考虑正交基  $w_1, w_2, \dots$ , 对应于  $A$  的特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ .

**定义 7.1** 设  $P$  为有限维区域包括  $D(A)$  的正交投影, 定义数  $\Lambda(P), \lambda(P)$  为

$$\Lambda(P) = \max \{ (Ag, g) \mid Pg = g, |g| = 1 \}, \quad (7.9)$$

$$\lambda(P) = \min \{ (Ag, g) \mid Pg = 0, g \in D(A), |g| = 1 \}. \quad (7.10)$$

从最大最小定理有

$$\Lambda(P) \geq \lambda_N, \quad (7.11)$$

$$\lambda(P) \leq \lambda_{N+1}, \quad (7.12)$$

其中  $\dim PH = N$ .

现考虑接触元素  $(u, p)$  ( $u = u(t) = S(t)u_0, p(t) = p$  满足(7.8), 随时间的发展, 相应的有  $\Lambda(t) = \Lambda(p(t)), \lambda(t) = \lambda(p(t))$ , 在[8]中已证.

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\Lambda(t)) \leq \inf_{\substack{g \in D(A) \\ \rho(t)g = \Lambda(t)g}} \left\{ |(A - \Lambda(t))g|^2 + \left( \frac{\delta R}{\delta u}(u(t))g, (A - \Lambda(t))g \right) \right\}, \quad (7.13)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\lambda(t)) \geq \inf_{\substack{g \in D(A) \\ \rho(t)g = \lambda(t)g}} \left\{ |(A - \lambda(t))g|^2 + \left( \frac{\delta R}{\delta u}(u(t))g, (A - \lambda(t))g \right) \right\}, \quad (7.14)$$

在(7.13)中,

$$\frac{d}{dt}(\Lambda(t)) = \limsup_{s \rightarrow t} \frac{\Lambda(s) - \Lambda(t)}{s - t},$$

在(7.14)中,

$$\frac{d}{dt}(\lambda(t)) \geq \liminf_{s \rightarrow t} \frac{\lambda(s) - \lambda(t)}{s - t}.$$

**定义 7.2** 一个实数  $\beta$  称为在吸收集  $Y$  中为方程(7.1) 的谱障碍,如存在一个常数  $\delta > 0$ ,依赖于  $\beta$  和  $Y$  使得

$$|(A - \beta)g|^2 + \left( \frac{\delta R}{\delta u}(u)g, (A - \beta)g \right) \geq \delta > 0 \quad (7.15)$$

对一切  $u \in D(A) \cap Y$  和一切  $g \in D(A)$ , 满足  $(Ag, g) = \beta$ ,  $\|g\| = 1$ , 则  $Y = \{u \in H^1_{\text{per}} \mid \|u\|_{H^1} \leq \rho_1\}$ .

我们首先注意到谱障碍不能是  $A$  的特征值. 注意到, 如  $Y$  是凸的, 从(7.15) 和

$$R(u_2) - R(u_1) = \int_0^1 \frac{\delta R}{\delta u}(u_1 + s(u_2 - u_1))(u_2 - u_1) ds,$$

如  $\beta$  为谱障碍, 则

$$\begin{aligned} & |(A - \beta)(u_2 - u_1)|^2 + (R(u_2) - R(u_1), (A - \beta)(u_2 - u_1)) \\ & \geq \delta \|u_2 - u_1\|^2, \end{aligned} \quad (7.16)$$

$\forall u_1, u_2 \in D(A) \cap Y$  满足

$$(A(u_2 - u_1), u_2 - u_1) = \beta \|u_2 - u_1\|^2.$$

不等式(7.16) 曾作为谱障碍的定义, 如  $Y$  是凸的, 则两者是等价

的.

如  $\beta$  为(7.1) 在  $Y$  中的谱障碍, 则  $\beta$  从上框住  $\Lambda(t)$ , 从下框住  $\lambda(t)$ .

**定理 7.3** (谱块) 设  $u(t) = S(t)u_0$  为在  $Y$  中的轨线, 设  $\beta$  为(7.1) 在  $Y$  中的谱障碍, 则

(a) 如  $\Lambda(t_0) < \beta$ , 对某个  $t_0 > 0$  成立, 则

$$\Lambda(t) < \beta, \forall t \geq t_0.$$

(b) 如  $\lambda(t_0) > \beta$ , 对某个  $t_0 > 0$  成立, 则

$$\lambda(t) > \beta, \forall t \geq t_0.$$

由(7.16) 我们证明

**定理 7.4** 设  $u_1(t) = S(t)u_0^1, u_2(t) = S(t)u_0^2$  为二条位于凸吸收集  $Y$  的轨线, 设  $\beta$  为方程(7.1) 在  $Y$  中的谱障碍, 如  $(A(u_1(t_0) - u_2(t_0)), u_1(t_0) - u_2(t_0)) \leq \beta |u_1(t_0) - u_2(t_0)|^2$ , 对某  $t_0 > 0$  成立, 则

$$(A(u_1(t) - u_2(t)), u_1(t) - u_2(t)) < \beta |u_1(t) - u_2(t)|^2, \\ \forall t \geq t_0.$$

**证** 令  $g(t) = \frac{u_1(t) - u_2(t)}{|u_1(t) - u_2(t)|},$

$$N(t) = \frac{(A(u_2(t) - u_1(t)), u_2(t) - u_1(t))}{|u_1(t) - u_2(t)|^2},$$

基于方程(7.1), 则  $u$  满足

$$\frac{1}{2} \dot{\mu} + |(A - \mu)g|^2 + \left( \frac{R(u_1) - R(u_2)}{|u_1 - u_2|}, (A - \mu)g \right) = 0. \quad (7.17)$$

于是当  $\mu = \beta$ , 从(7.17) 和(7.16), 得

$$\frac{1}{2} \frac{d\mu}{dt} |_{\mu=\beta} + \delta \leq 0.$$

由此可知  $\mu$  在靠近  $\beta$  处其导数为负, 定理得证.

**推论 7.5** 设  $u(t) = S(t)u_0$  为在  $Y$  中的一条轨线, 设  $\beta$  为(7.1) 在  $Y$  中的谱障碍. 令  $v$  为线性化方程

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} + Av + \frac{\delta R}{\delta u}(u(t))v = 0, \\ \frac{\delta R}{\delta u}(u)v = -iv\Delta v + (1+i\mu)(2|u|^2v + u^2\bar{v}) - (a+1)v \end{cases} \quad (7.18)$$

沿着  $u(t)$  的任何解, 如

$$(Av(t_0), v(t_0)) < \beta |v(t_0)|^2, \quad \text{对某 } t_0 > 0 \text{ 成立,}$$

则有

$$(Av(t), v(t)) < \beta |v(t)|^2, \quad \forall t \geq t_0.$$

条件 7.6((7.1) 在  $Y$  中存在谱障碍) 存在常数  $C_Y$  依赖于吸收集  $Y$  和  $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ , 使得

$$\left( \frac{\delta R}{\delta u}(u)g, (A - \xi)g \right) + C_Y |(A - \xi)g| |A^{\frac{1}{2}}g|^{2\alpha} |g|^{-2\alpha} \geq 0, \quad (7.19)$$

$$\forall u \in Y, g \in D(A), \xi \in \mathbb{R}.$$

显然(7.19)是成立的, 如

$$|\frac{\delta R}{\delta u}(u)g| \leq C_Y |A^\alpha g|, \quad \forall u \in Y, g \in D(A), \quad (7.20)$$

对于 GL 方程, 如  $\frac{\delta R}{\delta u}$  为二个算子之和, 其一满足(7.20), 另一满足

$$\left( \frac{\delta R}{\delta u}(u)g, g \right) = \left( \frac{\delta R}{\delta u}(u)g, Ag \right) = 0, \quad \forall u \in Y, g \in D(A). \quad (7.21)$$

如(7.19)满足, 则

$$|(A - \beta)g|^2 + \left( \frac{\delta R}{\delta u}(u)g, (A - \beta)g \right) \geq |(A - \beta)g|^2 - C_Y |(A - \beta)g| \beta^\alpha, \quad \forall g \in D(A), \text{ 满足 } |A^{\frac{1}{2}}g|^2 = \beta, |g| = 1.$$

如设  $\beta$  满足

$$\text{dis } t(\beta, \sigma(A)) \geq C_Y \beta^\alpha, \quad (7.22)$$

其中  $\sigma(A)$  为集  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ ,  $Au_j = \lambda_j u_j$ .

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots, \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = \infty,$$

则

$$\|(A - \beta)g\|^2 + \left( \frac{\partial R}{\partial u}(u)g, (A - \beta)g \right) \geq \delta > 0, \quad (7.23)$$

其中

$$\delta = \text{dist}(\beta, \sigma(A))(\text{dist}(\beta, \sigma(A)) - C_Y \beta^\alpha), \quad (7.24)$$

$$\forall u \in Y, g \in D(A), \|g\| = 1, \|A^{\frac{1}{2}}g\|^2 = \beta.$$

于是我们证明了:

**命题 7.7** 设存在常数  $C_Y$  依赖于凸吸收集  $Y$  和  $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$  使得(7.19) 成立,  $\forall u \in Y, g \in D(A), \xi \in R$ . 设  $A$  的谱  $\sigma(A)$  允许有充分大的间隙使得(7.22) 对某  $\beta$  满足, 则  $\beta$  为(7.1) 在  $Y$  中的一个谱障碍.

现来叙述如何将命题 7.7 应用于 GL 方程. 注意到由方程(7.1) 有

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2}^2 + \int_0^1 |\Delta u|^2 dx + \|u\|_{L^4}^4 = a \|u\|_{L^2}^2, \quad (7.25)$$

得

$$\frac{d}{dt} \|u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^4}^4 \leq a^2, \quad (7.26)$$

作为不等式(7.26) 的直接推论为集合

$$Y_0 = \{u \mid \|u\|_{L^2}^2 \leq 2a\}$$

为吸收的, 这个集合对(7.19) 成立不是充分小的. 我们必须证明集合  $Y_\infty = \{u \mid \|u\|_{L^\infty}^2 \leq \rho_\infty\}$  是吸收的.  $\rho_\infty$  为依赖于  $\mu, \nu, a$  的某常数,  $\rho_\infty$  可被选取为  $O(a^{3/2})$ ,  $|\mu| < \sqrt{3}$ ;  $O(a^2)$ ,  $|\mu| > \sqrt{3}$ . 这里  $\frac{\mu}{\nu} > 0$  的情况, 此时  $\rho_\infty$  为  $O(a^{4/3})$ . 事实上, 考虑  $\frac{1}{2} \int_0^1 |\nabla u|^2 dx$  和

$\frac{\mu}{\nu} \frac{1}{4} \int_0^1 |u|^4 dx$  的发展方程有

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 (|\nabla u|^2 + \frac{\mu}{2\nu} |u|^4) dx + \int_0^1 |\Delta u|^2 dx + \frac{\mu}{\nu} \int_0^1 |u|^6 dx$$

$$\leq a \left[ \int_0^1 |\nabla u|^2 dx + \frac{\mu}{\nu} \int_0^1 |u|^4 dx \right]. \quad (7.27)$$

因

$$\int_0^1 |\Delta u|^2 dx \geq \frac{\left( \int_0^1 |\nabla u|^2 dx \right)^2}{\int_0^1 |u|^2 dx}, \quad \int_0^1 |u|^6 dx \geq \frac{\left( \int_0^1 |u|^4 dx \right)^2}{\int_0^1 |u|^2 dx},$$

则如  $u \in Y_0$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\Delta u|^2 dx + \frac{\mu}{\nu} \int_0^1 |u|^6 dx &\geq \frac{1}{2a} \left( \left( \int_0^1 |\nabla u|^2 dx \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu}{\nu} \left( \int_0^1 |u|^4 dx \right)^2 \right). \end{aligned}$$

令

$$E = \int_0^1 (|\nabla u|^2 + \frac{\mu}{2\nu} |u|^4) dx,$$

则可得不等式

$$\frac{dE}{dt} + \frac{\gamma}{a} E^2 \leq 4aE,$$

其中  $\gamma = \frac{1}{2} \min\left(1, \frac{4\nu}{\mu}\right)$ . 这个不等式在  $Y_0$  是正确的. 因此, 在  $Y_0$

中,  $E$  是减少的, 只要  $E > \frac{4a^2}{\gamma}$ . 我们证明了:

**引理 7.8** 设  $\frac{\mu}{\nu} > 0$ , 则集合

$$Y_E^* = \left\{ u \mid \int_0^1 \left[ |\nabla u|^2 + \frac{\mu}{2\nu} |u|^4 \right] dx \leq \frac{4a^2}{\gamma} + \epsilon \right\} \quad (*)$$

是 GL 方程的吸收集, 其中  $\alpha = \frac{1}{2} \min\left(1, \frac{4\nu}{\mu}\right)$ .  $\forall \epsilon > 0$ . 特别

$$\int_0^1 |u|^4 dx \leq \frac{8\nu}{\mu\gamma} a^2 + \frac{2\nu}{\mu} \epsilon. \quad (7.28)$$

取  $\epsilon = 1$ , 则集合  $Y_E^1 \cap Y_0 = \{ \|u\|_{L^2}^2 \leq 2a, \int_0^1 (|\nabla u|^2 + \frac{\mu}{2\nu} |u|^4) dx \leq \frac{4a^2}{\gamma} + 1 \}$  是吸收的, 利用插值和嵌

入不等式

$$\|u\|_{L^\infty}^2 \leq c \|u\|_{L^2}^{\frac{4}{3}} \|u\|_{H^1}^{\frac{2}{3}}, \quad (7.29)$$

在  $Y_E^1 \cap Y_0$  上得到

$$\|u\|_{L^\infty}^2 \leq c \left( \frac{\delta\nu}{\mu\gamma} a^2 + \frac{2\nu}{\mu} \right)^{\frac{1}{3}} \left( \frac{4a^2}{\gamma} + 1 + 2a \right)^{\frac{1}{3}}, u \in Y_E^1 \cap Y_0. \quad (7.30)$$

定义

$$\rho_\infty = c \left( \frac{8\nu}{\mu\gamma} a^2 + \frac{2\nu}{\mu} \right)^{\frac{1}{3}} \left( \frac{4a^2}{\gamma} + 1 + 2a \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (7.31)$$

我们得到  $Y_\infty = \{u \mid \|u\|_{L^\infty}^2 \leq \rho_\infty\}$  为 GL 方程(7.1) 的吸收集, 基于表达式  $\frac{\delta R}{\delta u}$  (7.18), 可知(7.19) 对于

$$Y_\infty = \{u \mid \|u\|_{L^\infty}^2 \leq \rho_\infty\} \quad (7.32)$$

是成立的, 其中常数  $\alpha$  和  $C_{y_\infty}$  为

$$C_{y_\infty} = 3(1 + \|\mu\|) \rho_\infty + a + 1, \quad (7.33)$$

$$\alpha = 0, \quad (7.34)$$

因此我们从条件(7.22) 推出

**定理 7.9** 设  $Y_0$  给定在(7.32) 中, 为 GL 方程(7.1) 的一个吸收集, 如  $\beta$  满足

$$\text{dist}(\beta, \sigma(A)) \geq 3(1 + \|\mu\|) \rho_\infty + a + 1, \quad (7.35)$$

则  $\beta$  为 GL 方程(7.1) 在  $Y_\infty$  中的一个谱障碍.

特别, 如  $\rho_\infty$  为(7.31) 所确定, 取

$$\beta = \frac{\lambda_N + \lambda_{N-1}}{2}, \quad (7.36)$$

$\lambda_N = (2\pi N)^2 + 1$  为  $A$  的第  $N$  个特征值, 则条件(7.35) 是满足的, 如果

$$N \geq \frac{3}{(2\pi)^2} c(1 + \|\mu\|) \left( \frac{\delta\nu}{\mu\gamma} a^2 + \frac{2\nu}{\mu} \right)^{\frac{1}{3}} \left( \frac{4a^2}{\gamma} + 1 + 2a \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{a}{(2\pi)^2}, \quad (7.37)$$

即  $N = O(a^{\frac{4}{3}})$ . 在(7.37) 中,  $\gamma = \frac{1}{2} \min\left(1, \frac{4\mu}{\nu}\right)$ ,  $c$  为(7.29) 中

的插值常数.

现考虑慢锥,慢锥  $K_\beta$  定义为

$$K_\beta = \{\omega \in D(A) \mid (A\omega, \omega) \leq \beta(\omega, \omega)\}. \quad (7.38)$$

由定理 7.4 和推论 7.5 可知这些锥的不变性.

**定理 7.10** 设  $Y$  为凸吸收集,  $\beta$  为 (7.1) 在  $Y$  中的谱障碍, 如果  $w(t)$  表示 (7.1) 在  $Y$  中由二个解之差或线性化方程 (7.18) 的解 (沿着在  $Y$  中 (7.1) 的解  $u(t) = S(t)u_0$ ), 则从  $w(t_0) \in K_\beta$  推出  $w(t) \in K_\beta, t \geq t_0$ .

**定义 7.11** 设  $\Sigma$  为  $H$  中的有限维光滑曲面, 且包含在凸吸收集  $Y$  中, 称  $\Sigma$  为  $Y$  中的谱块 (Spectrally block), 如存在谱障碍  $\beta$ , 对 (7.1) 在  $Y$  中使得

$$\Lambda(u) < \beta < \lambda(u), \quad (7.39)$$

$$\Lambda(u) = \Lambda(P(u)), \lambda(u) = \lambda(P(u)),$$

其中  $P(u)$  为正交投影从  $H$  到  $\Sigma$  在  $u$  处的切超平面  $T_u(\Sigma)$ .

定理 7.3(谱块) 能叙述为

**定理 7.12** 如  $\Sigma$  为谱块, 则  $S(t)\Sigma$  也是谱块, 对一切  $t > 0$ .

谱块的几何解释为

**定理 7.13** 设  $\Sigma$  为  $Y$  中的谱块具谱障碍  $\beta$ , 则

(a)  $\Sigma$  的切平面  $T_u(\Sigma)$  被包含在  $K_\beta$  中:

$$T_u(\Sigma) \subset K_\beta, \forall u \in \Sigma,$$

(b)  $\Sigma$  的法向平面  $N_u(\Sigma) = H \ominus T_u(\Sigma)$  被包含在  $K'_\beta = \{\omega \mid (A\omega, \omega) > \beta(\omega, \omega)\}$  中:

$$N_u(\Sigma) \subset K'_\beta, \forall u \in \Sigma.$$

称  $K_\beta$  为“慢”锥, 是因为: 如  $w(t)$  为 (7.1) 二解之差或者为 (7.18) 的解, 只要  $w(t)$  不属于  $K_\beta$ , 则  $w(t)$  指数块衰减.

为了更详细地描述这个命题, 我们作关于  $\left(\frac{\delta R}{\delta u}\omega, \omega\right)$  在吸收集中的进一步假设.

**条件 7.14** 存在常数  $d_Y > 0$  依赖于凸吸收集  $Y$  和  $\delta \in [0, 1)$  使得



$$\left(\frac{\partial R}{\partial u}(u)\omega, \omega\right) + d_Y^{1-\delta} \|w\|^{2(1-\delta)} |A^{\frac{1}{2}}u|^{2\delta} \geq 0 \quad (7.40)$$

对一切  $u \in Y, w \in D(A^{\frac{1}{2}})$  成立.

**定理 7.15** 设条件 7.14 成立, 且存在 (7.1) 在  $Y$  中的谱障碍  $\beta$  满足

$$\beta > d_Y. \quad (7.41)$$

设  $w(t)$  表示 (7.1) 在  $Y$  中的两解之差,  $w(t) = S(t)u_0 - S(t)u_1$ , 或线性化方程 (7.18) 的解 (沿着  $u(t) = S(t)u_0, u(t) \in Y$ ), 设  $w(t) \in K_\beta$ , 则

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|^2 + \beta^\delta (\beta^{1-\delta} - d_Y^{1-\delta}) \|w(t)\|^2 \leq 0. \quad (7.42)$$

**证** 对于线性化方程 (7.18) 的情况由定义推出, 对于两个解之差, 我们首先由 (7.40) 积分可得

$$\begin{aligned} & (R(u_1) - R(u_2), u_1 - u_2) \\ & + d_Y^{1-\delta} \|u_1 - u_2\|^{2(1-\delta)} |A^{\frac{1}{2}}(u_1 - u_2)|^{2\delta} \geq 0, \end{aligned} \quad (7.43)$$

$\forall u_1, u_2 \in Y \cap D(A^{\frac{1}{2}})$ . 其余的证明作为定义的直接推论得到.

对于 GL 方程, 如  $Y = Y_\infty$  为 (7.32) 所定义, 易于验证 (7.40) 是成立的, 其中

$$d_{Y_\infty} = 3(1 + \|\mu\|)\rho_\infty + a + 1, \quad (7.44)$$

$$\delta = 0. \quad (7.45)$$

注意 (7.44) 定义的  $d_{Y_\infty}$  和 (7.33) 定义的  $C_{Y_\infty}$  是一样的. 因此条件 (7.41)  $\beta > d_{Y_\infty}$  比条件 (7.22) 更弱, 因此对于 GL 方程满足 (7.22) 的任何  $\beta$  定理 7.15 自然成立.

**推论 7.16** 设  $\Sigma$  是在吸收集  $Y$  中的正不变有限维谱块曲面, 且谱障碍  $\beta$  充分, 因此条件 (7.41) 成立.  $u(t) = S(t)u_0$  为  $Y$  中 (7.1) 的解. 设  $\text{dist}(S(t)u_0, \Sigma)$  在  $\Sigma$  上达到, 设  $u_1 \in \Sigma$ ,  $\text{dist}(S(t)u_0, \Sigma) = \|u(t) - u_1\|$ , 向量  $w = u(t) - u_1$  正交于  $\Sigma$  在  $u_1$  处. 因为  $\Sigma$  为谱块, 从定理 7.13(b),  $w \in K_\beta'$ , 因此不属于

$K_\beta$ , 从定理 7.15, 如  $w(s) = S(s)u(t) - S(s)u_1$ , 则

$$\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \|w(s)\|^2_{s=0} + \beta^2 (\beta^{1-\delta} - d_1^{1-\delta}) \|w(s)\|^2_{s=0} < 0.$$

这表明  $\text{dist}(S(t)u_0, \Sigma)$  指数衰减, 只要它达到  $\Sigma$  上.

现引入另一种慢锥  $C_{N,\chi}$ , 由投影到  $(w_1, \dots, w_N)$  的投影算子所定义, 其中  $(w_1, \dots, w_N)$  为  $A$  的  $N$  个特征函数:

$$C_{N,\chi} = \{w \in H \mid (I - P_N)w\|^2 \leq \chi^2 \|P_N w\|^2\}.$$

首先注意到如果

$$\lambda_{N+1} > \beta, \quad (7.46)$$

$$\chi^2 > \frac{\beta}{\lambda_{N+1} - \beta}, \quad (7.47)$$

则

$$K_\beta \subset C_{N,\chi}. \quad (7.48)$$

如(7.46), (7.47) 满足, 则  $C_{N,\chi}$  为相同于  $K_\beta$  的慢锥, 虽然可从(4.78) 和定理 7.15 得到, 现再取  $\chi$  充分小,  $0 < \chi < \frac{1}{2}$ , 为了得到类似于定理 7.10 的不变性质, 我们作如下假设:

**条件 7.17** 存在常数  $\epsilon_Y > 0$  依赖于  $Y$  的凸吸收集使得

$$\left( \left( A + \frac{\delta R}{\delta u}(u) \right) (p + q), q - \chi^2 p \right) \geq \epsilon_Y \|p\|^2, \quad (7.49)$$

$$\forall u \in Y, P = P_N p, q = (I - P_N)q, \|q\|^2 = \chi^2 \|p\|^2.$$

作为(7.49) 的推论, 我们得到

$$\begin{aligned} & (A(u_1 - u_2) + R(u_1) - R(u_2), (I - P_N)(u_1 - u_2) \\ & - \chi^2 P_N(u_1 - u_2)) \geq \epsilon_Y (P_N(u_1 - u_2))^2, \end{aligned} \quad (7.50)$$

$$\forall u_1, u_2 \in Y \cap D(A),$$

$$\|(I - P_N)(u_1 - u_2)\|^2 = \chi^2 \|P_N(u_1 - u_2)\|^2.$$

条件(7.49) 推出

**定理 7.18** 设  $Y$  为满足(7.49) 的凸吸收集,  $w(t)$  表示  $Y$  中(7.1) 两解之差  $S(t)u_1 - S(t)u_2$  或(7.18) 的解 ( $u(t) = S(t)u_0 \in Y$ ), 如  $w(t_0) \in C_{N,\chi}$ , 则有

$$w(t) \in C_{N,\chi}, \forall t \geq t_0.$$

证 考虑  $w(t)$  为(7.18)的解, 令  $p(t) = P_N w(t), q(t) = (I - P_N)w(t)$ , 则从(7.18), 得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|q|^2 - \chi^2 |p|^2) + \left( \left( A + \frac{\delta R}{\delta u}(u(t)) \right) (p + q), q - \chi^3 p \right) = 0.$$

由(7.49), 得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|q|^2 - \chi^2 |p|^2) \leq -\varepsilon_Y (|p|^2).$$

显然, 如  $|q|^2 - \chi^2 |p|^2 < 0, t = t_0$ , 则  $|q|^2 - \chi^2 |p|^2 < 0, \forall t \geq t_0$ . 类似地证明用(7.50) 是有效的对于  $w(t) = S(t)u_1 - S(t)u_2$ .

现对 GL 方程检验条件(7.49), 取  $Y = Y_\infty$  于(7.32) 中, 可得

$$\begin{aligned} & \left( \left( A + \frac{\delta R}{\delta u}(u) \right) (p + q), q - \chi^2 p \right) \geq \lambda_{N+1} |q|^2 - \chi^2 \lambda_N |p|^2 \\ & - C_{Y_\infty} (|q|^2 + \chi^2 |p|^2 + (1 + \chi^2) |q| |p|), \end{aligned}$$

其中  $C_{Y_\infty}$  由(7.50) 给定, 如  $|q|^2 = \chi^2 |p|^2$ , 可得

$$\begin{aligned} & \left( \left( A + \frac{\delta R}{\delta u}(u) \right) (p + q), q - \chi^2 p \right) \\ & \geq \chi^2 (\lambda_{N+1} - \lambda_N - (2 + \chi + \frac{1}{\chi}) C_{Y_\infty}) |p|^2. \end{aligned}$$

如

$$\lambda_{N+1} - \lambda_N > \left( 2 + \chi + \frac{1}{\chi} \right) C_{Y_\infty}, \quad (7.51)$$

则(7.49) 满足.

注意条件(7.51) 完全类似于(7.37), 条件(7.37) 为

$$\frac{\lambda_{N+1} - \lambda_N}{2} > C_{Y_\infty}.$$

特别, (7.51) 稍强于(7.37).

这就证明了  $K_\beta, C_{N,\chi}$  对于解的差是不变的.

现考虑集合  $K_X = \bigcap_{x \in X} (x + K)$ , 对  $S(t)$  下是不变的. 事实上, 如  $u \in K_X, t > 0$ , 为了证明  $S(t)u \in K_X$ , 我们需要  $S(t)u \in y +$

$K, \forall y \in X$ , 现对任何  $y \in X$  能写成  $S(t)x, x \in X$ , 因  $S(t)X = X$ , 因  $x \in X, u \in K_X$ , 我们有  $u - x \in K$ . 由于  $K$  的解的差的不变性,

$$S(t)u - S(t)x \in K, \text{ 即 } S(t)u \in y + K.$$

现对锥  $C_{N,\chi}$ , 置

$$C_{X,N,\chi} = \bigcap_{x \in X} (x + C_{N,\chi}). \quad (7.52)$$

**定理 7.19** 设  $Y$  为(7.1)的凸吸收集, (7.40) 在  $Y$  中成立, 定理 7.15, 7.16 在  $Y$  中成立,  $N$  满足(7.46), (7.47), 则

$$\begin{aligned} (i) & S(t)(Y \cap C_{X,N,\chi}) \subset C_{X,N,\chi}; \\ (ii) & \text{dist}(S(t)u_0, X) \leq (\max_{x \in X} |u_0 - x|) \exp(-\beta^\delta(\beta^{1-\delta} - d_Y^\delta)t), \end{aligned} \quad (7.53)$$

其中  $\beta, \delta, d_Y$  定义在(7.40), (7.41);

$$(iii) X \subset C_{X,N,\chi}.$$

**证** (i), (ii) 由定理 7.15、定理 7.16 推出,  $N$  的选取推出  $C_{N,\chi} \supset K_\beta$ . (iii) 来自定理 7.15. 的确, 对任何  $x, y \in y, x - y \in K_\beta$  (即  $X \subset \bigcap_{x \in X} (X + K_\beta) \subset C_{X,N,\chi}$ ) 如不成立, 从(7.42) 和  $x = S(t)x', y = S(t)y', t$  为任意,  $x', y' \in X$  推出  $x = y$ .

现来构造惯性流形.

现来构造(7.1)的惯性流形为一积分流形, 选取初始集  $\Gamma \subset H$ , 考虑积分流形

$$\Sigma = \bigcup_{t \geq 0} S(t)\Gamma. \quad (7.54)$$

我们的目的在于证明, 对于适当选取的  $\Gamma, \Sigma$  在  $H$  中的闭包  $\bar{\Sigma}$  为(7.1)的惯性流形.

我们先描述构造的程序, 并强调几何意义, 再验证条件的一致性和可行性.

集合  $\Gamma$  为光滑的  $N-1$  维嵌入  $H$  中的流形, 包含在吸收集  $Y$  中, 设正整数  $N$  和吸收集  $Y$  选取得使定理 7.19 的结论是满足, 即  $C_{X,N,\chi}$  在  $Y$  中关于  $S(t)$  是不变的, 对某个  $\chi, 0 < \chi < \frac{1}{2}$ , 是指数

吸引的,故  $\Gamma$  包含在  $P_N H$  中.

设  $\Gamma$  为开的有界凸集  $\epsilon \subset P_N H$  的光滑定向边界,令  $\nu(u)$  表示  $\Gamma$  的在  $u$  处在  $P_N H$  中的外单位法向,  $T_u(T)$  表示  $\Gamma$  的在  $u$  处的切超平面,  $T_u(\Sigma) = N(u)R + T_u(T)$  ( $N(u) = Au + R(u)$ , 表示流形在  $u$  的相反方向), 设  $P(u)$  为  $H$  到  $N$  维线性空间  $T_u(\Sigma)$  的正交投影, 对  $\Gamma$  作如下要求:

(I)  $(N(u), \nu(u)) > 0, \forall u \in \Gamma$ ;

(II)  $\Gamma \subset C_{X, N, \chi}, \Gamma \cap X = \emptyset$ ;

(III)  $T_u(\Sigma) \subset C_{N, \chi}$ ;

(IV) 存在 (7.1) 在  $Y$  中的谱障碍使得  $\Lambda(P(u)) < \beta < \lambda(P(u)), \forall u \in \Gamma$ , (I) 是 Cauchy 问题以  $\Gamma$  为初值是适定的充分条件, 它意味着流  $S(t)$  在每一点  $u \in \Gamma$  朝着圆柱  $\epsilon \times (I - P_N)H$  的内部, (II) 是为了保证  $\Sigma \subset C_{X, N, \chi}$ , 这是容易实现的, 例如, 如果充分条件

$$\inf_{u \in \Gamma} |u| > (1 + \frac{1}{\chi}) \sup_{x \in X} |x| \quad (\text{II})'$$

满足, (I), (II) 在对  $\Gamma$  的维数  $N$  增加新的限制, 条件 (III) 要求  $T_u(\Sigma)$  被包含在慢锥  $C_{N, \chi}$  中, 这个锥的不变性的推论对于线性方程 (7.18) 的解从 (IV) 推得,  $T_u(\Sigma) \subset C_{N, \chi}, \forall u \in \Sigma$ , 最后条件 (IV) 推出  $\Sigma$  为谱块, 特别, 切超平面  $T_u(\Sigma)$  被包含在慢锥  $K_\beta$  中, 正交于  $K_\beta'$  的余集, 最后的条件是太严厉了, 从极小极大定理推出, 如 (IV) 满足, 则

$$\lambda_N < \beta < \lambda_{N+1}$$

是必要的, 因此必须在  $A$  的谱中, 在  $N$  有一点间隙 ( $\lambda_N < \lambda_{N+1}$ ).

利用不等式

$$0 \leq \lambda(u) - \lambda_N \leq \text{Tr}(P(u)AP(u) - P_N A P_N),$$

$$0 \leq \lambda_{N+1} - \lambda_N \leq \text{Tr}(P(u)AP(u) - P_N A P_N)$$

和等式

$$\text{Tr}(P(u)AP(u) - P_N A P_N)$$

$$= \frac{|A^{\frac{1}{2}}(I - P_N)N(u)|^2 - |A^{\frac{1}{2}}v(u)|^2 + |(I - P_N)N(u)|^2}{|(I - P_N)N(u)|^2 + (N(u), v(u))^2},$$

推出(IV)的充分条件和数

$$l_N(T) = \max_{u \in T} \frac{|A^{\frac{1}{2}}(I - P_N)N(u)|^2}{(N(u), v(u))^2} \quad (7.55)$$

有关,充分条件是

(IV') 区间 $(\lambda_N + l_N(T), \lambda_{N+1} - l_N(T))$ 含有(II)在Y中的谱障碍,对于III的充分条件为

$$(III') l_N(T) \leq \chi^2 \lambda_{N+1}.$$

事实上,任何元素在 $T_u(\Sigma)$ 中具有形式

$$v = \alpha N(u) + w, \alpha \in \mathbb{R}, w \in T_u(T),$$

则

$$\begin{aligned} |(I - P_N)v|^2 &= \alpha^2 |(I - P_N)N(u)|^2 \\ &\leq \frac{l_N(T)}{\lambda_{N+1}} \alpha^2 (N(u), v(u))^2, \end{aligned}$$

而

$$|P_N v|^2 \geq (P_N v, v(u))^2 = \alpha^2 (N(u), v(u))^2,$$

因此(III')推出 $|(I - P_N)v|^2 \leq \chi^2 |P_N v|^2$ .

条件(I)–(IV)是在 $\Gamma$ 上的条件,它们是几何的和静态的,即不要求(7.1)的积分.动力系统的几何要求如下

(A) 锥 $C_{N,\chi}$ 和锥集 $C_{X,N,\chi}$ 被要求是不变的和指数吸引的.

(B) 锥 $K_\beta$ 在(IV)中被要求是不变的和指数吸引的.

(C) 维数 $\geq N-1$ 的无穷小曲面被要求为指数衰减的.

**定理 7.20** 设 $T, Y, N$ 使得假设(I)–(IV)和(A), (B), (C)成立,则由(7.54)定义的积分流形 $\Sigma$ 的在 $H$ 中的闭包 $\bar{\Sigma}$ 为(7.1)的惯性流形.

**证** 考虑映照

$$\sigma: [0, \infty) \times T \rightarrow P_N \Sigma \subset P_N H, \sigma(t, u_0) = P_N S(t) u_0.$$

这是一个 $C^\infty$ 映照,进一步,它是正则的,它有一对一的Jacobi行列

式.事实上,如果  $\sigma$  的 Jacobi 行列式在  $(t_0, u_0)$  不是一对一的,则存在一个向量  $(\alpha, v_0) \neq (0, 0)$ ,  $(\alpha, v_0) \in R \times Tu_0(\Gamma)$  使得  $w = \alpha N(S(t_0)u_0 + v(t_0))$  满足  $P_N w = 0$ . 这里  $v(t_0)$  为 (7.18) 沿着  $S(t)u_0$  取的值  $v_0$  的解, 因 (7.1) 是自治的,  $-N(u) = \frac{du}{dt}$  解 (7.18). 于是  $w$  为线性化方程 (7.18) 沿着  $S(t)u_0$  的解在  $t = t_0$  的值, 具初值  $w_0 = \alpha N(u_0) + v_0$ . 因  $w_0 \in Tu_0(\Sigma)$ , 由假设 (III),  $Tu_0(\Sigma) \subset C_{N,\chi}$ . 由  $C_{N,\chi}$  对于 (7.18) 在  $Y$  中的不变性, 推出  $w \in C_{N,\chi}$  即  $\|(I - P_N)w\| \leq \chi \|P_N w\| = 0$ . 因此  $w = 0$ . 由于 (7.18) 方程问题的惟一性, 推出  $w_0 = 0$ . 这是荒唐的, 因为由 (I) 推出  $\alpha = 0, v_0 = 0$ .

我们证明  $\sigma$  是正则的, 在每个  $(t, u_0) \in R \times \Gamma$ . 特别, 它是局部可逆的推出  $P_N \Sigma$  是开的, 映照

$$P \rightarrow S(t)u,$$

$\sigma^{-1}$  为  $\sigma$  之局部逆,

$$(t, u) = \sigma^{-1}(p).$$

注意到  $P_N \times \cap P_N \Sigma = \emptyset$ . 事实上,  $\Sigma \cap X = \emptyset$ , 因  $\Gamma \cap X = \emptyset$  (条件 (II)). 但  $\Sigma \subset C_{X,N,\chi}$ , 因  $\Gamma \subset C_{X,N,\chi}((A))$ , 因此  $P_N \cap P_N \Sigma$  非空推出  $\Sigma \cap X$  非空, 荒谬. 显然, 由  $P_N \Sigma$  的闭包  $\overline{P_N \Sigma}$  可得到包含关系  $\overline{P_N \Sigma} \subset P_N X \cup P_N \Sigma \cup \Gamma$ .

在右端的三个集合是互异的, 另一方面

$$\overline{P_N \Sigma} \supset \epsilon.$$

事实上, 从等周不等式和  $S(t)\Gamma$  的  $N-1$  体积的指数衰减 (CCL) 可得. 设  $\overline{P_N \Sigma}$  删去  $P \in \epsilon$ , 则存在在  $P_N H$  中的小开球  $B$  使得  $P \in B \subset \epsilon$ , 但  $\overline{B} \cap P_N \Sigma = \emptyset$ . 这是荒唐的, 因为

$$\text{vol}_{N-1}(\partial B) \leq \text{vol}_{N-1}(P_N S(t)T) \leq \text{vol}_{N-1}S(t)\Gamma,$$

仅在  $\Gamma \times \{0\}$  上.

映照  $P_N: \Sigma \rightarrow P_N \Sigma$  是一对一的, 事实上,  $\Sigma$  是连通的, 因此  $P_N \Sigma$  也是连通的, 局部常数映照  $P \rightarrow \pi P_N^{-1}(\{p\})$  从  $P_N \Sigma$  到  $N$  是

常数,取值 1,则我们能定义映照  $\Phi: \overline{P_N \Sigma} \rightarrow \Sigma$ ,

$$\Phi(P) = \begin{cases} p, p \in \Gamma, \\ u, p \in P_N X \cup P_N \Sigma, \end{cases} \quad (7.56)$$

其中  $u$  为  $P_N u = p$  的惟一解(的确,如  $p \in P_N X$ , 因  $X \subset C_{X,N,\chi}$ , 方程  $P_N u = p$  具有惟一解).

映照  $\Phi$  是 Lipschitz 的,实际上有

$$\|(I - P_N)(\Phi(p_1) - \Phi(p_2))\| \leq \chi \|p_1 - p_2\|, \quad (7.57)$$

注意到  $\Phi$  的定义域  $\overline{P_N \Sigma}$  为  $\forall p_1, p_2 \in \overline{P_N \Sigma}$ . 开连通集  $P_N \Sigma$  的闭包满足  $\epsilon \subset \overline{P_N \Sigma}$ , 特别,  $\Phi$  定义在整个  $\epsilon$  上.

证(7.57), 首先注意到至少  $p_1, p_2$  之一不属于  $\Gamma$  (否则不需证明), 设  $p_2 \notin \Gamma$ . 如连接  $p_1, p_2$  的直线段不与  $p_N X$  相交, 则这个线段为  $C^\infty$  曲线在  $\Sigma$  上的投影.

$$p_\tau = (1 - \tau)p_1 + \tau p_2 = P_N(u_\tau), 0 < \tau \leq 1, u_\tau \in \Sigma, \text{ 则 } \frac{d}{d\tau} u_\tau \in Tu(\Sigma), \text{ 推出 ((III) 和 (A)) } \frac{d}{d\tau} u_2 \in C_{N,\chi}, \text{ 即 } \|(I - P_N) \frac{d}{d\tau} u_2\| \leq \chi \|P_N \frac{d}{d\tau} u_\tau\|,$$

则(7.57) 从积分得到. 如连接  $p_1, p_2$  的线段和  $P_N X$  相交, 则(7.57) 直接从  $\Sigma \subset C_{X,N,\chi}$  推出. 事实上, 如  $p = P_N x, x \in X$  属于这个线段, 则

$$\|(1 - P_N)(\Phi(P_i) - x)\| \leq \chi \|p_i - p\|, \quad i = 1, 2.$$

由  $\|p_1 - p\| + \|p_2 - p\| = \|p_1 - p_2\|$  推得(7.57). 因此  $\overline{\Sigma}$  为 Lip 函数  $\Phi$  的图, 余下来证明任意轨线  $S(t)u_0$  指数收敛于  $\overline{\Sigma}$ . 令  $u(t) = S(t)u_0$  为任意的, 设  $u(t) \subset Y$ , 因  $Y$  是吸收的, 如  $u(t) \in C_{X,N,\chi}, \forall t > 0$ , 则  $u(t)$  指数收敛于  $X$  和终达  $\overline{\Sigma}$  ((A)). 如  $u(t) \in Y \cap C_{X,N,\chi}$ , 则  $u(t) \in C_{X,N,\chi}, t \geq t_0$ . 此时从  $u(t)$  到  $\overline{\Sigma}$  的距离在  $\Sigma$  上达到, 此时用到  $\chi < \frac{1}{2}$ . 事实上, 考虑  $u = u(t) \in C_{X,N,\chi}, p = P_N u, v = \Phi(p)$ . 如  $p \in P_N X, p = P_N x$ , 则从

$$\|(I - P_N)(u - x)\| \leq \chi \|P_N(u - x)\| = 0$$



推出  $u \in \chi$ . 因此只需证明: 设  $p \in \Gamma$ , 当增加  $t$  (的确, 存在  $t_n \rightarrow \infty$ , 使得  $P(S(t_n)u_0) \in \Gamma$ , 则  $\Gamma \cap P_N X$  非空), 则  $p \in P_N \Sigma$ , 因此  $\in \Sigma$ . 我们断言  $|v - u| < |u - x|, \forall x \in X$ . 事实上, 因

$$\begin{aligned} P_N v &= P_N u = p, v - u = (I - P_N)(v - u), \\ |v - u| &= |(I - P_N)(v - u)| \\ &\leq |(I - P_N)(v - x)| + |(I - P_N)(x - u)| \\ &\leq \chi(|P_N x - p| + |P_N x - p|) = 2\chi|P_N x - p| \\ &\leq |P_N x - p| \leq |x - u|. \end{aligned}$$

因此从  $u(t)$  到  $\Sigma$  的距离在  $\Sigma$  上达到 ( $t \geq t_0$ ). 因  $\Sigma$  是块((B)). 推出  $\text{dist}(u(t), \Sigma)$  指数衰减, 定理证毕.

现在我们对于 GL 方程指出  $\Gamma$  的构造, 验证条件(A), (B), (C) 和(I)–(IV).

设  $\mu, \nu \neq 0, \frac{\mu}{\nu} > 0$ , 置

$$Y = \{u \mid \|u\|_{L^4}^2 \leq R_\infty\}. \quad (7.58)$$

设

$$R_\infty \geq \rho_\infty, \quad (7.59)$$

导出  $\Gamma$  具形式

$$\Gamma = \{u \mid P_N u = u, E(u) = R\}, \quad (7.60)$$

其中  $N, R$  待定,  $E(u)$  为能量泛函

$$E(u) = \int_0^1 (|\nabla u|^2 + \frac{\mu}{2\nu} |u|^4) dx.$$

基于(7.29), 有  $\Gamma \subset Y$ . 如果

$$R_\infty = c \left[ \left( \frac{2\nu R}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \frac{2\nu R}{\mu} \right)^{\frac{1}{3}} R^{\frac{1}{3}} \right]. \quad (7.61)$$

进一步由(\*) 推出在吸引子上我们有

$$\sup_{x \in X} E(x) \leq \frac{4a^2}{\gamma}. \quad (7.62)$$

其中  $\gamma = \frac{1}{2} \min(1, \frac{4\nu}{\mu})$  选取  $R$  充分大满足(7.59).

因  $\rho_\infty = O(a^{\frac{4}{3}})$  (大的  $a$ ),  $R_\infty = O(R^{\frac{2}{3}})$  (大的  $R$ ). (7.59) 满足对  $R$  为  $O(a^2)$ . 同时选取  $R$  使得

$$\sup_{i \in X} E(x) < R. \quad (7.63)$$

基于(7.62), 这些要求满足, 如果

$$k \geq k_1(a^2 + 1), \quad (7.64)$$

其中  $k_1$  为常数依赖于  $\frac{\nu}{\mu}$ , 锥  $C_{N, \chi}$  和锥集  $C_{X, N, \chi}$  是不变的和指数吸引的, 如(7.15) 成立, 即

$$\lambda_{N+1} - \lambda_N > \left(2 + \chi + \frac{1}{\chi}\right) [3(1 + |\mu|)R_\infty + a + 1]. \quad (7.65)$$

因  $R_\infty \sim R^{\frac{2}{3}}$ ,  $R \geq k_1 a^2$ , (7.65) 等价于要求

$$N \geq k_2(R^{\frac{2}{3}} + 1). \quad (7.66)$$

$k_2$  为一常数依赖于  $\frac{\nu}{\mu}$ ,  $\chi$ . 因此条件(A) 是满足的. 如果(7.64) 和(7.66) 满足, 条件(C) 包含吸引子的维数来自(7.66), 以及

$$\begin{aligned} & -\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \text{Tr} \left( A + \frac{\delta R}{\delta u}(u) \right) \cdot Q_N ds \\ & = \pi_N \leq -2\pi \sum_{j=1}^N j^2 + \left(a + \frac{1}{2}\right) N + c(1 + |\mu|^2)^{\frac{3}{2}} a^{\frac{3}{2}}, \\ & d_H \mathcal{A} \leq c_1(1 + |\mu|)^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}}, \\ & d_F \mathcal{A} \leq c_2(1 + |\mu|)^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

具性质 IV 的谱障碍具  $\beta$  形式:

$$\beta = \frac{\lambda_N + \lambda_{N+1}}{2}, \quad (7.67)$$

则从(7.66) 可知条件(B) 满足.

现开始验证条件(I) - (IV),  $\Gamma$  的外单位法向为

$$\nu(\mu) = \frac{P_{N\omega}(u)}{\|P_{N\omega}(u)\|_{L^2}}, \quad (7.68)$$

这里  $w = w(u)$  为

$$w(u) = -\Delta u + \frac{\mu}{\nu} |u|^2 u, \quad (7.69)$$

$N(u)$  为

$$N(u) = -\Delta u + |u|^2 u - au + i\nu[-\Delta u + \frac{\mu}{\nu} |u|^2 u]. \quad (7.70)$$

注意到  $P_N u = u \in \Gamma$ , 我们有

$$(I - P_N)N(u) = (1 + i\mu)(I - P_N)(|u|^2 u), \quad (7.71)$$

$$(I - P_N)w(u) = \frac{\mu}{\nu}(I - P_N)|u|^2 u. \quad (7.72)$$

再注意到

$$(-\Delta u, |u|^2 u) = \int_0^1 (|\nabla u|^2 |u|^2 + \frac{1}{2} |\nabla(|u|^2)|^2) dx. \quad (7.73)$$

我们计算

$$\begin{aligned} (N(u), w(u)) &= \|\Delta u\|_{L^2}^2 + \frac{\mu}{\nu} \int_0^1 |u|^6 dx + \left(1 + \frac{\mu}{\nu}\right) \\ &\quad \cdot (-\Delta u, |u|^2 u) - a \left[ \|\Delta u\|_{L^2}^2 + \frac{\mu}{\nu} \int_0^1 |u|^4 dx, \right. \end{aligned} \quad (7.74)$$

基于(7.71), (7.72), 我们有

$$(N(u), (I - P_N)w(u)) = \frac{\mu}{\nu} \|(I - P_N)|u|^2 u\|_{L^2}^2. \quad (7.75)$$

联合(7.73), (7.74), (7.75) 得

$$\begin{aligned} (N(u), P_N w(u)) &\geq \|\Delta u\|_{L^2}^2 + \frac{\mu}{\nu} \int_0^1 |u|^6 dx \\ &\quad + \left(1 + \frac{\mu}{\nu}\right) \left[ \int_0^1 (|u|^2 |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} |\nabla(|u|^2)|^2) dx. \right. \end{aligned} \quad (7.76)$$

由不等式

$$\|\Delta u\|_{L^2}^2 \geq \frac{\|\nabla u\|_{L^2}^4}{\|u\|_{L^2}^2}, \quad (7.77)$$

$$\|u\|_{L^6}^6 \geq \frac{\|u\|_{L^2}^8}{\|u\|_{L^2}^2} \quad (7.78)$$

推出

$$\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \frac{\mu}{\nu} \int_0^1 |u|^6 dx \geq \frac{\gamma}{\|u\|_{L^2}^2} (E(u))^2, \quad (7.79)$$

其中  $\gamma = \frac{1}{2} \min\left(1, \frac{4\nu}{\mu}\right)$ . 现如  $u \in \Gamma$ , 则  $E(u) = R$ . 特别

$$\|u\|_{L^4}^4 \leq \frac{2\nu}{\mu} R, \quad (7.80)$$

$$\|u\|_{L^2}^2 \leq \left(\frac{2\nu}{\mu} R\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (7.81)$$

由(7.81)代入(7.79)得

$$\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \frac{\mu}{\nu} \int_0^1 |u|^6 dx \geq \left(\frac{2\nu}{\mu}\right)^{-\frac{1}{2}} \gamma R^{\frac{3}{2}}, u \in \Gamma. \quad (7.82)$$

由(7.76),  $u \in \Gamma$ , 得

$$\begin{aligned} (N(u), P_N w(u)) &\geq \frac{\gamma}{2} \left(\frac{2\nu}{\mu}\right)^{-\frac{1}{2}} R^{\frac{3}{2}} - 2aR + \frac{1}{2} (\|\Delta u\|_{L^2}^2 \\ &+ \frac{\mu}{\nu} \|u\|_{L^6}^6) + a \|\nabla u\|_{L^2}^2 + (1 + \frac{\mu}{\nu}) \|\nabla(|u|^2)\|_{L^2}^2 \\ &- \frac{\mu}{\nu} \|(I - P_N)|u|^2 u\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (7.83)$$

余下来估计  $\|(I - P_N)|u|^2 u\|_{L^2}^2$ , 利用

$$\|(I - P_N)v\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{(2\pi(N+1))^2} \|\nabla v\|_{L^2}^2, \quad (7.84)$$

这里  $v = |u|^2 u$ , 因  $\nabla(|u|^2 u) = u \nabla(|u|^2) + |u|^2 \nabla u$ , 可得

$$\begin{aligned} \|(I - P_N)|u|^2 u\|_{L^2}^2 &\leq \frac{C}{(N+1)^2} [\|u\|_{L^\infty}^4 \|\nabla u\|_{L^2}^2 \\ &+ \|u\|_{L^\infty}^2 \|\nabla(|u|^2)\|_{L^2}^2], \end{aligned} \quad (7.85)$$

当  $u \in \Gamma$ ,  $\|u\|_{L^\infty}^2 \leq \widehat{R}_\infty$ , 由(7.66), 得

$$\begin{aligned} \|(I - P_N)(|u|^2 u)\|_{L^2}^2 &\leq k_3 \|\nabla u\|_{L^2}^2 \\ &+ \frac{k_4}{N+1} \|\nabla(|u|^2)\|_{L^2}^2, u \in \Gamma. \end{aligned} \quad (7.86)$$

在(7.86)中,  $k_3, k_4$  为常数依赖于  $\mu, \nu$ .

现设

$$a \geq \frac{\mu}{\nu} k_3, \quad (7.87)$$

$$N+1 \geq \left(1 + \frac{\mu}{\nu}\right)^4 k_4, \quad (7.88)$$

则由(7.83)和(7.86)可得

$$\begin{aligned} (N(u), P_N w(u)) &\geq \frac{\gamma}{2} \left(\frac{2\nu}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} R^{\frac{3}{2}} - QaR \\ &+ \frac{1}{2} (\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \frac{\mu}{\nu} \|\Delta u\|_{L^6}^6). \end{aligned} \quad (7.89)$$

最后, 从(7.89)推出

$$(N(u), P_N w(u)) \geq k_5 R^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} (\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \frac{\mu}{\nu} \|u\|_{L^6}^6), \quad (7.90)$$

其中(7.64)满足.

于是我们证明了

**命题 7.21** 集合  $\Gamma$  为(7.60)所定义, 满足性质(I),  $N, R$  满足(7.64), (7.66), (7.87), (7.88).

显然, 如果我们关心  $N, R$  作为  $a$  的函数, 则要求

$$N \sim a^{\frac{4}{3}}, R \sim a^2.$$

我们验证条件(IV)或充分条件(IV'), 为此需要  $l_N(T)$ . 我们必须估计

$$\|A^{\frac{1}{2}}(I - P_N)N(u)\|_{L^2}^2, \|P_N w\|_{L^2}^2.$$

由(7.71), (7.85)可得

$$\|A^{\frac{1}{2}}(I - P_N)N(u)\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{(2\pi(N+1))^2} \|A(I - P_N)N(u)\|_{L^2}^2.$$

因

$$\|\Delta(|u|^2)\|_{L^2}^2 \leq c(\|u\|_{L^\infty}^4 \|\Delta u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^\infty}^2 \|\nabla u\|_{L^2}^4) \quad (7.91)$$

利用插值不等式

$$\|\nabla u\|_{L^2}^4 \leq \|u\|_{L^2}^2 \|\Delta u\|_{L^2}^2,$$

连同(7.85), (7.91) 得

$$\begin{aligned} \|A^{\frac{1}{2}}(I - P_N)N(u)\|_{L^2}^2 &\leq \frac{c}{(N+1)^2} [\|u\|_{L^\infty}^4 (\|\Delta u\|_{L^2}^2 \\ &+ \|\nabla u\|_{L^2}^2)]. \end{aligned} \quad (7.92)$$

这里用到了  $\|\nabla(|u|^2)\|_{L^2}^2 \leq 4\|u\|_{L^2}^2 \|\nabla u\|_{L^2}^2$ , 如  $u \in \Gamma$ , 和 (7.66) 成立, 则从(7.92), (7.90), 对  $u \in \Gamma$  有

$$\|A^{\frac{1}{2}}(I - P_N)N(u)\|_{L^2}^2 \leq k_6(N(u), P_N w(u)), \quad (7.93)$$

其中  $k_6$  为常数依赖于  $\mu, \nu$ .

另一方面,

$$\|P_N w(u)\|_{L^2}^2 \leq \|w(u)\|_{L^2}^2 \leq 2(\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \frac{\mu^2}{\nu^2} \|u\|_{L^6}^6).$$

基于(7.90) 推出

$$\|P_N w(u)\|_{L^2}^2 \leq k_7(N(u), P_N w(u)). \quad (7.94)$$

从(7.93), (7.94), 以  $\nu(u), l_N(T)$  的定义可得

$$l_N(T) \leq k_8, \quad (7.95)$$

其中  $k_8$  为常数仅依赖于  $\mu, \nu$ . 因此条件(IV')((IV)) 满足, 如果  $\beta$

$= \frac{\lambda_N + \lambda_{N+1}}{2}$  属于区间  $(\lambda_N + k_8, \lambda_{N+1} - k_8)$ , 即

$$\frac{\lambda_{N+1} - \lambda_N}{2} > k_8, \quad (7.96)$$

这是类似于(7.88) 的要求.

余下来验证条件(II) 和(III). 对(III) 有充分条件(III').

$$l_N(T) < \chi^2 \lambda_{N+1}.$$

这是

$$\lambda_{N+1} > \frac{1}{\chi^2} k_8 \quad (7.97)$$

的推论.

为了验证条件(II), 我们需要更细心地估计. 首先, 从(7.62), (7.29) 和  $\frac{d}{dt} \|u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^4}^4 \leq a^2$ , 可得

$$\sup_{t \in X} \|v\|_{L^2} \leq a^{\frac{1}{2}}, \quad (7.98)$$

$$\sup_{t \in X} \|\nabla v\|_{L^2} \leq \frac{2a}{r}, \quad (7.99)$$

$$\sup_{t \in X} \|v\|_{L^4} \leq \left(\frac{8\nu}{\gamma\mu}\right)^{\frac{1}{4}} a^{\frac{1}{2}}, \quad (7.100)$$

$$\sup_{t \in X} \|v\|_{L^\infty} \leq c \left(\frac{8}{\gamma} \cdot \frac{\nu}{\mu}\right)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}}. \quad (7.101)$$

设  $u \in \Gamma, v \in X$  为任意的, 我们必须验证在什么关于  $R_N$  条件下能保证

$$\|(I - P_N)(u - v)\|_{L^2} \leq \chi \|P_N(u - v)\|_{L^2}. \quad (7.102)$$

首先注意到  $P_N u = u$ , 因此

$$\|(I - P_N)(u - v)\|_{L^2} = \|(I - P_N)v\|_{L^2} \leq \frac{\|\nabla v\|_{L^2}}{\sqrt{\lambda_{N+1}}},$$

连同(7.99) 可得

$$\|(I - P_N)(u - v)\|_{L^2} \leq (2\pi(N+1))^{-1} \frac{2}{\gamma} a. \quad (7.103)$$

因  $E(u) = R$  有二种情况:

$$(a) \|\nabla u\|_{L^2} < \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ 或}$$

$$(b) \|u\|_{L^4} \geq \left(\frac{\nu}{\mu} R\right)^{\frac{1}{4}}.$$

如(a) 成立, 则有

$$\begin{aligned} \chi \|P_N(u - v)\|_{L^2} &\geq \frac{\chi}{\sqrt{\lambda_N}} \|\nabla P_N(u - v)\|_{L^2} \\ &\geq \frac{\chi}{\sqrt{\lambda_N}} \|\nabla u\|_{L^2} - \frac{\chi}{\sqrt{\lambda_N}} \|\nabla v\|_{L^2} \geq \frac{\chi}{\sqrt{\lambda_N}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} R^{\frac{1}{2}} - \frac{2a}{\gamma} \right). \end{aligned}$$

基于(7.64) 我们有

$$\chi \|P_N(u-v)\|_{L^2} \geq \frac{\chi}{\sqrt{\lambda_N}} \left[ k_1^{\frac{1}{2}} (a^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - \frac{2a}{\gamma} \right] \quad (7.104)$$

联合(7.103), 可知(7.102) 成立, 如果  $k_1$  充分大,

$$k_1^{\frac{1}{2}} \geq \left( 2 + \frac{1}{\chi} \right) \frac{2}{\gamma}. \quad (7.105)$$

如(b) 成立, 则因

$$\begin{aligned} \chi \|P_N(u-v)\|_{L^2} &= \chi \|u - P_N v\|_{L^2} \\ &\geq \chi \|u-v\|_{L^2} - \chi \|(I-P_N)v\|_{L^2}. \end{aligned}$$

为了满足(7.102), 充分证明满足

$$\|u-v\|_{L^2} \geq (2\pi(N+1))^{-1} \frac{2}{\gamma} a \left( 1 + \frac{1}{\chi} \right), \quad (7.106)$$

利用  $\|u-v\|_{L^2} \geq \frac{\|u-v\|_{L^4}^2}{\|u-v\|_{L^\infty}}, \|u-v\|_{L^4} \geq \left( \frac{\nu}{\mu} R \right)^{\frac{1}{4}} -$

$\left( \frac{8\nu}{\gamma\mu} \right)^{\frac{1}{4}} a^{\frac{1}{2}}, \|u-v\|_{L^\infty} \leq \tilde{R}_\infty^{\frac{1}{2}} + c \left( \frac{8\nu}{\gamma\mu} \right)^{\frac{1}{6}} \left( \frac{2}{\gamma} \right)^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}},$  可得

$$\|u-v\|_{L^2} \geq k a^{\frac{1}{3}}, \quad (7.107)$$

其中常数  $k$  依赖于  $\frac{\nu}{\mu}$ .

从(7.107) 可知(7.106) 成立, 如果

$$2\pi(N+1) > \frac{2}{\gamma} \left( 1 + \frac{1}{\chi} \right) k^{-1} a^{\frac{2}{3}}, \quad (7.108)$$

再注意(7.108) 为比(7.64), (7.66) 更弱的要求, 如果(7.64), (7.66) 成立, 则条件(II) 满足.

于是我们证明了:

**定理 7.22** 设  $\mu \neq 0, \nu \neq 0, \frac{\mu}{\nu} > 0$ , 则存在常数  $k_1, k_2$  依赖于  $\mu, \nu$  使得: 如果

$$R > k_1(1+a^2), N \geq k_2(1+k^{\frac{2}{3}}),$$

则积分流形  $\Sigma = \bigcup_{t>0} S(t)T$  的闭包是 GL 方程的惯性流形, 其中



$$\Gamma = \{u \mid P_N u = u, \int_0^1 (\nabla u)^2 dx + \frac{\mu}{2\nu} \int_0^1 |u|^4 dx = R\}.$$

## §8 广义 Ginzburg-Landau 方程的 Gevrey 正则性

现考虑如下广义 GL 方程

$$u_t = \alpha_0 u + \alpha_1 u_{xx} + \alpha_2 |u|^2 u + \alpha_3 |u|^2 u_x + \alpha_4 u^2 \bar{u}_x + \alpha_5 |u|^4 u, \quad (8.1)$$

其中  $\alpha_j = a_j + ib_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, 5$ ,  $\alpha_0 = a_0$ ,  $a_j, b_j$  为实数, 这里  $\bar{u}$  表示  $u$  的复数共轭. 令  $X_\alpha = D(A^\alpha)$ ,  $\alpha > 0$ ,  $H = L^2[0, L]$ ,  $V = D(A^{\frac{1}{2}})$ ,  $A = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ .  $H^p$  模为  $\|\cdot\|_p$ . 特别  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ . 这里考虑 (8.1) 的周期初边值问题,

$$u(\cdot, t) \text{ 为 } L \text{ 周期的}, \quad (8.2)$$

$$u(0) = u_0. \quad (8.3)$$

现叙述一下前面已得到的已知结果: 如  $a_1 > 0 > a_5$ ,  $-4a_1 a_5 > (b_3 - b_4)^2$ , 则存在惟一整体解

$$u(t) \in C([0, \infty), V) \cap C^1((0, \infty), V) \cap C((0, \infty), D(A)). \quad (8.4)$$

其中  $u(0) \in V$ . 非线性解半群  $S(t): V \rightarrow V$  是确定的,  $S(t)u_0 = u(t)$ .

我们有如下估计:

$$\|u\|^2 \leq \|u_0\|^2 e^{-t} + K_0(1 - e^{-t}) \leq \|u_0\|^2 + K_0 \equiv K_0', \quad (8.5)$$

$$\int_t^{t+r} \|u_x\|^2 ds \leq K_1 \|u\|^2 + K_1' r. \quad (8.6)$$

$$\frac{dy}{dt} \leq K_2 y^2, \quad (8.7)$$

$$\|u\|_{H^1} \leq K_3, \quad (8.8)$$

其中  $y = 1 + \|u_x\|^2$ . 常数  $K_0, K_1, K_1'$  依赖于  $\alpha_j$  和  $L$ , 而  $K_0'$ ,

$K_2, K_3$  依赖于  $u_0, \alpha_j$  和  $L$ . 常数  $r > 0$  是任意选取的.

由(8.5) 有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|u\| \leq \rho_0, \rho_0 = \sqrt{K_0}. \quad (8.9)$$

推之, 如  $\|u_0\| \leq k, \rho_0' > \rho_0$ , 则存在时刻

$$t_0 = t_0(R, \rho_0') = \log \frac{R^2 - \rho_0'^2}{\rho_0'^2 - \rho_0^2}, \quad (8.10)$$

使得

$$\|u\| \leq \rho_0', \forall t \geq t_0. \quad (8.11)$$

因此, 从(8.6) 对  $t > t_0$  有

$$\int_t^{t+r} \|u_s\|^2 ds \leq k_1 \rho_0'^2 + K_1' r = K_4(\rho_0', r). \quad (8.12)$$

应用一致 Gronwall 不等式于(8.7), (8.12) 可得

$$\|u_r\|^2 \leq y \leq \frac{r + K_4}{r} e^{K_2(r + K_1)}, \forall t \geq t_0 + r. \quad (8.13)$$

联系(8.11) 和(8.13) 可知, 存在正数  $\rho = \rho(r, \rho_0')$  和  $t^* = t_0 + r$ , 使得

$$\|u\|_V \leq \rho, t \geq t^*. \quad (8.14)$$

因  $H^2 \hookrightarrow H^1$  为紧嵌入,  $S(t): V \rightarrow V$  是紧的,  $t > 0$ . 因此存在整体吸引子  $\mathcal{A}$ .

**定理 8.1** 设  $a_1 > 0 > a_5, -4a_1a_5 > (b_3 - b_4)^2, a_j + ib_j = \alpha_j$ , 则存在在  $V$  中的惟一整体紧的连通的吸引子, 它是  $B(0, \rho)$  的  $\omega$  极限集, 即有

$$\mathcal{A} = \bigcap_{s > 0} \overline{\bigcup_{t \leq s} (S(t)B(0, \rho))}, \quad (8.15)$$

且整体吸引子具有有限的 Hausdorff 和分形维数.

现考虑 Gevrey 正则性和解析性. 设  $L = 1$ .

$f \in L^2_{\text{per}}[0, 1]$  展为  $F$  氏级数,

$$f(x) = \sum_n f_n e^{2\pi i n x}, \quad (8.16)$$

$\|f\|^2 = \sum_n |f_n|^2$  对  $s > 0, A^s$  的定义域为

$$D(A) = \{u \in L^2_{\text{per}} : \|A^s u\|^2 = \sum_n (2\pi |n|)^{4s} |u_n|^2 < \infty\}. \quad (8.17)$$

进一步定义

$$\begin{aligned} D(A^{\tau\Lambda}) &= \{u \in L^2_{\text{per}} : \|A^{\tau\Lambda} u\|^2 \\ &= \sum_n (2\pi |n|)^{4s} e^{4\pi |n|^{\frac{1}{2}\tau}} |u_n|^2 < \infty\}, \end{aligned} \quad (8.18)$$

它是一个特殊的 Gevrey 类.

这里我们仅关心  $s = \frac{1}{2}, \tau > 0$  的情况, 令  $G_\tau = D(A^{\frac{1}{2}} e^{\tau\Lambda^{\frac{1}{2}}})$ ,

$\|u\|_{G_\tau} = \|A^{\frac{1}{2}} e^{\tau\Lambda^{\frac{1}{2}}} u\|$ , 注意到  $\tau > \tau', G_\tau \subset G_{\tau'}, G_\tau \subset H^k_{\text{per}}, k = 1, 2, 3, \dots$ .

**定理 8.2** 设  $a_1 > 0 > a_5, -4a_1 a_5 > (b_3 - b_4)^2$ , 则有 (i) 如  $u_0 \in H^1_{\text{per}}[0, 1]$ , 则存在  $T_* = T_*(\|u_0\|_{H^1}) > 0$ , 使得  $u(t) \in G_t = D(A^{\frac{1}{2}} e^{t\Lambda^{\frac{1}{2}}}), t \in (0, T_*)$ .

映照  $t \rightarrow A^{\frac{1}{2}} e^{t\Lambda^{\frac{1}{2}}} u(t)$  是在复平面含有  $(0, T_*)$  的对称扇形区域上解析的.

$u(t) \in G_\sigma, t \in [T_*, \infty)$ . 映照  $t \rightarrow A^{\frac{1}{2}} e^{\sigma\Lambda^{\frac{1}{2}}} u(t)$  在复平面环绕  $(T_*, \infty)$  的带形区域上是解析的, 其中常数  $\sigma = \sigma(a_j) > 0$  与  $t, u_0$  无关.

(ii) 如  $u_0 \in G_\lambda \subset H^1_{\text{per}}, \lambda > 0$ , 则  $u(t) \in G_\mu, t \in (0, \infty)$ , 映照  $t \rightarrow A^{\frac{1}{2}} e^{t\Lambda^{\frac{1}{2}}} u(t)$  在含有  $(0, \infty)$  的复平面的“铅笔状”区域内解析.

**证** 先证 (i). 令  $v = e^{t\Lambda^{\frac{1}{2}}} u(x, t)$ ,

$$v = \sum_n e^{2\pi i n t} u_n(t) e^{2\pi i n x}, \quad (8.19)$$

则有

$$v_t = A^{\frac{1}{2}} v + e^{t\Lambda^{\frac{1}{2}}} u_t = A^{\frac{1}{2}} v + e^{t\Lambda^{\frac{1}{2}}} (-\alpha_1 A u + N(u))$$

$$= A^{\frac{1}{2}}v + \alpha_0 v + \alpha_1 Av + e^{tA^{\frac{1}{2}}}(\alpha_2 |u|^2 u + \alpha_3 |u|^2 u_x + \alpha_4 u^2 u_x + \alpha_5 |u|^4 u), \quad (8.20)$$

其中方程(8.1)可改写为

$$\frac{du}{dt} + \alpha_1 Au = N(u), \alpha_1 = \operatorname{Re}(\alpha_1) > 0. \quad (8.21)$$

(8.20) 和  $Av$  作内积, 再取实部, 可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{du}{dt} \|A^{\frac{1}{2}}v\|^2 &= \operatorname{Re}(A^{\frac{1}{2}}v_t, A^{\frac{1}{2}}v) \\ &= (Av, A^{\frac{1}{2}}v) + \alpha_0 \|A^{\frac{1}{2}}v\|^2 - \alpha_1 \|Av\|^2 \\ &\quad + \operatorname{Re}(A^{\frac{1}{2}}e^{tA^{\frac{1}{2}}}(\alpha_2 |u|^2 u + \alpha_3 |u|^2 u_x \\ &\quad + \alpha_4 u^2 u_x + \alpha_5 |u|^4 u), A^{\frac{1}{2}}e^{tA^{\frac{1}{2}}}u), \end{aligned} \quad (8.22)$$

估计上式右端的项, 首先有

$$\begin{aligned} (Av, A^{\frac{1}{2}}v) &\leq \|Av\| \|A^{\frac{1}{2}}v\| \leq \varepsilon \|Av\|^2 \\ &\quad + \varepsilon^{-1} \|A^{\frac{1}{2}}v\|^2, \end{aligned} \quad (8.23)$$

$\varepsilon > 0$  待定. 注意以下各式

$$|u|^2 u = \sum_M \left( \sum_{k+l=m=M} u_k u_l \bar{u}_m \right) e^{2\pi i M t}, \quad (8.24)$$

$$|u|^2 u_x = \sum_M \left( \sum_{k+l=m=M} (2\pi i k) u_k u_l \bar{u}_m \right) e^{2\pi i M t}, \quad (8.25)$$

$$|u|^2 \bar{u}_x = - \sum_M \left( \sum_{k+l=m=M} (2\pi i m) u_k u_l \bar{u}_m \right) e^{2\pi i M t}, \quad (8.26)$$

$$|u|^4 u = \sum_M \left( \sum_{k+l+s=m=M} u_k u_l u_s \bar{u}_m \right) e^{2\pi i M t}. \quad (8.27)$$

因此能估计

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}(A^{\frac{1}{2}}e^{tA^{\frac{1}{2}}} \alpha_2 |u|^2 u, A^{\frac{1}{2}}e^{tA^{\frac{1}{2}}} u) \\ &= \operatorname{Re}(\alpha_2 e^{tA^{\frac{1}{2}}} |u|^2 u, A e^{tA^{\frac{1}{2}}} u) \\ &= \operatorname{Re} \alpha_2 \sum_M 4\pi^2 M^2 \bar{u}_M e^{2\pi i M t} \left( \sum_{k+l=m=M} e^{2\pi i M t} u_k u_l \bar{u}_m \right) \\ &\leq |\alpha_2| \sum_M 4\pi^2 M^2 |u_M| e^{2\pi i M t} \left( \sum_{k+l=m=M} e^{2\pi i k t} |u_k| e^{2\pi i m t} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot |u_l| e^{2\pi i m \cdot l} |u_m| \leq |\alpha_2| (|\hat{v}|^2 + |\hat{v}|, A\hat{v}) \\ & \leq |\alpha_2| (\|A\hat{v}\|_6^3 \|A\hat{v}\| \leq |\alpha_2| (\varepsilon^{-1} \|\hat{v}\|_6^6 + \varepsilon \|A\hat{v}\|^2), \end{aligned} \quad (8.28)$$

其中  $\hat{v} = \sum_n e^{2\pi i n \cdot l} |u_n| e^{2\pi i m \cdot l}$ . 注意到

$$\|\hat{v}\| = \|v\|, \|A^{\frac{1}{2}}\hat{v}\| = \|A^{\frac{1}{2}}v\|, \|A\hat{v}\| = \|Av\|. \quad (8.29)$$

由 Gagliardo-Nirenberg 不等式有

$$\begin{aligned} \|\hat{v}\|_6 & \leq c_1 \|\hat{v}\|^{\frac{2}{3}} \|\hat{v}\|_{H^1}^{\frac{1}{3}} \\ & = c_1 \|v\|^{\frac{2}{3}} (\|v\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}v\|^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (8.30)$$

从(8.28)推得

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(A^{\frac{1}{2}}e^{iA^{\frac{1}{2}}} \alpha_2 |u|^2 u, A^{\frac{1}{2}}e^{iA^{\frac{1}{2}}} u) & \leq |\alpha_2| (c_2 \varepsilon^{-1} \|v\|^4 \\ & \cdot (\|v\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}v\|^2) + \varepsilon \|Av\|^2). \end{aligned} \quad (8.31)$$

类似地, (8.22) 右端最后三项有

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(A^{\frac{1}{2}}e^{iA^{\frac{1}{2}}} \alpha_3 |u|^2 u_x, A^{\frac{1}{2}}e^{iA^{\frac{1}{2}}} u) & \leq |\alpha_3| (|\hat{v}|^2 + |\hat{v}_x|, A\hat{v}) \\ & \leq |\alpha_3| (\|v\|_\infty^2 \|A^{\frac{1}{2}}v\| \|Av\| \\ & \leq c_3 |\alpha_3| (\|v\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}v\|^2) \|A^{\frac{1}{2}}v\| \|Av\|, \end{aligned} \quad (8.32)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(A^{\frac{1}{2}}e^{iA^{\frac{1}{2}}} \alpha_4 u^2 \bar{u}_x, A^{\frac{1}{2}}e^{iA^{\frac{1}{2}}} u) & \leq |\alpha_4| (|\hat{v}|^2 + |\hat{v}_x|, A\hat{v}) \\ & \leq c_4 |\alpha_4| (\|v\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}v\|^2) \|A^{\frac{1}{2}}v\| \|Av\|, \end{aligned} \quad (8.33)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(A^{\frac{1}{2}}e^{iA^{\frac{1}{2}}} \alpha_5 |u|^4 u, A^{\frac{1}{2}}e^{iA^{\frac{1}{2}}} u) & \leq |\alpha_5| (|\hat{v}|^4 + |\hat{v}|, A\hat{v}) \\ & \leq |\alpha_5| \|\hat{v}\|_6^5 \|A\hat{v}\| \leq \alpha_5 (\varepsilon^{-1} \|\hat{v}\|_{10}^{10} + \varepsilon \|A\hat{v}\|^2) \\ & \leq |\alpha_5| [\varepsilon^{-1} c_4 \|v\|^6 (\|v\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}v\|^2)^2 + \varepsilon \|Av\|^2]. \end{aligned} \quad (8.34)$$

在(8.32), (8.33) 中我们利用了  $H^1 \hookrightarrow L^\infty$ , 而在(8.34) 中的最后一步用到了 Gagliardo - Nirenberg 不等式

$$\begin{aligned}\|\hat{v}\|_{10} &\leq c_5 \|\hat{v}\|^{\frac{3}{5}} \|\hat{v}\|^{\frac{2}{5}} \\ &= c_5 \|v\|^{\frac{3}{5}} (\|v\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}v\|^2)^{\frac{1}{5}}.\end{aligned}\quad (8.35)$$

从(8.19)和(8.5)易知

$$\|v\|^2 \leq \|v_0(t)\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}v\|^2 \leq K'_0 + \|A^{\frac{1}{2}}v\|^2, \quad (8.36)$$

其中  $v_0(t)$  为  $u(t)$  的零次 F 氏系数,  $K'_0 = K'_0(u_0)$  来自(8.5).

令  $y = 1 + \|A^{\frac{1}{2}}v\|^2$ , 将(8.23), (8.31), (8.32), (8.33), (8.34) 和(8.36)代入(8.22), 取  $\epsilon > 0$  充分小有

$$\frac{dy}{dt} = K_5 y^5, \quad (8.37)$$

其中  $K_5 = K_5(u_0)$ , 推出

$$y(t) \leq \frac{y(0)}{(1 - 4y^4(0)K_5 t)^{\frac{1}{4}}}. \quad (8.38)$$

只要  $t < \frac{1}{4y^4(0)K_5}$ , 则有

$$\begin{aligned}\|A^{\frac{1}{2}}e^{tA^{\frac{1}{2}}}u(t)\|^2 &\leq y(t) = 1 + \|A^{\frac{1}{2}}v\|^2 \\ &\leq 2y(0) = 2(1 + \|u_0\|_{H^1}^2),\end{aligned}\quad (8.39)$$

$$0 \leq t \leq T_0(\|u_0\|_{H^1}) \equiv \frac{15}{64K_5(1 + \|u_0\|_{H^1}^2)^4}. \quad (8.40)$$

因此  $u(t) \in D(A^{\frac{1}{2}}e^{tA^{\frac{1}{2}}})$ ,  $t \in (0, T_0)$ ,  $u_0 \in D(A^{\frac{1}{2}}) = H_{\text{per}}^1$ . 类似于热传导方程, 当  $t > 0$  时解是光滑的, 因我们  $\|u\|_{H^1}$  与  $t$  无关的估计(见(8.8)), 我们能重复上述原理, 对任何  $\tau > 0$ ,  $u(\tau)$  作为新的初值, 可得  $u(t) \in D(A^{\frac{1}{2}}e^{tA^{\frac{1}{2}}})$ , 且

$$\begin{aligned}\|A^{\frac{1}{2}}e^{tA^{\frac{1}{2}}}u(t)\|^2 &\leq 2(1 + \|u(\tau)\|_{H^1}^2), \\ t &\in (\tau, 2 + T_0(\|u(\tau)\|_{H^1})).\end{aligned}\quad (8.41)$$

我们能重复  $\tau > t^*(u_0)$  ( $t^*(u_0)$  进入吸引球  $B(0, \rho)$ ), 直到  $u(\tau)$  进入吸引球, 且一致有界于  $\rho$ . 于是  $T_0(\rho) = \sigma_0 > 0$ , 能选作

常数, 仅依赖于 GL 方程的系数, 当  $t > T_0$ ,  $\varepsilon = \max(t^{\frac{1}{2}}(u_0), \sigma_0)$  时有

$$u(t) \in D(A^{\frac{1}{2}} e^{\sigma_0 t A^{\frac{1}{2}}}), \quad (8.42)$$

$$\|A^{\frac{1}{2}} e^{\sigma_0 t A^{\frac{1}{2}}} u(t)\|^2 \leq 2(1 + \rho^2). \quad (8.43)$$

下面在复框架下进行估计, 写(8.21) 为复化形式

$$\frac{du}{dt} + \alpha_1 A u = N(u). \quad (8.44)$$

在复化空间  $L = L_{\text{per}}^2 \times L_{\text{per}}^2$  上, 复时间  $z = s e^{i\theta}$ ,  $s > 0$ ,  $\cos\theta > 0$ , 考虑(8.44) 的 Galerkin 近似的复形式, 可得具复时间的复解析的 ODE 方程组. 它在复平面  $z = 0$  邻域有解析解.  $\theta$  在某个范围, 可得到这些 Galerkin 近似解析解的一致 Gevrey 类模的估计. 利用 Cauchy 积分公式可得到导数估计. 再通过取极限和古典的 Vitali 定理, 可知  $u(z)$  在  $\text{Re}(z) > 0$  上是解析的.

写  $v(x, z) = e^{i \cos\theta A^{\frac{1}{2}}} u(x, z)$ , 可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \|A^{\frac{1}{2}} v\|^2 &= \cos\theta (Av, A^{\frac{1}{2}} v) + a_0 \cos\theta \|A^{\frac{1}{2}} v\|^2 \\ &- (a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta) \|Av\|^2 + \text{Re}[e^{-i\theta} (A^{\frac{1}{2}} e^{i \cos\theta A^{\frac{1}{2}}} (\alpha_2 |u|^2 u \\ &+ \alpha_3 |u|^2 u_x + \alpha_4 u^2 \bar{u}_x + \alpha_5 |u|^4 u) A^{\frac{1}{2}} e^{i \cos\theta A^{\frac{1}{2}}} u)]. \end{aligned} \quad (8.45)$$

因  $a_1 > 0$ , 故可找到  $\theta_0$ ,  $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ , 使  $a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta > 0$ ,  $|\theta| \leq \theta_0$ .

设  $y = 1 + \|A^{\frac{1}{2}} v\|^2$ , 可得

$$\frac{dy}{ds} \leq K_6 y^5, \quad (8.46)$$

其中  $K_6 = K_6(u_0)$  不同于(8.37) 中的  $K_5$ , 除非  $\theta = 0$ . 如同实的情况, 有

$$\begin{aligned} \|A^{\frac{1}{2}} e^{i \cos\theta A^{\frac{1}{2}}} u(z)\|^2 &\leq y(s) = 1 + \|A^{\frac{1}{2}} v\|^2 \\ &\leq 2y(0) = 2(1 + \|u_0\|_{H^1}^2), \end{aligned} \quad (8.47)$$

此时  $z$  在如下的复平面扇形的区域内:

$$\Delta_1(u_0) = \{z = se^{i\theta}; 0 < s < T_1(\|u_0\|_{H^1}) \\ \equiv \frac{15}{64K_6(1 + \|u_0\|_{H^1}^2)^4}, \quad |\theta| \leq \theta_0\}. \quad (8.48)$$

我们重复这个过程,直到  $\operatorname{Re}(z) > t^*(u_0)$ . 令  $\sigma = T_1(\rho)\cos(\theta_0)$ ,  $T_*(\|u_0\|_{H^1}) = \max(t^*(u_0), \sigma)$ , 则有

$$u(z) \in D(A^{\frac{1}{2}}e^{t^{\frac{1}{2}}}). \quad (8.49)$$

此时  $z$  在复平面的扇形区域内:

$$\Delta(u_0) = \{z = se^{i\theta}; 0 < s < T_*(\|u_0\|_{H^1}), \quad |\theta| \leq \theta_0\}, \quad (8.50)$$

$$u(z) \in D(A^{\frac{1}{2}}e^{s^{\frac{1}{2}}}). \quad (8.51)$$

此时  $z$  在复平面的带形区域:

$$E(u_0) = \{z = se^{i\theta}; \operatorname{Re}(z) \geq T_*\cos(\theta_0), \\ |\operatorname{Im}(z)| \leq T_*\sin(\theta_0)\}. \quad (8.52)$$

这就完成了 (i) 的证明.

部分 (ii) 的证明很类似,在实的情况,置  $v = e^{\lambda A^{\frac{1}{2}}}u(x, t)$ ,  $y = 1 + \|A^{\frac{1}{2}}v\|$ , 可得

$$\frac{dy}{dt} \leq K'_6 y^5, \quad (8.53)$$

因此  $u(t) \in G_\lambda$ ,

$$0 \leq t \leq T'_0(\|u_0\|_{G_\lambda}) \equiv \frac{15}{64K'_6(1 + \|u_0\|_{G_\lambda}^2)^4}. \quad (8.54)$$

另一方面,因  $G_\lambda \subset H^1_{\text{per}}$ ,  $u_0 \in H^1_{\text{per}}$ , 则从 (i) 推出存在常数  $T_*(\|u_0\|_{H^1}) > 0$  和  $\sigma(\alpha_j) > 0$ , 使得

$$u(t) \in G_\sigma, t \geq T_*.$$

如  $T'_0 > T_*$ , 则由  $G_\tau \subset G_{\tau'}$ ,  $\tau' < \tau$  可得  $u(t) \in G_\mu$ ,

$$\mu = \mu(\alpha_j) = \min(\lambda, 0).$$

如  $T'_0 < T_*$ , 则从 (i) 可知  $u(t) \in G_t$ ,  $t \in [T'_0, T_*)$ , 因此



$u(t) \in G_\mu, \mu = \mu(\alpha_j, u_0) = \min(\lambda, T'_0(\|u_0\|_{G_1})), t \geq 0$ .

至于复的情况是类似的,于是完成了定理 8.2 的证明.

以下研究“适应”方法和它的收敛率.

设  $u_0 \in G_\lambda$  或  $u_0 \in \mathcal{A}$ . 用如下的 Galerkin 格式,  $u_N$  表示它的近似解:

$$\begin{cases} \frac{du_N}{dt} = \alpha_0 u_N - \alpha_1 A u_N + P_N(\alpha_2 |u_N|^2 u_N + \alpha_3 |u_N|^2 (u_N)_x \\ \quad + \alpha_4 u_N^2 (u_N)_x + \alpha_5 |u_N|^4 u_N), \\ u_N(x, 0) = P_N u(x, 0), \end{cases} \quad (8.55)$$

其中  $P_N$  表示在由  $2N+1$  个 F 氏模  $\{e^{2\pi i n x}\}_{n=-N}^N$  所张成子空间上的投影. 当  $u_0 \in H^1_{\text{per}}$  时, 我们采用如下的在  $[0, T]$  上的“适应”方法. 从定理 8.2(i) 知, 存在  $T_* = T_*(\|u_0\|_{H^1}) > 0$ , 使得,  $u(t) \in G_r, t \in [T_*, T]$  (设  $T$  是大的,  $T > T_*$ ). 在  $[0, T_*]$  上, 用 (8.55), (8.56) 对大的  $N$ , 在  $[T_*, T]$  上用上面的 Galerkin 近似, 由  $2M+1$  个 F 氏模  $\{e^{2\pi i n x}\}_{n=-M}^M$  作为基函数,  $u_N(T_*)$  作为新的初值:

$$u_M(x, T_*) = P_M u_N(x, T_*), \quad (8.57)$$

相应的近似解在  $[T_*, T]$  上表为  $u_M$ , 整个近似解以 Uadaptive 表之.

我们现在估计误差, 对  $u_0 \in G_\lambda$  或  $u_0 \in \mathcal{A}$ , 有如下定理:

**定理 8.3** 设  $a_1 > 0 > a_5, -4a_1 a_5 > (b_3 - b_4)^2, a_j + ib_j = \alpha_j$ , 设为周期初边值问题,  $L = 1$ . 令  $u_N$  为  $2N+1$  个 F 氏模  $\{e^{in x}\}_{n=-N}^N$  的 Galerkin 近似.

(i) 如  $u_0$  位于整体吸引子之中, 则存在一个正常数  $C_6(\alpha, T)$  与  $u_0$  无关, 使得

$$\|u - u_N\|_{H^1} \leq C_6(\alpha_j, T) e^{-2\pi\sigma(N+1)}, t \in [0, T], \quad (8.58)$$

其中  $\sigma(\alpha_j) > 0$ .

(ii) 如  $u_0 \in G_\lambda$  对某  $\lambda > 0$ , 则存在一个正常数  $C_7(\alpha_j, \lambda_j, u_0, T)$ , 使得

$$\|u - u_N\|_{H^1} \leq c_7(\alpha_j, \lambda, u_0, T) e^{-2\pi t(N+1)}, t \in [0, T], \quad (8.59)$$

其中  $\mu(\alpha_j, \lambda \| u_0 \|_{G_\lambda}) > 0$ .

**证** 定义  $p = P_N u, q = (I - P_N)u, w = u_N$ ,

$$\delta = p - w = P_N u - u_N.$$

注意到  $\delta(x, 0) = 0$ , 且

$$\|u - u_N\|_{H^1} = \|p + q - w\|_{H^1} \leq \|\delta\|_{H^1} + \|q\|_{H^1}, \quad (8.60)$$

我们首先证明(i)

因  $u_0$  位于吸引子  $\mathcal{A}$  上, 具有向后存在性, 对时间的解析性和向后的惟一性, 故可从任何负时间开始, 这就推出我们能取  $T_* =$

0 并推出对  $t \geq 0, u(t) \in D(A^{\frac{1}{2}} e^{\sigma A^{\frac{1}{2}}})$  和

$$\|A^{\frac{1}{2}} e^{\sigma A^{\frac{1}{2}}} u(t)\| \leq k_7, \quad (8.61)$$

其中  $\sigma = \sigma(\alpha_j), k_7 = k_7(\alpha_j)$ , 因此对  $t \geq 0$ ,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 4\pi^2 |n|^2 e^{4\pi\sigma|n|} |u_n(t)|^2 \leq K_7^2. \quad (8.62)$$

于是对  $n \neq 0$ ,

$$|u_n(t)| \leq \frac{K_7}{2\pi n} e^{-2\pi\sigma|n|}, t \geq 0. \quad (8.63)$$

因此

$$\begin{aligned} \|q\|_{H^1}^2 &= \sum_{|n| \geq N+1} (|u_n|^2 + 4\pi^2 |n|^2 |u_n|^2) \\ &\leq \frac{K_7^2}{4\pi^2} \sum_{n \geq N+1} \frac{1}{n^2} e^{-4\pi\sigma|n|} + K_7^2 \sum_{n \leq -N+1} e^{-4\pi\sigma|n|} \\ &\leq \frac{K_7^2}{2\pi^2} \left( \sum_{n=-N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right) e^{-4\pi\sigma(N+1)} + K_7^2 \frac{2}{1 - e^{-4\pi\sigma}} e^{-4\pi\sigma(N+1)} \\ &\leq \left( \frac{1}{12} + \frac{2}{1 - e^{-4\pi\sigma}} \right) K_7^2 e^{-4\pi\sigma(N+1)} \\ &\equiv K_8^2 e^{-4\pi\sigma(N+1)}, t \geq 0, \end{aligned} \quad (8.64)$$

其中我们用到了估计  $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, K_8 = K_8(\alpha_j)$ . 从

(8.60) 和(8.59), 我们仅需证明

$$\|\delta\|_{H^1} = O(e^{-2\pi\alpha(N+1)}), t \in [0, T]. \quad (8.65)$$

从(8.1) 减去(8.55), 得

$$\begin{aligned} \delta_t = & \alpha_0 \delta + \alpha_1 A \delta + P_N [\alpha_2 (|u|^2 u - |y|^2 y) + \alpha_3 (|u|^2 u_x \\ & - |y|^2 y_x) + \alpha_4 (u^2 \bar{u}_x - y^2 \bar{y}_x) + \alpha_5 (|u|^4 u - |y|^4 y)]. \end{aligned} \quad (8.66)$$

(8.66) 和  $\delta$  作内积, 再取实部, 得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\delta\|^2 = & \alpha_0 \|\delta\|^2 - \alpha_1 \|A^{\frac{1}{2}} \delta\|^2 + \operatorname{Re}(P_N [\alpha_2 (|u|^2 u \\ & - |y|^2 y) + \alpha_3 (|u|^2 u_x - |y|^2 y_x) \\ & + \alpha_4 (u^2 \bar{u}_x - y^2 \bar{y}_x) + \alpha_5 (|u|^4 u - |y|^4 y)], \delta)). \end{aligned} \quad (8.67)$$

我们估计

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(P_N [\alpha_2 (|u|^2 u - |y|^2 y)], \delta) \leq & |\alpha_2| (|u|^2 \delta^2, \delta) + (|u|^2 q, \delta) \\ & + (|y|^2 \delta, \delta) + (|y|^2 q, \delta) + (u y, \delta^2) + (u y, q \delta) | \\ \leq & |\alpha_2| [ \|u\|_\infty^2 \|\delta\|^2 + 0.5 \|u\|_\infty^2 (\|q\|^2 + \|\delta\|^2) \\ & + \|y\|_\infty^2 \|\delta\|^2 + 0.5 \|y\|_\infty^2 (\|q\|^2 + \|\delta\|^2) + \|u\|_\infty \|y\|_\infty \|\delta\|^2 \\ & + 0.5 \|u\|_\infty \|y\|_\infty (\|q\|^2 + \|\delta\|^2) ] \leq 5 |\alpha_2| C_8 (\|q\|^2 + \|\delta\|^2), \end{aligned} \quad (8.68)$$

其中上式最后一步我们用到了  $H^1 \hookrightarrow L^\infty$  和(8.8).

类似地对(8.67) 中其他的项有

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(P_N [\alpha_3 (|u|^2 u_x - |y|^2 y_x)], \delta) \leq & |\alpha_3| (|u|^2 \delta_x, \delta) \\ & + (|u|^2 q_x, \delta) + (|y|^2 \delta_x, \delta) + (|y|^2 q_x, \delta) + (u y_x, \delta^2) \\ & + (u y_x, q \delta) + (\bar{y} y_x \delta, \delta) + (\bar{y} y_x q, \delta) | \\ \leq & |\alpha_3| c_9 (\|\delta\|^2 + \varepsilon^{-1} \|\delta\|^2 + \varepsilon \|\delta_x\|^2), \end{aligned} \quad (8.69)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(P_N [\alpha_4 (u^2 \bar{u}_x - y^2 \bar{y}_x)], \delta) \leq & |\alpha_4| c_{10} (\|\delta\|^2 \\ & + e^{-1} \|\delta\|^2 + e \|\delta_x\|^2), \end{aligned} \quad (8.70)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(P_N [\alpha_5 (|u|^4 u - |y|^4 y)], \delta) \leq & |\alpha_5| (|u|^4 \delta, \delta) \\ & + (|u|^4 q, \delta) + (|y|^4 \delta, \delta) + (|y|^4 q, \delta) + (|u|^2 u y \delta, \delta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (|u|^2 u_y q, \delta) + (|u|^2 y^2, \delta^2) + (|u|^2 y^2, q\delta) \\
& + (u_y y^2, \delta^2) + (u_y \bar{y}^2, q\delta) \leq c_{11} (\|q\|^2 + \|\delta\|^2).
\end{aligned} \quad (8.71)$$

将(8.68), (8.69), (8.70) 和(8.71) 代入(8.67), 取  $\varepsilon$  充分小, 得

$$\frac{d}{dt} \|\delta\|^2 \leq c_{12} \|\delta\|^2 + c_{13} \|q\|^2. \quad (8.72)$$

显然,  $c_{12} > 0$  和  $c_{13} > 0$  依赖于  $u_0$  和  $\alpha_j$ , 因  $u_0 \in \mathcal{A}$ ,  $u(t) \in \mathcal{A}$ ,  $\forall t \geq 0$ . 由  $\mathcal{A}$  的有界性推出  $c_{12}, c_{13}$  不依赖于初值但仅依赖于  $\alpha_j$ , 由 Gronwall 不等式, 且注意到  $\delta(0) = 0$ , (8.72) 导致误差的  $L^2$  估计

$$\begin{aligned}
\|\delta(t)\|^2 & \leq \frac{c_{13}}{c_{12}} \max_{0 \leq t \leq T} \|q(t)\|^2 [e^{c_{12}t} - 1] \\
& = O(e^{-4\pi\sigma(N+1)}), t \in [0, T],
\end{aligned} \quad (8.73)$$

最后一步我们用到了(8.64).

为了完成(8.65) 的证明, 我们仅需证明

$$\|A^{\frac{1}{2}}\delta\|^2 = O(e^{-4\pi\sigma(N+1)}), t \in [0, T]. \quad (8.74)$$

作(8.66) 和  $A\delta$  的内积再取实部, 得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|A^{\frac{1}{2}}\delta\|^2 & = a_0 \|A^{\frac{1}{2}}\delta\|^2 - a_1 \|A\delta\|^2 + \operatorname{Re}(P_N[\alpha_2 \\
& \cdot (|u|^2 u - |y|^2 y) + \alpha_3(|u|^2 u_x - |y|^2 y_x) + \alpha_4(u^2 \bar{u}_x \\
& - y^2 \bar{y}_x) + \alpha_5(|u|^4 u - |y|^4 y)], A\delta).
\end{aligned} \quad (8.75)$$

在类似的几步估计之后, 得

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \|A^{\frac{1}{2}}\delta\|^2 & \leq c_{14} (\|q\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}q\|^2 + \|\delta\|^2) \\
& + c_{15} \|A^{\frac{1}{2}}\delta\|^2,
\end{aligned} \quad (8.76)$$

其中  $c_{14}, c_{15}$ , 为正常数, 仅依赖于  $\alpha_j$ . 由 Gronwall 不等式, 由(8.64), (8.73) 得(8.74). 于是我们完成了(8.65) 的证明. 由(8.60), (8.64), (8.65) 推出(8.58).

这就证明了(i), (ii) 的证明是类似于上面的. 由定理 8.5,  $u(t) \in G_\mu, t \geq 0$ , 对  $\mu(\alpha_j, \|u_0\|_{G_\lambda}) > 0$ . 我们仅需将上面的证明  $\sigma$  换成  $\mu$ , 此时,  $\mu, k, k_8, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}$ , 均依赖于  $u_0$ , 因而  $c_7$

也依赖于  $u_0$ .

这就完成了定理 8.3 的证明.

现估计  $u$  适应的误差,  $u_0 \in H_{\text{per}}^1$ .

**定理 8.4** 设  $a_1 > 0 > a_5$ ,  $-4a_1a_5 > (b_3 - b_4)^2$ ,  $a_i + ib_j = \alpha_j$ , 设满足周期条件,  $L = 1$ ,  $u_0 \in H_{\text{per}}^1$ , 用  $u$  适应表示适应方法的近似解, 则存在正数  $c_{16}(\alpha_j, \|u_0\|_{H_{\text{per}}^1}, T)$  和  $c_{17}(\alpha_j, \|u_0\|_{H_{\text{per}}^1}, T)$  使得

$$\|u - u_N\| \leq \frac{c_{16}(\alpha_j, \|u_0\|_{H_{\text{per}}^1}, T)}{N} \cdot \frac{1}{N}, \quad t \in [0, T_*], \quad (8.77)$$

$$\|u - u_N\| \leq c_{17}(\alpha_j, \|u_0\|_{H_{\text{per}}^1}, T) \left[ \frac{1}{N} + e^{-2\pi\sigma(M+1)} \right], \quad (8.78)$$

$$t \in [T_*, T],$$

其中  $\sigma(\alpha_j) > 0$ .

**证** 从(8.8), 对  $t \geq 0$  有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^2 |u_n(t)|^2 \leq K_3^2 (\|u_0\|_{H_{\text{per}}^1}, \alpha_j), \quad (8.79)$$

特别有

$$\|q\|_{H^1}^2 = \sum_{|n| \geq N+1} |u_n|^2 \leq \frac{K_3^2}{(N+1)^2}, \quad \forall t \geq 0. \quad (8.80)$$

因此, 从(8.60), (8.72), (8.80) 和 Gronwall 不等式得

$$\|\delta(t)\|^2 \leq c_{18} \frac{K_3^2}{(N+1)^2} [e^{c_{12}t} - 1]. \quad (8.81)$$

于是

$$\|u(t) - u_N(t)\| \leq \|\delta\| + \|q\| \leq \frac{c_{19}}{N+1}, \quad (8.82)$$

其中  $c_{18} > 0, c_{19} > 0$  依赖于  $\alpha_j, u_0, T$ .

在  $[T_*, T]$  上, 从(8.60), (8.64) 和(8.72) 有

$$\|u - u_M\| \leq \|\delta\| + \|q\|, \quad (8.83)$$

$$\|q\|^2 \leq \|q\|_{H^1}^2 \leq K^2 e^{-4\pi\sigma(M+1)}, \quad (8.84)$$

$$\frac{d}{dt} \|\delta\|^2 \leq c_{20} \|\delta\|^2 + c_{21} \|q\|^2, \quad (8.85)$$

这里  $c_{20} > 0, c_{21} > 0$  依赖于  $u_0$ . 解(8.85) 具初值  $\delta(T_*)$ , 得

$$\|\delta(t)\|^2 \leq e^{c_{10}(t-T_*)} \|\delta(T_*)\|^2 + c_{21} e^{c_{20}t} \int_{T_*}^t e^{-c_{20}s} \|q(s)\|^2 ds. \quad (8.86)$$

由(8.84),

$$\begin{aligned} \|\delta(t)\|^2 &\leq e^{c_{20}(T-T_*)} \|\delta(T_*)\|^2 + c_{21} e^{c_{20}T} \frac{1}{c_{20}} \\ &\cdot (e^{-c_{20}T_*} - e^{-c_{20}t}) K_8^2 e^{-4\pi\sigma(M+1)} \leq c_{22} \left( \frac{1}{N^2} + e^{-4\pi\sigma(M+1)} \right), \end{aligned} \quad (8.87)$$

其中最后一步用到了

$$\begin{aligned} \delta(T_*) &= P_M u(T_*) - u_M(T_*) \\ &= P_M u(T_*) - P_M u_N(T_*) + P_M u_N(T_*) - u_n(T_*) \\ &= P_M u(T_*) - P_M u_N(T_*). \end{aligned} \quad (8.88)$$

因此可得

$$\|\delta(T_*)\| \leq \|P_M u(T_*) - u_M(T_*)\| \leq \frac{c_{23}}{N}. \quad (8.89)$$

注意到  $c_{22} > 0, c_{23} > 0$ , 依赖于  $\alpha_j, u_0$  和  $T$ . 因此由(8.83), (8.84) 和(8.87) 可得(8.78). 定理 8.4 证毕.

## § 9 广义 Ginzburg-Landau 方程的决定结点

考虑如下广义 GL 方程.

$$\begin{aligned} \partial_t u + \nu u_x &= \chi u + (\gamma_r + i\gamma_i) u_{xx} - (\beta_r + i\beta_i) |u|^2 u \\ &- (\delta_r + i\delta_i) |u|^4 u - (\lambda_r + i\lambda_i) |u|^2 u - (\mu_r + i\mu_i) u^2 \bar{u}_x, \end{aligned} \quad (9.1)$$

其中  $\gamma_r, \delta_r$  为正常数,  $\nu, \chi, \gamma_i, \beta_r, \beta_i, \delta_i, \lambda_r, \lambda_i, \mu_r, \mu_i$  均为实常数, 考虑周期边界条件

$$u(x, t) = u(x+1, t), x \in R, t > 0 \quad (9.2)$$

和初始条件

$$u(x, v) = u_0(x), x \in R. \quad (9.3)$$

这一节我们寻求点集使它能完全决定问题(9.1)–(9.3) 解的长时间行态,即称有限集  $E \subset [0, 1]$  是一个决定结点集,如果

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u_1(x, t) - u_2(x, t)\| = 0, x \in E, \quad (9.4)$$

则有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u_1(x, t) - u_2(x, t)\| = 0, x \in R, \quad (9.5)$$

其中  $u_1, u_2$  为任意二个解.

为此,引入  $H = L^2_{\text{per}}[0, 1] = \{u \in L^2[0, 1], u(x+1) = u(x)\}$ ,  $V_1 = H^1_{\text{per}}[0, 1] = \{u : u \in H, u_x \in H\}$ .

**定理 9.1** 设满足条件

$$\gamma_r, \delta_r > 0, 4\delta_r \gamma_r > (\lambda - \mu_i)^2, \quad (9.6)$$

$u_0 \in V_1$ , 则存在正常数  $\alpha_1$ , 它仅依赖于方程(9.1)的系数,使得如  $x_1 < x_2$ , 则  $d = x_2 - x_1 < \alpha_1, \gamma_r > 2d^2 \beta_1$  ( $\beta_1$  证明中可见). 且

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u_i(x_i, t) - u(x_i, t)\| = 0, i = 1, 2, \quad (9.7)$$

其中  $u_1, u_2$  为二个解, 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u_1(x, t) - u_2(x, t)\| = 0, \forall x \in R. \quad (9.8)$$

为证明定理需要如下引理:

**引理 9.2** 令  $\Omega' = [x_1, x_2]$ ,  $u \in C^1(\Omega', \mathbb{C})$ , 则对  $d = x_2 - x_1$ , 有

$$\|u\|_{0, \Omega}^2 \leq 2 \|u(x_1)\|^2 + 2d^2 \|u_x\|_{0, \Omega'}^2. \quad (9.9)$$

**引理 9.3** 如非负可微函数  $f$  满足

$$f'(t) + \alpha f(t) \leq g(t), \quad (9.10)$$

其中  $\alpha > 0, \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$ , 则有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0. \quad (9.11)$$

这是 Gronwall 引理的特殊情况, 引理 9.2 是显然的.

定理 9.1 的证明, 令  $w = u_2 - u_1$ , 则  $w$  满足

$$\begin{aligned} w_t + vw_t &= \chi w + (\gamma_r + i\gamma_i)w_{xx} - (\beta_r + i\beta_i)(|u_2|^2 u_2 \\ &\quad - |u_1|^2 u_1) - (\delta_r + i\delta_i)(|u_2|^4 u_2 - |u_1|^4 u_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(\lambda_r + i\lambda_i)(|u_2|^2 u_{2r} - |u_1|^2 u_{1r}) \\
& -(\mu_r + i\mu_i)(u_2^2 \bar{u}_{2i} - u_1^2 \bar{u}_{1i}). \quad (9.12)
\end{aligned}$$

乘(9.12)以  $\bar{w}$ , 在  $\Omega' = [x_1, x_2]$  上积分, 再取实部得

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega'} |v|^2 dx + \gamma_r \int_{\Omega'} |w_r|^2 dx - \operatorname{Re}[(\gamma_r + i\gamma_i) w_r \bar{w}]_{x_1}^{x_2} - \chi \int_{\Omega'} |w|^2 dx + \frac{\nu}{2} (|w(x_2)|^2 \\
& - |w(x_1)|^2) = \operatorname{Re}((F(u_2) - F(u_1)), w), \quad (9.13)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
F(u) = & -(\beta_r + i\beta_i) |u|^2 u - (\delta_r + i\delta_i) |u|^4 u \\
& -(\lambda_r + i\lambda_i) |u|^2 u_i - (\mu_r + i\mu_i) u^2 \bar{u}_i. \quad (9.14)
\end{aligned}$$

令  $g_1(t) = \operatorname{Re}[(\gamma_r + i\gamma_i) w_r \bar{w}]_{x_1}^{x_2} - \frac{\nu}{2} (|w(x_2)|^2 - |w(x_1)|^2)$ , 由(9.7)有  $g_1(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ . 由前面已知结果, 可知存在  $T$ , 当  $t \geq T$  时, 我们有

$$|u_i|_\infty \leq \rho_1, |u_{ir}|_\infty \leq \rho_3, \quad i = 1, 2,$$

这里  $\rho_1, \rho_3$  仅依赖方程(9.1)的系数. 于是当  $t \geq T$  时,

$$\begin{aligned}
(F(u_2) - F(u_1), w) \leq & |\beta_r| \rho_1^2 |w|_{0, \Omega'}^2 + 2\sqrt{\beta_r^2 + \beta_i^2} \rho_1^2 |w|_{0, \Omega'}^2 \\
& + 2\rho_1 \rho_3 |w|_{0, \Omega'}^2 + 4\sqrt{\delta_r^2 + \delta_i^2} \rho_1^4 |w|_{0, \Omega'}^2 \\
& + (\sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2} + \sqrt{\mu_r^2 + \mu_i^2}) \rho_1^2 \int_{\Omega'} |w_x| |w| dx,
\end{aligned}$$

对于项  $(\sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2} + \sqrt{\mu_r^2 + \mu_i^2}) \rho_1^2 \int_{\Omega'} |w_x| |w| dx$ , 用 Young 不等式可得该项  $\leq \frac{\gamma_r}{2} |w_x|_{0, \Omega'}^2 + \frac{P^2}{2\gamma_r} |w|_{0, \Omega'}^2$ , 其中  $P = (\sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2} + \sqrt{\mu_r^2 + \mu_i^2}) \rho_1^2$ , 于是(9.13)变为

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} |w|_{0, \Omega'}^2 + \gamma_r |w_x|_{0, \Omega'}^2 \leq & 2(|\chi| + |\beta_r| \rho_1^2 + 2\sqrt{\beta_r^2 + \beta_i^2} \rho_1^2 \\
& + 4\sqrt{\delta_r^2 + \delta_i^2} \rho_1^4 + \frac{P^2}{\gamma_r} 2\rho_1 \rho_3) |w|_{0, \Omega'}^2 + g_1(t), \quad (9.15)
\end{aligned}$$

由引理 9.2, 可得



$$\gamma_r \|w_x\|_{0,\Omega'}^2 \geq \frac{\gamma_r}{2d^2} \|w\|_{0,\Omega'}^2 - \frac{\gamma_r}{2d} \|w(x_1)\|^2.$$

因此(9.15)变为

$$\frac{d}{dt} \|w\|_{0,\Omega'}^2 + \left(\frac{\gamma_r}{2d^2} - \beta_1\right) \|w\|_{0,\Omega}^2 \leq g_1(t) + \frac{\gamma_r}{2d} \|w(x_1)\|^2,$$

其中

$$\begin{aligned} \beta_1 = & 2(\|\chi\| + \|\beta_r\| \rho_1^2 + 2\sqrt{\beta_r^2 + \beta_i^2} \rho_1^2 \\ & + 4\sqrt{\delta_r^2 + \delta_i^2} \rho_1^4 + \frac{P^2}{\gamma_r} 2\rho_1 \rho_3). \end{aligned}$$

应用引理 9.3, 可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|w\|_{0,\Omega}^2 = 0.$$

为了证明  $u_1, u_2$  为点态逼近, 我们需证

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|w\|_{L^\infty} = 0.$$

为此选取任意序列  $T < t_1 < t_2 < \dots, t_i \rightarrow \infty, i \rightarrow \infty$ . 由于整体吸引子  $\mathcal{A}$  的紧性, 存在  $\tilde{u}_1 = \tilde{u}_1(x, t) \in \mathcal{A}, u_2 = \tilde{u}_2(x, t) \in \mathcal{A}$  和子序列  $\{t_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ , 使得

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_1(t_{n_k}) - \tilde{u}_1\|_{L^2(\Omega')} &= 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_2(t_{n_k}) - \tilde{u}_2\|_{L^2(\Omega')} &= 0, \end{aligned} \quad (9.16)$$

因此  $\tilde{w} = \tilde{u}_2 - \tilde{u}_1$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|w(t_{n_k}) - \tilde{w}\|_{L^2(\Omega')} = 0. \quad (9.17)$$

由(9.16),  $\tilde{w} = 0$ , 几乎处处在  $\Omega'$  上成立. 因此  $\tilde{w} = 0$  在  $\Omega'$  上.

因  $\tilde{w} = 0$  是连续的, 但实际上  $\tilde{w} = 0$  在 Gevrey 类, 因此它是对  $x$  的实解析的, 从实解析函数的连续性, 推得  $\tilde{w} = 0, x \in R$ . 从(9.17)有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|w(t_{n_k})\|_{L^2} = 0.$$

因  $\{t_{n_k}\}$  是任意的, 可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|w(t)\|_{L^2} = 0.$$

这就完成了定理 9.1 的证明.

下面考虑(9.1) 定常解的集合, 表示  $S(\text{coeff})$ .

**定理 9.4** 设条件(9.6) 满足, 则存在正常数  $\alpha_2$ , 仅依赖于(9.1) 的系数, 具有如下性质: 令  $x_1 < x_2$ , 其中  $d = x_2 - x_1 < \alpha_2$ ,  $u_1, u_2 \in S(\text{coeff})$ , 令  $w = u_1 - u_2$ , 如果函数  $\text{Re}w, \text{Im}w$  之一至少有二个零点在  $\Omega' = [x_1, x_2]$  上, 则  $w = 0$ , 即  $u_1 = u_2$ .

首先我们需要如下类型的 Poincaré 不等式.

**定理 9.5** 令  $\Omega' = [x_1, x_2], d = x_2 - x_1$ . (i)  $w \in C^1(\Omega', \mathbb{C}), y_1, y_2 \in \Omega'$ , 则

$$\|w\|_{\infty, \Omega'} \leq \|\text{Re}w(y_1) + i\text{Im}w(y_2)\| + d \|w_x\|_{\infty, \Omega'}.$$

(ii)  $w \in C^2(\Omega', \mathbb{C})$ , 设函数  $\text{Re}w, \text{Im}w$  之一至少有二个零点在  $\Omega'$  上, 则

$$\|w_x\|_{\infty, \Omega'} \leq d \|w_{xx}\|_{L^\infty(\Omega')}, \quad \|w\|_{\infty, \Omega'} \leq d^2 \|w_{xx}\|_{L^\infty(\Omega')}.$$

**引理 9.6** 如条件(9.6) 满足,  $u \in S(\text{coeff})$ , 则我们有

$$\|u\|_{L^\infty} \leq \bar{\rho}_1, \quad \|u_x\|_{L^\infty} \leq \bar{\rho}_3, \quad \text{其中 } \bar{\rho}_1^2 = (1 + \sqrt{a} \alpha^{-\frac{1}{2}})a, \bar{\rho}_3 = \alpha^{-\frac{1}{2}} a K_1^{\frac{1}{2}} (1 + \frac{a^2}{\alpha}), K_1 \text{ 为某正常数.}$$

**证** 作(9.1) 和  $\bar{u}$  的内积, 取实部可得

$$\begin{aligned} & \nu \text{Re} \int_0^1 u_x \bar{u} dx + \beta_r \int_0^1 |u|^4 dx + \delta_r \int_0^1 |u|^6 dx - \chi \|u\|_0^2 \\ & + \gamma_r \|u_x\|_0^2 - (\lambda_r + \mu_r) \text{Re} \int_0^1 |u|^2 u_x \bar{u} dx \\ & - (\lambda_i - \mu_i) \text{Im} \int_0^1 |u|^2 u_x \bar{u} dx = 0, \end{aligned}$$

因

$$\text{Re} \int_0^1 u_x \bar{u} dx = 0,$$

$$\text{Re} \int_0^1 |u|^2 u_x \bar{u} dx = 0,$$

$$\begin{aligned} (\lambda_i - \mu_i) \text{Im} \int_0^1 |u|^2 u_x \bar{u} dx & \leq |\lambda_i - \mu_i| \int_0^1 |u|^3 |u_x| dx \\ & \leq a_1 b_1 \|u_x\|_0 \left( \int_0^1 |u|^6 dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{a_1^2}{2} \int_0^1 |u|^6 dx + \frac{b_1^2}{2} |u_x|_0^2,$$

其中  $a_1 b_1 = |\lambda_i - \mu_i|$ , 由条件(9.6), 能选取  $a_1, b_1$  使得

$$\alpha = 2\gamma_1 - b_1^2 > 0, \beta = 2\delta_r - a_1^2 > 0,$$

则有

$$\alpha |u_x|_0^2 + \beta \int_0^1 |u|^6 dx + 2\beta_r \int_0^1 |u|^4 dx - 2\chi |u|_0^2 \leq 0.$$

由设  $\chi > 0$ , 有

$$\begin{aligned} \alpha |u_x|_0^2 &\leq -\beta \int_0^1 (|u|^3 + \frac{\beta_r - 1}{\beta} |u|)^2 dx - 2 \int_0^1 |u|^4 dx \\ &\quad + 2\chi |u|_0^2 + \frac{(\beta_r - 1)^2}{\beta} |u|_0^2, \end{aligned}$$

$$2(|u|_0^2)^2 \leq 2 \int_0^1 |u|^4 dx \leq \left(2\chi + \frac{(\beta_r - 1)^2}{\beta}\right) |u|_0^2 - \alpha |u_x|_0^2.$$

因此  $|u|_0 \leq \sqrt{a}$ ,  $a = \frac{1}{2} \left(2\chi + \frac{(\beta_r - 1)^2}{\beta}\right)$ ,

$$\int_0^1 |u|^4 dx \leq a^2, |u_x|_0^2 \leq \frac{a^2}{\alpha}, |u|_{C^\infty} \leq \bar{\rho}_1.$$

再作(9.1) 和  $u_{xx}$  的内积, 取实部可得估计

$$|u_{xx}|_0^2 \leq K_1 (1 + |u_x|_0^2)^2.$$

因此  $|u_{xx}|_0^2 \leq K_1 (1 + \frac{a^2}{\alpha})^2, |u_x|_{L^4} \leq \bar{\rho}_3.$

现证定理 9.4, 如同前面所做估计有

$$\begin{aligned} |w_{xx}|_{\infty, \Omega'} &\leq \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + \gamma_i^2}} (|v| |w_r|_{\infty, \Omega'} + \chi |w|_{\infty, \Omega'} \\ &\quad + 2\sqrt{\beta_r^2 + \beta_i^2} \bar{\rho}_1^2 |w|_{\infty, \Omega'} + 4\sqrt{\delta_r^2 + \delta_i^2} \bar{\rho}_1^4 |w|_{\infty, \Omega'} (\sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2} \\ &\quad + \sqrt{\mu_r^2 + \mu_i^2}) \cdot (\bar{\rho}_1^2 |w_x|_{\infty, \Omega'} + 2\bar{\rho}_1 \bar{\rho}_3 |w|_{\infty, \Omega'})), \end{aligned}$$

由引理 5, 得

$$\begin{aligned} |w_{xx}|_{\infty, \Omega'} &\leq \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + r_i^2}} (|v| d + \chi d^2 \\ &\quad + 2\sqrt{\beta_r^2 + \beta_i^2} \bar{\rho}_1^2 d^2 + 4\sqrt{\delta_r^2 + \delta_i^2} \bar{\rho}_1^4 d^2 + (\sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2} \end{aligned}$$

$$+ \sqrt{\mu_r^2 + \mu_i^2} (\bar{\rho}_1^2 d + 2 \bar{\rho}_1 \bar{\rho}_3 d^2) \|w_{xx}\|_{\infty, \Omega'}.$$

由上面不等式, 可知存在  $\alpha_2$  仅依赖于方程(9.1)的系数, 使当  $d < \alpha_2$  时,  $\|w_{xx}\|_{\infty, \Omega'} = 0$ , 则  $w_{xx} = 0, x \in \Omega'$ . 因  $\operatorname{Re} w_{xx}$  和  $\operatorname{Im} w_{xx}$  是实解析的,  $w_{xx} = 0, x \in R$ . 但函数  $\operatorname{Re} w_x, \operatorname{Im} w_x$  和  $\operatorname{Re} w, \operatorname{Im} w$  具有零点, 因此  $w = 0$ . 由此完成了定理 9.4 的证明.

**定理 9.7**  $u \in S(\text{coeff}), p \in \mathbb{C}$ . 设存在区间  $I = [x_1, x_2]$ , 其长度不超过  $\alpha_2$ , 使得函数  $\operatorname{Re}(u(x) - p), \operatorname{Im}(u(x) - p)$  在  $I$  上至少有三个零点, 则  $u$  是一个常数. 且当  $\beta_i \neq 0, \delta_i \neq 0$  时,  $u \equiv 0$ .

**证** 设  $u \in S(\text{coeff})$  为非常数函数, 它在区间  $I$  上有如上性质, 因  $\operatorname{Re} u$  和  $\operatorname{Im} u$  为实解析的, 存在数

$$x_1 \leq y_1 < y_2 < y_3 \leq x_2,$$

$$x_1 \leq z_1 < z_2 < z_3 \leq x_2,$$

使得  $y_1, y_2, y_3$  为函数  $\operatorname{Re}(u - p)$  在  $[y_1, y_2]$  上的所有零点, 而  $z_1, z_2, z_3$  为  $\operatorname{Im}(u - p)$  在  $[z_1, z_3]$  上的所有零点, 选取正数

$$\varepsilon < \min(y_2 - y_1, y_3 - y_2, z_2 - z_1, z_3 - z_2), \quad (9.18)$$

考虑二个定态解  $u_1(x) = u(x), u_2(x) = u(x - \varepsilon), x \in R$ , 令  $v = u_1 - u_2$ . 我们证明  $u_1$  和  $u_2$  满足定理 9.4 在  $(x_1, x_2)$  上的假设. 令  $i \in \{1, 2\}, v_1 = \operatorname{Re} v$ , 计算  $v_1(y_i + \varepsilon) = \operatorname{Re} u(y_i + \varepsilon) - \operatorname{Re} u(y_i) = \operatorname{Re} u(y_i + \varepsilon) - \operatorname{Re} p$ ,

$$\begin{aligned} v_1(y_{i+1}) &= \operatorname{Re} u(y_{i+1}) - \operatorname{Re} u(y_{i+1} - \varepsilon) \\ &= \operatorname{Re} p - \operatorname{Re} u(y_{i+1} - \varepsilon), \end{aligned}$$

因  $\operatorname{Re}(u - p)$  在  $(y_i, y_{i+1})$  上没有零点, 我们有

$$v_1(y_i + \varepsilon)v_1(y_{i+1}) < 0.$$

这就推出  $v_1$  在  $(y_i + \varepsilon, y_{i+1})$  有一个零点, 推之,  $v_1$  在  $(x_1, x_2)$  上至少有二个零点, 类似原理对  $v_2 = \operatorname{Im} v$  是相同的. 由定理 9.4,  $u(x) = u(x - \varepsilon), x \in R, \forall \varepsilon$  满足(9.18).

因此  $u$  是一个常数当  $\beta_i \neq 0, \delta_i \neq 0$  时, 方程(9.1)仅有零解. 定理得证.

设  $\{u\} = \{u(x) : x \in [0, 1]\} \subset \mathbb{C}$ , 则对任何  $p \in \{u\}$  能定

义闭的可微的环绕  $p$  的路径  $u: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  的指标

$$\text{Ind}_p(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{u'(t)}{u(t) - p} dt.$$

**推论 9.8** 设  $u \in S(\text{coeff})$ ,  $p \in \mathbb{C}$ , 则

(i) 如  $p \notin |u|$ ,  $|\text{Ind}_p(u)| \leq 2\left[\frac{1}{\alpha_2}\right] + 2$ ;

(ii) 如  $p \in |u|$ ,  $u$  不是一个常数函数, 则函数  $u - p$  在  $[0, 1]$  上至多有  $2\left[\frac{1}{\alpha_2}\right] + 2$  个零点.

以下考虑定态解集合  $S(\text{coeff})$  的分形维数.

**定理 9.9** 设  $(E, d)$  为度量空间,  $Y \subset E$ , 且设对某个  $k \in \mathbb{N}$ , 存在一个有界映照  $\phi: Y \rightarrow \mathbb{R}^k$  使得

$$|\phi(y_1) - \phi(y_2)| \geq cd(y_1, y_2), y_1, y_2 \in Y, \quad (9.19)$$

对某个正常数  $c$  成立, 则  $d_F(Y) \leq k$ , 这里  $d_F(Y)$  为分形维数.

**证** 见  $[T]$ .

我们应用这个引理,  $E = [0, 1]$ ,  $Y = S(\text{coeff})$ ,  $k = 4$ , 映照为  $\phi: S(\text{coeff}) \rightarrow \mathbb{C}^2$  定义为

$$\phi(u) = (u(0), u(\alpha_2)), \quad (9.20)$$

其中  $\alpha_2$  为定理 9.4 给定, 这个映照显然是有界的, 我们仅需验证 (9.19).

对任何  $\varepsilon > 0$ , 取  $u_1, u_2 \in S(\text{coeff})$ , 设  $w = u_1 - u_2$  满足

$$|w(0)| < \varepsilon, |w(\frac{\alpha_2}{2})| < \varepsilon. \quad (9.21)$$

我们要找到一个常数  $D = D(\text{coeff})$  使得由 (9.21) 推出

$$|w|_\infty \leq D\varepsilon. \quad (9.22)$$

(9.22) 的证明分两步.

第一步, 估计  $w_x(0)$ , 注意到如  $\Omega' \subset \mathbb{R}$  为任何区间, 其长不超过  $d = \alpha_2$ , 由 Lagrange 定理我们有, 存在  $y_1, y_2 \in \Omega'$ , 使得

$$|\text{Re} w_x(y_1)| < \frac{2\varepsilon}{d}, |\text{Im} w_x(y_2)| < \frac{2\varepsilon}{d}. \quad (9.23)$$

由定理 9.4 的证明, 定理 9.5 和 (9.23) 得

$$|w_{xx}|_{\infty, \Omega'} \leq \frac{4\epsilon}{d} + \frac{1}{4d^2} |w|_{\infty, \Omega'}. \quad (9.24)$$

令  $\Omega' = [0, d]$ , 由定理 9.5(i) 和 (9.24) 有

$$\begin{aligned} |w|_{\infty, \Omega'} &\leq |w(0)| + d |w_x|_{\infty, \Omega'} \leq |w(0)| \\ &\quad + d(|\operatorname{Re} w_x(y)| + |\operatorname{Im} w_x(y_2)|) + d^2 |w_{xx}|_{\infty, \Omega'} \\ &< \epsilon + 4\epsilon + 4d\epsilon + \frac{1}{4} |w|_{\infty, \Omega'}, \end{aligned}$$

因此

$$|w|_{\infty, \Omega'} \leq 16\epsilon, \quad |w_{xx}|_{\infty, \Omega'} \leq \frac{4\epsilon}{d} + \frac{4\epsilon}{d^2},$$

$$|w_x|_{\infty, \Omega'} \leq \frac{4\epsilon}{d} + 4\epsilon + \frac{4\epsilon}{d} = 4\epsilon + \frac{8\epsilon}{d}.$$

由于  $|w(0)| < \epsilon$ ,  $|w\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)| < \epsilon$ , 得  $|w_x(0)| < 4\epsilon + \frac{8\epsilon}{d}$ .

第二步, 设  $|w(x_0)| < \epsilon_1$ ,  $|w_x(x_0)| < \epsilon_1 + \frac{\epsilon_1}{d}$ ,  $x_0 \in R$ ,  $\epsilon_1 > 0$ , 则

$$|w(x)| < 8\epsilon_1, \quad |w_x(x)| < 3\left(\epsilon_1 + \frac{\epsilon_1}{d}\right),$$

$$x \in [x_0, x_0 + d] = \Omega'.$$

这由定理 9.5 可得以上结果.

由第一步和第二步推出  $|w|_{\infty} < D\epsilon$ .

这就证明了 (9.22). 可得如下推论

**定理 9.10**  $d_F(S(\operatorname{coeff})) \leq 4$ .

## § 10 三次非线性 Ginzburg-Landau 方程的动力系统结构及其数值分析

考虑如下三次非线性 GL 方程

$$u_t = c_0 u + (c_0 + i) u_{xx} - (c_0 - i) |u|^2 u. \quad (10.1)$$

我们知道当  $c_0 \rightarrow \infty$  时, 它趋于 Ragleish-Benard 对流的

Newell-Whitehead 方程. 当  $c_0 = 0$  时, (10.1) 为完全可积的三次非线性 Schrödinger 方程

$$iu_t + u_{xx} + |u|^2 u = 0. \quad (10.2)$$

方程(10.1) 具有行波解

$$u_s(x, t) = u_0 e^{i(kx + \omega t)}. \quad (10.3)$$

又得

$$\begin{cases} \omega_0 = \alpha + |u_0|^2 - 1, \\ h_0^2 = 1 - |u_0|^2. \end{cases} \quad (10.4)$$

置  $u(x, t) = \overline{u(x, t)} e^{i(k_0 x + \omega_0 t)}$  代入(10.1), 则  $\overline{u(x, t)}$  满足方程 (仍记为  $u(x, t)$ ) 为

$$u_t = \alpha u + \mu u_x + \beta u_{xx} - \gamma |u|^2 u, \quad (10.5)$$

其中  $\alpha = c_0 - i\omega_0 - k_0^2(c_0 + i)$ ,  $\mu = 2k_0(c_0 + i)i$ ,  $\beta = c_0 + i$ ,  $\gamma = c_0 - i$ . 显然  $u = u_0$  为(10.5) 的一个临界点, 其中参数  $c_0$ ,  $\omega_0$ ,  $k_0$  满足(10.4). 当  $u_0 = \pm 1$ , 此时行波解(10.3) 变为均匀解, 为 Stokes 解.

现考虑(10.5) 解的稳定性, 设

$$u(x, t) = u_0 + \delta u(x, t). \quad (10.6)$$

在临界点  $u_0$  处(线性化(10.5)), 得

$$B \begin{bmatrix} \partial u \\ \partial u^* \end{bmatrix} = 0, \quad (10.7)$$

其中

$$B = \begin{pmatrix} \partial_t - \alpha - \mu \partial_x - \beta \partial_{xx} + L(|u_0|^2) & h(u_0) \\ k^*(u_0) & \partial_t - \alpha^* - \mu^* \partial_x - \beta^* \partial_{xx} + L^*(|u_0|^2) \end{pmatrix}, \quad (10.8)$$

这里“\*”表示复数共轭, 引入方程(10.5) 临界点  $u_0$  处的小扰动, 即(10.1) 的行波解(10.3) 可写为

$$u(x, t) = u_0 + \delta u_+ e^{i(qx + \Omega t)} + \delta u_- e^{-i(qx + \Omega^* t)}, \quad (10.9)$$

其中  $|\delta u_+|, |\delta u_-| \ll |u_0|$ ,  $q$  为一实数.

将(10.9)代入(10.7)可得

$$\begin{cases} i\Omega - \alpha - \mu qi + \beta q^2 + 2\gamma |u_0|^2 + \gamma u_0^2 \frac{\delta u}{\delta u_+} = 0, \\ i\Omega - \alpha^* - \mu^* qi + \beta^* q^2 + 2\gamma^* |u_0|^2 + \gamma^* u_0^{*2} \frac{\delta u}{\delta u_-} = 0. \end{cases} \quad (10.10)$$

令  $A = -\alpha - \mu qi + \beta q^2 + 2\gamma |u_0|^2$ , 由(10.10)可得如下色散关系

$$\Omega^2 - 2(i\text{Re}A + q\mu^*)\Omega + |\gamma|^2 |u_0|^4 - |A|^2 + 2A\mu^* qi = 0. \quad (10.11)$$

因

$$\begin{cases} \text{Re}A = c_0(q^2 + 2k_0q + |u_0|^2), \\ \text{Im}A = q^2 + 2k_0q - |u_0|^2, \end{cases} \quad (10.12)$$

解方程(10.11), 利用(10.4)又可得

$$\Omega_{1,2} = c_0(q^2 + |u_0|^2)i - 2k_0q \pm i\sqrt{\Delta}, \quad (10.13)$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta = & (1 + c_0^2) |u_0|^4 - (q^2 + 2k_0q - |u_0|^2)^2 \\ & + 4k_0q(c_0 - i)[q^2 + 2k_0q - |u_0|^2 - k_0(c_0 - i)q]. \end{aligned} \quad (10.14)$$

为了研究解的线性稳定性, 我们必须研究根(10.13)的虚部, 即在什么关系下,  $c_0, q$  和  $|u_0|$  将使  $\Omega$  的虚部为负的?

令  $\Delta = \Delta_r + i\Delta_i, \Omega = \Omega_r + i\rho$ , 则  $\Omega$  的虚部满足

$$\begin{cases} \rho_{\pm}(c_0, q, |u_0|) = c_0(q^2 + |u_0|^2) \pm (\Delta_r^2 + \Delta_i^2)^{\frac{1}{4}} \cos \frac{\theta}{2}, \\ \Omega_{r\pm}(c_0, q, |u_0|) = -2k_0q \pm (\Delta_r^2 + \Delta_i^2)^{\frac{1}{4}} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}}, \end{cases} \quad (10.15)$$

其中  $\theta = \arctan \frac{\Delta_i}{\Delta_r}$ , 且

$$\begin{aligned} \Delta_r = & (1 + c_0^2) |u_0|^4 - (q^2 + 2k_0q - |u_0|^2)^2 \\ & + 4k_0q[c_0(q^2 + 2k_0q - |u_0|^2 - k_0c_0q) + k_0q], \\ \Delta_i = & 4k_0q(2c_0k_0q - q^2 - 2k_0q + |u_0|^2). \end{aligned}$$



因  $\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{\Delta_r + \sqrt{\Delta_r^2 + \Delta_i^2}}{2\sqrt{\Delta_r^2 + \Delta_i^2}}}$ , 由(10.15) 可得

$$\rho_{\pm}(c_0, q, |u_0|) = c_0(q^2 + |u_0|^2) \pm \sqrt{\frac{\sqrt{\Delta_r^2 + \Delta_i^2} + \Delta_r}{2}},$$

$$\Omega_{\pm}(c_0, q, |u_0|) = -2k_0q \pm \sqrt{\frac{\sqrt{\Delta_r^2 + \Delta_i^2} - \Delta_r}{2}}. \quad (10.16)$$

如  $\rho > 0$  若  $\rho_+ > 0$  则  $u_s$  是稳定的, 否则, 它是线性不稳定的, 由(10.16) 可分析  $\rho_{\pm}$  的符号. 为简单起见, 取  $k_0 = 0, u_s = e^{it}$  为 Stokes 解,  $|u_0| = 1, \Delta_i = 0$ , 则(10.16) 可写为

$$\begin{cases} \rho_{\pm}(c_0, q, 1) = c_0(1 + q^2) \pm \sqrt{(\Delta_r + |\Delta_r|)/2}, \\ \Omega_{\pm}(c_0, q, 1) = \pm \sqrt{(|\Delta_r| - \Delta_r)/2}, \end{cases} \quad (10.17)$$

这里  $\Delta_r = (1 + c_0^2) - (q^2 - 1)^2$ , 令  $q_* = \sqrt{1 + \sqrt{1 + c_0^2}}$ , 则  $q_*$  为  $\Delta_r = 0$  的根.

(I) 如  $|q| \geq q_*$ , 则  $\Delta_r \leq 0$ , 此时(10.17) 为

$$\begin{cases} \rho_{\pm}(c_0, q, 1) = c_0(1 + q^2), \\ \Omega_{\pm}(c_0, q, 1) = \pm \sqrt{-\Delta_r}. \end{cases} \quad (10.18)$$

这是清楚的, 即 Stokes 解是稳定的, 存在振荡现象.

(II) 如  $|q| \leq q_*$ , 则  $\Delta_r > 0$ , 此时(10.17) 变为

$$\begin{cases} \rho_{\pm}(c_0, q, 1) = c_0(1 + q^2) \pm \sqrt{(1 + c_0) - (q^2 - 1)^2}, \\ \Omega_{r\pm}(c_0, q, |u_0|) = 0. \end{cases} \quad (10.19)$$

图 10.1 表明对于  $k_0, c_0 = 0.25$  的色散关系.

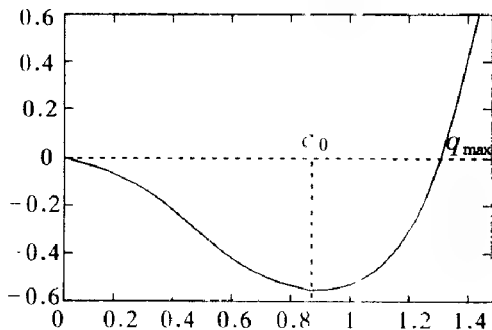


图 10.1

设  $\rho$  为非负数,则由图 10.1 可知存在  $\rho = 0$  的最大根  $q_{\max}$ , 事实上,

$$q_{\max} = \sqrt{\frac{2(1 - c_0^2)}{1 + c_0^2}},$$

则  $\rho_-(c_0, q_{\max}, 1) = 0$ , 当  $q > q_{\max}, \rho_- > \rho_- > 0$ , 则由(10.9)知, 当  $u_0 \neq 0$  时, 对应于(10.5)的渐近稳定不动点, 即(10.1)的行波  $u_s$  有

$$u(x, t) = u_0 + \delta u + e^{i(qx + \Omega t)} + \delta u e^{-i(qx + \Omega t)} \\ \rightarrow u_0, \quad t \rightarrow \infty.$$

当  $0 < q < q_*$  时,  $\rho_-(c_0, q, 1) < 0$ ,  $\rho_-$  称为调制不稳定的线性增长率. 因此由(10.9)可知,  $u_0 \neq 0$  对应于双曲点.

为了进行数值方法模拟, 考虑  $q_0$  使得  $\rho_-(c_0, q_0, 1)$  取极小, 则  $q_0$  对应于最大不稳定的波数.

当  $q < q_* = \sqrt{1 + \sqrt{1 + c_0^2}}$  时, 则  $\rho_-(c_0, q, 1) > 0$ , 置  $q_0 = \sqrt{1 - c_0}$ , 则  $\rho_-(c_0, q_0, 1)$  在  $q = q_0$  取极小, 即

$$\min_{0 < q < q_{\max}} \rho_-(c_0, q, 1) = \rho_-(c_0, q_0, 1) = -(1 - c_0)^2.$$

对于周期边界条件, (10.7) 的特征函数可选为

$$\begin{bmatrix} \delta u \\ \delta u^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon e^{i\lambda t} \\ \epsilon^* e^{-i\lambda t} \end{bmatrix} \cos(q_0 x), \quad (10.20)$$

其中  $\epsilon, \epsilon^*$  为小参数, 如考虑线性算子特征函数的最大振幅, 它可表为

$$|\delta u(x, t)| = |c_1 e^{-\rho_-(c_0, |u_0|, q_0)t} + c_2 e^{-\rho_-(c_0, |u_0|, q_0)t}| \\ \cdot |\cos(q_0 x)|, \quad (10.21)$$

其中  $c_1, c_2$  为小实参数. (10.21) 的第一项是主要项, 因第二项当  $t \rightarrow \infty$  时它趋于零. 如我们构造相平面空间  $(|u(x, t)|, \partial_t |u(x, t)|)$ , 则有

**定理 10.1** 在相平面  $(|u(x, t)|, \partial_t |u(x, t)|)$  上有

(I)  $c_0 = 0$ , 方程(10.1)退化为可积立方非线性 Schrödinger 方程, (i) 当  $u_0 \neq 0$ , 对于行波解  $u_s$ ,  $(|u_s|, 0)$  为双曲点; (ii) 对

于行波解  $0, (0,0)$  为椭圆点.

(II)  $c_0 > 0$ , 则 (i) 当  $0 < q \leq q_{\max}, 0 < c_0 \leq 1$  时, 对于行波解  $u_s, (|u_s|, 0)$  为双曲点; (ii) 当  $q_* > q > q_{\max}$  时, 对于行波解  $u_s, (|u_s|, 0)$  为渐近稳定点; (iii) 当  $q_* < q$  时, 对于行波解  $u_s, (|u_s|, 0)$  为渐近稳定点, 但它存在着振荡.

我们用拟谱方法进行计算, 取初值为

$$u_0(x, 0) = u_s(x, 0) + \epsilon e^{i\theta} \cos(qx), \quad (10.22)$$

其中  $\epsilon$  为小实数, 周期  $L = 2\pi/q_0$ .

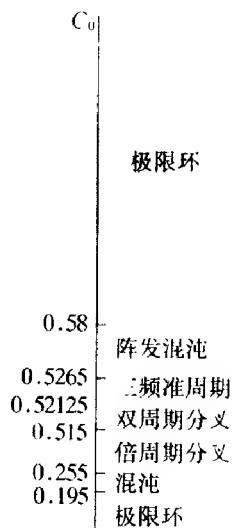


图 10.2  $q_0 = \sqrt{1 - c_0 - u_0^2} \sqrt{1 - |u_0|^2}$

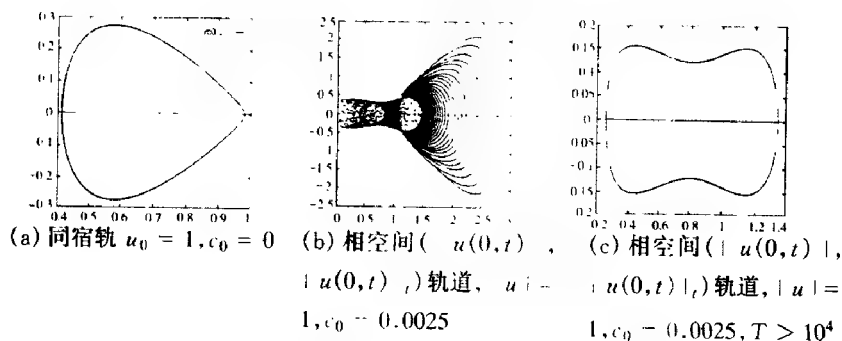
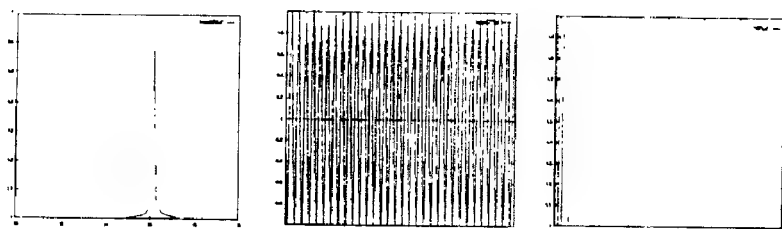


图 10.3

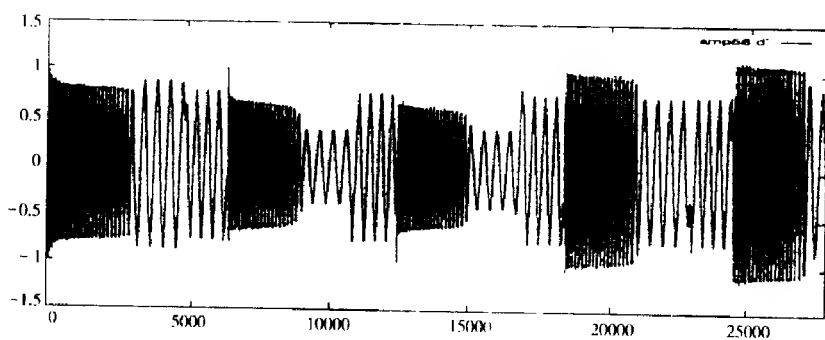


(a) 功率谱

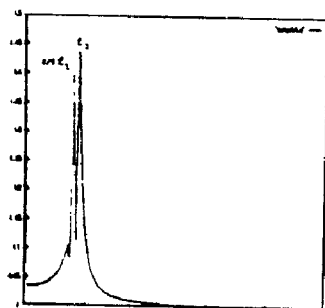
(b) 振幅

(c) 波数谱

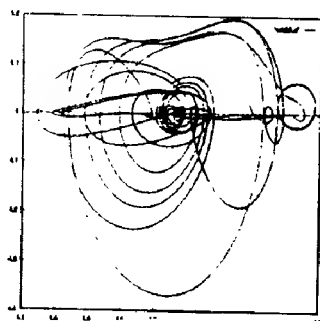
图 10.4  $0.5875 < C_0 < 1$  极限环



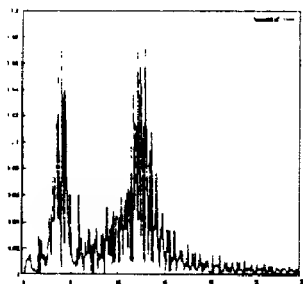
(a) 振幅  $0 < t < 2280$



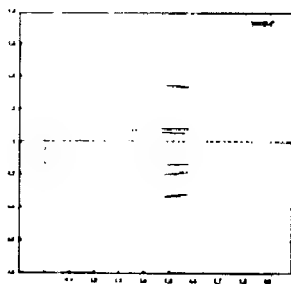
(b) 功率谱



(c) 在相空间  $\left(u\left(\frac{L}{2}, t\right), \frac{\partial}{\partial t} \left| u\left(\frac{L}{2}, t\right) \right| \right)$  轨道

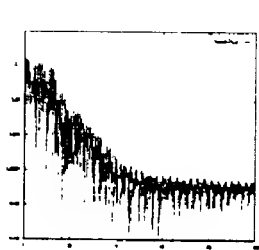


(d) Poincaré 截面

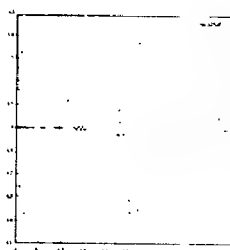


(e) 功率谱  $1208.6 < t < 2847$

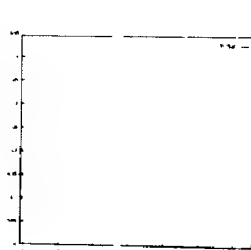
图 10.5  $c_0 = 0.58$ , 异宿轨, 阵发现象



(a) 功率谱

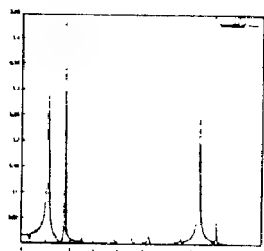


(b) Poincaré 截面

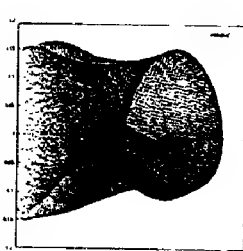


(c) 波数谱

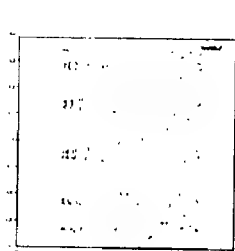
图 10.6(A)  $c_0 = 0.575$



(a) 功率谱

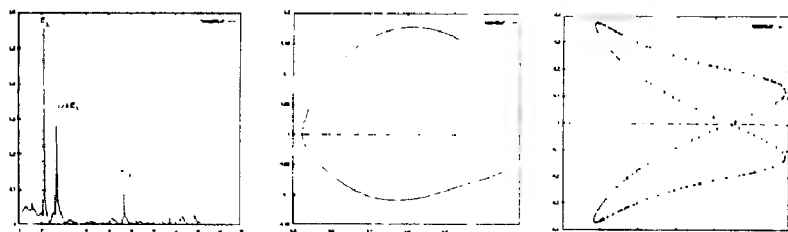


(b) 相平面轨道



(c) Poincaré 截面

图 10.6(B)

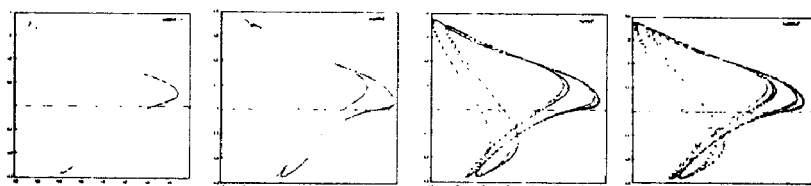


(a) 功率谱

(b) 相平面轨迹

(c) Poincaré 截面

图 10.7  $0.255 \leq c_0 < 0.52125$  双周期



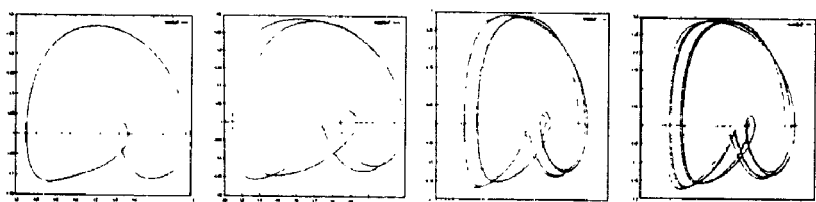
(a)  $c_0 = 0.35$

(b)  $c_0 = 0.275$

(c)  $c_0 = 0.76$

(d)  $c_0 = 0.255$

图 10.8 Poincaré 截面



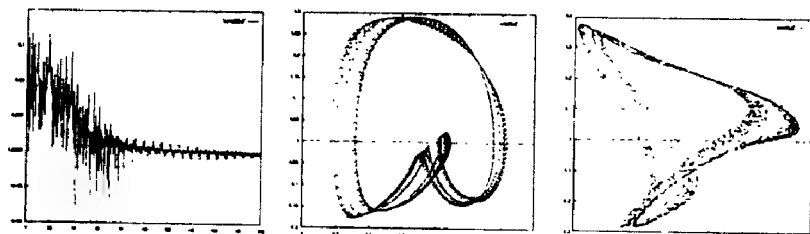
(a)  $c_0 = 0.35$

(b)  $c_0 = 0.275$

(c)  $c_0 = 0.76$

(d)  $c_0 = 0.255$

图 10.9 相空间轨迹



(a) 功率谱

(b) 相平面轨迹

(c) Poincaré 截面

图 10.10  $c_0 = 0.25$

对于 GL 方程(10.1) 三次拟谱显式构式如下:

$$\begin{cases} \frac{\bar{u}_{Nj}^{n+1} - u_{Nj}^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{c_0}{2}(\bar{u}_{Nj}^{n+1} + \bar{u}_{Nj}^{n-1}) - \frac{(c_0 + i)}{2}j^2q_0^2(\bar{u}_{Nj}^{n+1} + \bar{u}_{Nj}^{n-1}) \\ \quad - (c_0 - i)\{\|\bar{u}_N^n\|^2 u_{Nj}^n\}, \\ \frac{u_{Nj}^1 - u_{Nj}^0}{\Delta t} = c_0 u_{Nj}^0 - (c_0 + i)j^2q_0^2 u_{Nj}^0 - (c_0 - i)\{\|\bar{u}_N\|^2 u_N^0\}_j, \\ \bar{u}_{Nj}^0 = k \sum_{m=0}^{N-1} u_0(x_m) \exp(ijq_0 x_m), j = 0, 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (10.23)$$

其中  $u_0(x)$  为给定的值,  $\bar{u}_{Nj}^n$  为  $u_N^n \in S_N$  的第  $j$  个离散 F 氏系数.

$$S_N = \text{span}_{\frac{N}{2}, \frac{N}{2}+1} \{\exp(ijq_0 x)\}.$$

显然

$$\begin{aligned} \bar{u}_{Nj}^n &= (u, \exp(ijq_0 x))_k = k \sum_{m=0}^{N-1} u_N^n(x_m) \exp(ijq_0 x_m), \\ k &= \frac{2\pi}{Nq_0}, x_m = mk. \end{aligned}$$

$u_N^n(x_m)$  定义为

$$u_N^n(x_m) = \sum_{j=0}^{n-1} \bar{u}_{Nj}^n \exp(ijq_0 x_m).$$

令  $I_N: C^0(\cdot) \rightarrow S_N$  为插值算子

$$I_N V(x) = \sum_{m=0}^{n-1} (v(x), \exp(imq_0 x)) k \exp(imq_0 x).$$

定义  $L_p^2(\cdot)$  内积  $(\cdot, \cdot)$  为

$$(u(x), v(x)) = \int_0^{2\pi/q_0} u(x) v^*(x) dx,$$

$$\|v(x)\| = \{(v(x), v(x))\}^{\frac{1}{2}}.$$

定义周期 Sobolev 空间  $H_p^s(\cdot)$ ,

$$\|v(x)\|_\sigma = \left\{ \sum_{0 \leq j \leq \sigma} \left\| \frac{\partial^j u}{\partial x^j} \right\| \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

对于插值算子  $I_N$  具有如下性质.

**引理 10.2** 设  $v \in H_p^s(\cdot)$ , 则对任何  $0 \leq \sigma < \mu \leq s$  有

$$\|v - I_N v\|_s \leq c N^{s-\mu} \|v\|_\mu.$$

引理 10.3 对任何  $f, g \in C^0(\cdot)$ , 则

$$(f(x), g(x))_k = (I_N f(x), I_N g(x)).$$

定理 10.4 设 (10.1) 周期初值问题的解  $u \in C^3([0, T]; H_p^s(\cdot))$ , 则存在常数  $c_j (j = 1, 2, 3)$ , 它与  $\Delta t, N$  无关, 当  $\Delta t < c_1, N > c_2$  时,

$$\|u_N^n - u^n\| \leq c_3((\Delta t)^2 + N^{-s}).$$

证 (10.23) 的第一个方程等价于

$$\begin{aligned} \left( \frac{u_N^{n+1} - u_N^{n-1}}{2\Delta t}, \exp(ijq_0 x) \right)_k &= c_0 \left( \frac{u_N^{n+1} + u_N^{n-1}}{2}, \exp(ijq_0 x) \right)_k \\ &+ (c_0 + i) \left( \frac{(u_N^{n+1} + u_N^{n-1})_{xx}}{2}, \exp(ijq_0 x) \right)_k - (c_0 - i) \\ &\cdot (f(|u_N^n|^2) u_N^n, \exp(ijq_0 x))_k, \end{aligned}$$

其中  $f(s) = s$ , 由引理 10.3, 对任何  $\phi \in S_N$  有

$$\begin{aligned} \left( \frac{u_N^{n+1} - u_N^{n-1}}{2\Delta t}, \phi \right) &= c_0 \left( \frac{u_N^{n+1} + u_N^{n-1}}{2}, \phi \right) + (c_0 + i) \\ &\cdot \left( \frac{(u_N^{n+1} + u_N^{n-1})_{xx}}{2}, \phi \right) - (c_0 - i) (I_N[f(|u_N^n|^2) u_N^n], \phi). \end{aligned} \quad (10.24)$$

在方程 (10.1) 中离散  $u_t$  为  $\frac{u_N^{n+1} - u_N^{n-1}}{2\Delta t}$ , 再作 (10.1) 与  $\phi \in S_N$  在  $L_p^2$  作内积, 再减去 (10.24), 可得

$$\begin{aligned} \left( \frac{e_N^{n+1} - e_N^{n-1}}{2\Delta t}, \phi(x) \right) &= c_0 \left( \frac{e_N^{n+1} + e_N^{n-1}}{2}, \phi(x) \right) + (c_0 + i) \\ &\cdot \left( \frac{(e_N^{n+1} + e_N^{n-1})_{xx}}{2}, \phi(x) \right) - (c_0 - i) (f(|u^n|^2) u^n \\ &- I_N[f(|u_N^n|^2) u_N^n], \phi(x)) + (\tau^n(x), \phi(x)), \end{aligned} \quad (10.25)$$

其中  $\tau^n(x)$  为截断误差,  $e^n = u^n - u_N^n$ .

令  $\xi^n = u^n - P_N u^N$ ,  $\eta^n = P_N u^n - u_N^n$ , 则  $e^n = \xi^n + \eta^n$ , 这里  $P_N$  表示正交投影:  $L_p^2(\cdot) \rightarrow S_N$ . 易知



$$\|e^n\| \leq cN^{-2\delta} + \|\eta^n\|. \quad (10.26)$$

由于正交性,有

$$(e^n, \phi(x)) = (\eta^n, \phi), (e_{xx}^n, \phi(x)) = -(\eta_x^n, \phi_x). \quad (10.27)$$

将(10.27)代入(10.25),取  $\phi = \eta^{n+1} + \eta^{n-1}$ , (10.25) 取实部得

$$\begin{aligned} \|\eta^n\|_i^2 &= c_0 \|\eta^{n+1} + \eta^{n-1}\|^2 - \operatorname{Re}(c_0 - i)(f(|u^n|^2)u^n \\ &\quad - I_N[f(|u_N^n|^2)u_N^n] + \tau^n, \eta^{n+1} + \eta^{n-1}), \end{aligned} \quad (10.28)$$

这里

$$\|\eta^n\|_i^2 = \frac{\|\eta^{n+1}\|^2 - \|\eta^{n-1}\|^2}{2\Delta t}.$$

设  $f^*(z) \in C_0^\infty(\cdot)$ ,  $f^*(v(x, t))$  满足

$$f^*(v(x, t)) = \begin{cases} f(v(x, t)), & v(x, t) \in S_\varepsilon(u(x, t)), \\ \bar{f}(v(x, t)), & v(x, t) \notin S_\varepsilon(u(x, t)), \end{cases} \quad (10.29)$$

这里  $S_\varepsilon(u(x, t))$  表示方程(10.1)的解的  $\varepsilon$  邻域.

对特殊函数  $f^*$  在(10.28)中作估计

$$\begin{aligned} &(f^*(u^n)u^n - I_N[f^*(u_N^n)u_N^n], \eta^{n+1} + \eta^{n-1}) \\ &= ((E - I_N)(f^*(u^n)u^n) + I_N(f^*(u^n)u^n - f^*(u_N^n)u_N^n), \\ &\quad \cdot \eta^{n+1} + \eta^{n-1}) = ((E - I_N)(f^*(u^n)u^n) + I_N[(f^*(u^n) \\ &\quad - f^*(u_N^n))u^n] + I_N[f(u_N^n)e^n], \eta^{n+1} + \eta^{n-1}) \\ &\leq [\|u^n\|_\infty (\|\frac{\partial f^*}{\partial u}\|_\infty \|e^n\| + CN^{-2\delta}) \\ &\quad + (\|f^*(u_N^n)\|_\infty \|e^n\| + CN^{-2\delta})] \|\eta^{n+1} + \eta^{n-1}\| \\ &\leq c[N^{-2\delta} + \|\eta^{n-1}\|^2 + \|\eta^n\|^2 + \|\eta^{n+1}\|^2], \end{aligned} \quad (10.30)$$

这里  $E$  为恒等算子. 对于(10.28)最后一项有

$$(\tau^n, \eta^{n+1} + \eta^{n-1}) \leq c(\Delta t^4 + \|\eta^{n+1}\|^2 + \|\eta^{n-1}\|^2). \quad (10.31)$$

将(10.30)和(10.31)代入(10.28),得

$$\|\eta^n\|_i^2 \leq c(N^{-2\delta} + \Delta t^4 + \|\eta^{n-1}\|^2 + \|\eta^n\|^2 + \|\eta^{n+1}\|^2). \quad (10.32)$$

用 Gronwall 不等式, 当  $\Delta t$  充分小时, 有

$$\|\eta''\| \leq c(N^{-1} + (\Delta t)^2 + \|\eta^1\| + \|\eta^0\|). \quad (10.33)$$

由(10.23)式中第二个方程, 类似上面证明可得

$$\|\eta^1\| \leq c(\Delta t^2 + N^{-1}). \quad (10.34)$$

联系(10.33)、(10.34)和(10.26), 定理对于  $f^*$  成立, 易知对  $f$  也是成立的.

## § 11 三次—五次非线性 Ginzburg-Landau 方程的慢周期解

考虑如下的 Ginzburg-Landau 方程

$$\begin{aligned} w_t &= c_0 w + (c_0 + i\epsilon c_1) w_{,xx} - \left(\frac{c_0}{2} + i\epsilon c_2\right) \\ &\quad |w|^2 w - \left(\frac{c_0}{2} + i\epsilon c_3\right) |w|^4 w, \end{aligned} \quad (11.1)$$

其中  $w(x, t)$  为空间和时间  $(x, t) \in R \times R^+$  的复值函数,  $c_0, c_1, c_2, c_3$  为实常数,  $\epsilon$  为小参数. 当  $c_0 = 0$  时, 它为非线性 Schrödinger 方程

$$i w_t + \epsilon c_1 w_{,xx} - \epsilon c_2 |w|^2 w - \epsilon c_3 |w|^4 w = 0. \quad (11.2)$$

我们先看看(11.1)的周期解

$$w(x, t) = \text{Re}^{i(kx - \omega t)}. \quad (11.3)$$

将(11.3)代入(11.1), 分开实部、虚部可得

$$\begin{cases} R^4 + R^2 = 2(1 - k^2), \\ w = \epsilon(c_1 k^2 + c_2 R^2 + c_3 R^4). \end{cases} \quad (11.4)$$

$w = 0$  为定常解,  $w \neq 0$  存在慢振幅周期解,  $w = O(\epsilon)$ .

为了对动力系统作进一步分析, 令

$$w(x, t) = \rho(x) e^{i[\theta(x) - \epsilon \omega t]}, \quad (11.5)$$

代入(11.1), 并乘两边以  $e^{-i[\theta(x) - \epsilon \omega t]}$ , 得

$$-i\epsilon \omega \rho = c_0 \rho + (c_0 + i\epsilon c_1)(\rho_{,xx} + 2i\rho_x \theta_x + i\rho \theta_{,xx} - \rho \theta_x^2)$$

$$- \left( \frac{1}{2} c_0 + i \varepsilon c_2 \right) \rho^3 - \left( \frac{c_0}{2} + i \varepsilon c_3 \right) \rho^5. \quad (11.6)$$

上式写成实部和虚部

$$\begin{aligned} -\varepsilon \omega \rho &= c_0(2\rho_x \theta_x + \rho \theta_{xx}) + \varepsilon c_1(\rho_{xx} - \rho \theta_x^2) - \varepsilon c_3 \rho^3 - \varepsilon c_3 \rho^5, \\ c_0 \rho + c_0(\rho_{xx} - \rho \theta_x^2) - \varepsilon c_1(2\rho_x \theta_x + \rho \theta_{xx}) - \frac{c_0}{2} \rho^3 - \frac{c_0}{2} \rho^5 &= 0. \end{aligned} \quad (11.7)$$

由(11.7)可得

$$\begin{cases} 2\rho_x \theta_x + \rho \theta_{xx} = \frac{\varepsilon c_0 \rho}{c_0^2 + \varepsilon^2 c_1^2} \left[ (c_1 - \omega) + \left( c_2 - \frac{c_1}{2} \right) \rho^2 + \rho^4 \left( c_3 - \frac{c_1}{2} \right) \right], \\ \rho_{xx} - \rho \theta_x^2 = \frac{\rho}{c_0^2 + \varepsilon^2 c_1^2} \left[ (c_0^2 + \varepsilon^2 c_1 \omega) - \left( \frac{c_0^2}{2} + \varepsilon^2 c_1 c_2 \right) \rho^2 - \left( \frac{c_0^2}{2} + \varepsilon^2 c_1 c_3 \right) \rho^4 \right]. \end{cases} \quad (11.8)$$

当  $\varepsilon = 0$  时可得可积方程组

$$\begin{cases} 2\rho_x \theta_x + \rho \theta_{xx} = 0, \\ \rho_{xx} - \rho \theta_x^2 = -\rho + \frac{1}{2} \rho^3 + \frac{1}{2} \rho^5, \end{cases} \quad (11.9)$$

具有积分

$$\begin{cases} \rho^2 \theta_x = \Omega, \\ \rho_x^2 + \rho^2 + \frac{\Omega^2}{\rho^2} - \frac{1}{4} \rho^4 - \frac{1}{6} \rho^6 = K, \end{cases} \quad (11.10)$$

其中  $\Omega$  和  $K$  为积分常数.

以下考虑  $\Omega = \Omega(x)$  为扰动方程组的慢变元.  $v = \rho_x$  从(11.8)可得

$$\begin{cases} \rho_x = v, \\ \begin{cases} v_x = \frac{\Omega^2}{\rho^3} - \rho + \frac{1}{2} \rho^3 + \frac{1}{2} \rho^5 + \frac{\varepsilon^2 c_1 \rho}{c_0^2 + \varepsilon^2 c_1^2} \cdot \left[ (c_1 - \omega) \right. \\ \left. + \left( c_2 - \frac{c_1}{2} \right) \rho^2 + \left( c_3 - \frac{c_1}{2} \right) \rho^4 \right], \\ \Omega_x = \rho^2 \frac{\varepsilon c_0}{c_0^2 + \varepsilon^2 c_1^2} \left[ (c_1 - \omega) + \left( c_2 - \frac{c_1}{2} \right) \rho^2 + \left( c_3 - \frac{c_1}{2} \right) \rho^4 \right]. \end{cases} \end{cases} \quad (11.11)$$

以下考虑未扰动方程组.

此时为方程组(11.11),  $\varepsilon = 0$ . 由此可知  $\Omega = \Omega_0 \in R$ , 可得方程组

$$\begin{cases} \rho_1 = v, \\ v_1 = \frac{\Omega_0^2}{\rho^3} - \rho + \frac{1}{2}\rho^3 + \frac{1}{2}\rho^5. \end{cases} \quad (11.12)$$

研究(11.12)的平衡点, 引入函数

$$g(P) = \frac{1}{2}P^4 + \frac{1}{2}P^3 - P^2 + \Omega_0^2, \quad (11.13)$$

其中  $\Omega_0$  为实常数,  $P = \rho^2$ . 显然(11.13)的根为(11.12)的平衡点. 当然除了平凡解  $P = 0, \Omega_0 = 0$  外,  $g(P)$  的图如图 11.1 所示 (对应于不同的  $\Omega_0$ ). 如

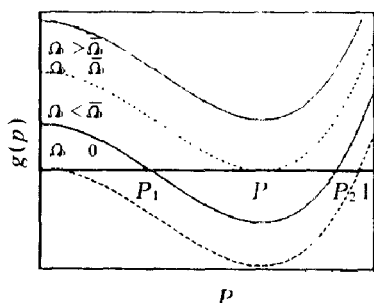


图 11.1  $P$  和  $g(p)$  的关系

$$p_0 = \frac{\sqrt{73} - 3}{8}, \quad \overline{\Omega}_0 = \sqrt{\frac{827 - 73\sqrt{73}}{1024}},$$

$P_j (j = 1, 2)$  为(11.13)的正根, 不难得到以下结果

**引理 11.1** 未扰动方程组(11.12) 具有

(I) 三个平衡点  $(\pm 1, 0), (0, 0)$ , 对  $\Omega_0 = 0$ ;

(II) 一对平衡点  $(\pm \sqrt{P_0}, 0), \Omega_0 = \pm \overline{\Omega}_0$ ;

(III) 二对平衡点  $(\pm \sqrt{P_j}, 0), 0 < \Omega_0 < \overline{\Omega}_0 (j = 1, 2)$ ;

(IV) 当  $\Omega > \bar{\Omega}_0$  时, 没有平衡点.

进一步,  $0 < P_1 < P_0 < P_2 < 1$ ,  $P_1(\Omega_0)$  为  $\Omega_0$  的增加函数,  $P_2(\Omega_0)$  为  $\Omega_0$  的减少函数, 满足

$$\begin{aligned}\lim_{\Omega_0 \rightarrow \bar{\Omega}_0} P_1(\Omega_0) &= \lim_{\Omega_0 \rightarrow \bar{\Omega}_0} P_2(\Omega_0) = P_0; \\ \lim_{\Omega_0 \rightarrow 0} P_1(\Omega_0) &= 0; \quad \lim_{\Omega_0 \rightarrow 0} P_2(\Omega_0) = 1.\end{aligned}$$

现讨论平衡点的性质.

容易验证(11.12) 在平衡点  $(\pm \rho_j^*, 0)$ ,  $\Omega_0 = \pm \Omega_j^*$  处的特征方程为

$$\lambda^2 - \frac{1}{P_j} \left( \frac{5}{2} P_j^4 + \frac{3}{2} P_j^3 - P_j^2 - 3\Omega_0^2 \right) = 0. \quad (11.14)$$

令  $q(P_j) = \frac{5}{2} P_j^4 + \frac{3}{2} P_j^3 - P_j^2 - 3\Omega_0^2$ , 则  $g(P_j) = 0$ ,  $q(P_j) + 3g(P_j) = 4P_j^4 + 3P_j^3 - 4P_j^2$ , 我们有  $q(P_j) = q(P_j) + 3g(P_j) = 4P_j(P_j - P_0) \cdot \left( P_j + \frac{\sqrt{73} + 3}{8} \right)$ . 当  $P_j < P_0$  时, 我们有  $q(P_j) < 0$ . 这推出  $\lambda_{1,2}$  是纯虚根. 因此  $P_j$  为稳定的(中心)不动点, 另一方面, 当  $P_j > P_0$ ,  $q(P_j) > 0$ , 则  $P_j$  是不稳定(鞍点)不动点. 当  $P_j = P_0$  时,  $q(P_j) = 0$ . 由(11.4) 的分析, 我们有如下结果.

**引理 11.2** 方程(11.12) 临界点的性质

(1) 当  $0 < |\Omega_0| < \bar{\Omega}_0$  时, 临界点  $(\pm \sqrt{P_1}, 0)$  是中心稳定, 临界点  $(\pm \sqrt{P_2}, 0)$  是鞍点不稳定.

(2) 当  $\Omega_0 = 0$  时, 临界点  $(1, 0)$  是鞍点不稳定, 而  $(0, 0)$  是一个中心.

(3) 当  $\Omega_0 = \bar{\Omega}_0$  时, 临界点  $(\pm \sqrt{P_0}, 0)$  是非双曲的.

定义  $K(\rho, v)$  作为第二积分定义如下:

$$K(\rho, v) = v^2 + \frac{\Omega^2}{\rho^2} + \rho^2 - \frac{1}{4} \rho^4 - \frac{1}{6} \rho^6. \quad (11.15)$$

以  $K_i(\rho(\Omega_0), 0)$  表示  $K$  在临界点  $\rho_i(\Omega_0)$ ,  $i = 1, 2$  的值.  $K(\rho, 0)$  的极小值和极大值对应于(11.2) 的中心和鞍点, 如图 11.2 所示.

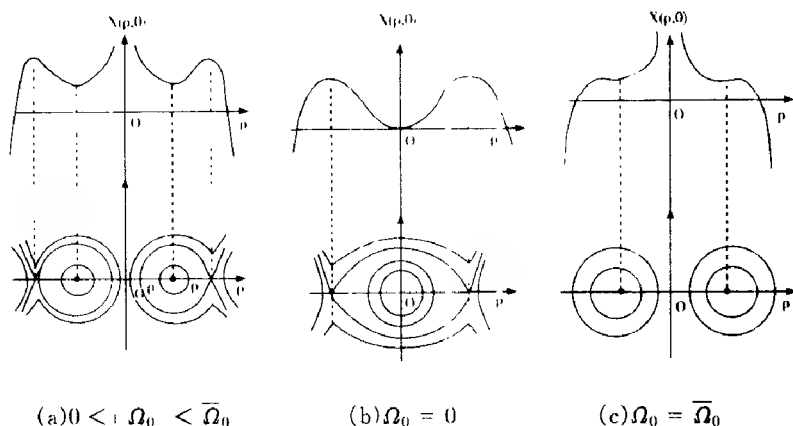


图 11.2 方程(11.12)的相图

由(11.15)的积分值和引理 9.2, 可得(11.12) 相平面上的图像:

**引理 11.3** (1) 存在二族周期轨道和二族同宿轨道, 它们对于  $v$  轴是对称的,  $0 < |\Omega_0| < \overline{\Omega}_0$  (见图 11.2).

(2) 存在单参数周期轨道和二族异宿轨道  $\Omega_0 = 0$ .

(3) 存在二族周期轨道关于  $v$  轴是对称的,  $\Omega_0 = \overline{\Omega}_0$ .

(11.12) 的计算结果对  $0 < |\Omega_0| < \overline{\Omega}_0$  和  $\Omega_0 = 0$ , 见图 11.3.

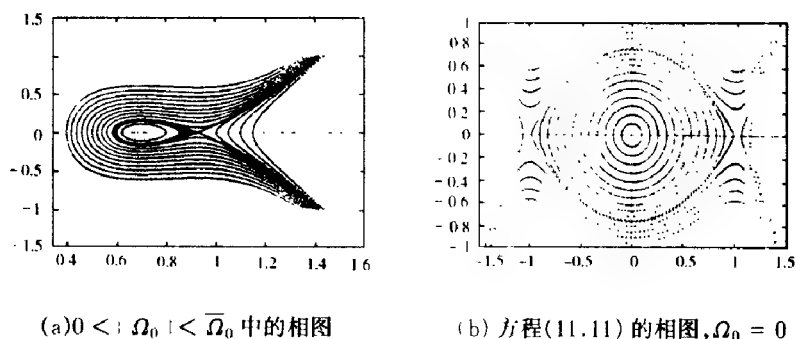


图 11.3

(11.1) 的周期解, 对  $x$  是拟周期的, 对  $z$  是慢周期的.

(11.12) 的周期轨道的积分值  $(K, \Omega)$  在  $(K, \Omega)$  空间形成一个有界域  $E$ . (对称于  $K$  轴).  $E$  的边界  $\partial E$ , 由对应于临界点  $\rho_i(\Omega)$  ( $i = 1, 2$ ) 的点组成.

$$\partial E_i = \left\{ (K, \Omega) : \Omega^2 = y^2 - \frac{1}{2}y^3 - \frac{1}{2}y^4, \right. \\ \left. K = 2y - \frac{3}{4}y^2 - \frac{2}{3}y^3, y = \rho_i^2 \right\}, \quad i = 1, 2. \quad (11.16)$$

由数值计算得到图 11.4.

以下讨论扰动方程组(11.11)平衡点的存在性及其性质.

**引理 11.4** (1) 方程组(11.11)所确定的流在对称变换下:  $x \rightarrow -x, v \rightarrow -v, \Omega \rightarrow -\Omega$  以及  $\rho \rightarrow -\rho, v \rightarrow -v$  是不变的.

(2)(11.11)的临界点,如它们存在而且满足条件

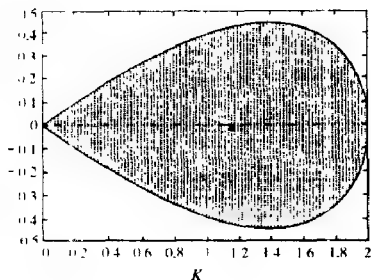


图 11.4 区域  $E, K$  和  $\Omega$  的关系

$$\begin{cases} aP^2 + bP + c = 0, \end{cases} \quad (11.17)$$

$$\begin{cases} P^2 - \frac{1}{2}P^3 - \frac{1}{2}P^4 = \Omega^2, P = \rho^2, \end{cases} \quad (11.18)$$

其中

$$a = c_3 - \frac{c_1}{2}, b_1 = c_2 - \frac{c_1}{2}, c = c_1 - \omega,$$

则它也是未扰动方程组(11.10)的临界点,如  $P_*$  是一个临界点,则  $0 < p_* \leq 1$ . 临界点的位置与  $c_0, \epsilon$  无关.

这是显然的,如  $P = \rho^2, \Omega$  为(11.11)的临界点,则  $P$  满足(11.17),(11.18).

**引理 11.5** 设非负实数  $P_*$  为(11.18)的解,当且仅当

$$0 \leq \Omega^2 = -\frac{1}{2}P_*^2(P_* - 1)(p_* + 2) \Leftrightarrow 0 \leq P_* \leq 1.$$

对  $a \neq 0$  写(11.17),(11.18)为

$$\begin{cases} P^2 + rP + s = 0, \end{cases} \quad (11.19)$$

$$\begin{cases} P^2 - \frac{1}{2}P^3 - \frac{1}{2}P^4 = \Omega^2, \end{cases} \quad (11.20)$$

其中  $r = \frac{b}{a}, s = \frac{c}{a}$ .

从(11.19), (11.20) 求解  $P$  和  $\Omega$ . 由(11.17), (11.18) 或(11.12) 的讨论, 有如下存在性定理

**定理 11.6** 设  $f(P) = P^2 - \frac{1}{2}P^3 - \frac{1}{2}P^4$ , 则有

(1) 在  $s = \frac{r^2}{4}, 0 > r \geq -2$ , 对  $\omega = c_1 - \Delta < c_2 + c_3, 2c_2 < c_1 < 2c_3$  或  $\omega = c_1 + \Delta > c_2 + c_3, 2c_3 < c_1 < 2c_2$ , 其中  $\Delta = \frac{\left(c_2 - \frac{c_1}{2}\right)^2}{4\left(c_3 - \frac{c_1}{2}\right)}$ , 存在(11.14) 的一个正根  $0 < p_0 = \frac{c_1 - 2c_2}{2(2c_3 - c_1)} < 1$

和(11.11) 的四个平衡点:  $(p_0, 0, \pm \Omega_0)$  和  $(-p_0, 0, \pm \Omega_0)$ , 这里  $\pm p_0 = \pm \sqrt{p_0}, \pm \Omega_0 = \pm \sqrt{f(p_0)}$ .

(2) 在区域  $0 < s < \frac{r^2}{4}, r + s > -1, r < 0$  上: 对于  $c_1 - \Delta < \omega < \min\{c_1 + c_2 + c_3\}, 2c_2 < c_2 < 2c_3$  或  $\max\{c_1, c_2 + c_3\} < \omega < c_1 + \Delta, 2c_3 < c_1 < 2c_2$ , 存在(11.20) 二个正根  $0 < P_1 < P_2 < 1$  和(11.12) 的 8 个平衡点:

$(\rho_1, 0, \pm \Omega_1), (-\rho_1, 0, \pm \Omega_1), (\rho_2, 0, \pm \Omega_2), (-\rho_2, 0, \pm \Omega_2)$ , 其中  $\pm \rho_i = \pm \sqrt{p_i}, i = 1, 2, \Omega_i^2 = \Omega_i^2 = (-\Omega_i)^2, i = 1, 2$ .

(3) 在区域  $s = 0, -1 < r < 0$  上: 对  $2c_2 < \omega = c_1 < \min\{c_2 + c_3, 2c_3\}$  或  $\max\{c_2 + c_3, 2c_3\} < \omega = c_1 < 2c_2$ , 存在(11.17), (11.18) 的一个零根  $P = 0$  和一个正根  $p_1 = \frac{c_1 - 2c_2}{2c_3 - c_1} < 1$  和存在(11.11) 的五个平衡点:

$(0, 0, 0), (\rho_1, 0, \pm \Omega_1), (-\rho_1, 0, \pm \Omega_1),$

其中  $\pm \rho_1 = \pm \sqrt{p_1}, \pm \Omega_1 = \pm \sqrt{f(p_1)}$ .

(4) 在区域  $s < 0, r + s > -1$  上: 对  $\omega \leq c_2 + c_3, c_1 < \min\{2c_3, \omega\}$  或  $\omega \geq c_2 + c_3, c_1 > \max\{2c_3, \omega\}$ , 存在(11.18) 的一个正根和(11.11) 的四个平衡点:



$$(\rho_1, 0, \pm \Omega_1), (-\rho_1, 0, \pm \Omega_1),$$

其中  $\pm \rho_1 = \pm \sqrt{P}$ ,  $\pm \Omega_1 = \pm \sqrt{f(P)}$ .

(5) 在区域  $r + s = -1$ ,  $-2 < r$  上: 对  $c_1 - \Delta < \omega = c_2 + c_3 < c_1 < 2c_3$  或  $2c_3 < c_1 < \omega = c_2 + c_3 < c_1 + \Delta$ , 存在(11.11)的一个正根  $P = 1$ , 因此存在(11.11)二个平衡点:  $(1, 0, 0)$  的  $(-1, 0, 0)$ .

(6) 在区域  $r = 0, s = 0$  上: 对  $c_1 \neq 2c_3, \omega = c_1 = 2c_2$  仅存在(11.11)的一个临界点  $(0, 0, 0)$ .

(7) 在区域  $a = 0, 0 < -\frac{c}{b} < 1$  上: 仅存在(11.17), (11.18)一个正根  $P = -\frac{c}{b} < 1$ , 存在(11.11)二个临界点  $(\pm \sqrt{-\frac{c}{b}}, 0, \pm \Omega)$ .

当系数  $a = c_3 - \frac{c_1}{2} \neq 0$  时, (11.11) 系统的平衡点数目依赖于  $r$  和  $s$ , 图 11.5 表明  $r$  和  $s$  的关系. 图 11.6 表明 8 个平衡点, 能综合 9.6 于表 11.6 中.

现来研究平衡点的性质, (11.11) 的特征方程为

$$\lambda^3 - A_j \lambda - B_j c_j = 0, \quad (11.21)$$

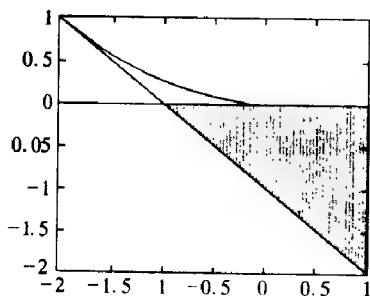


图 11.5  $r$  和  $s$  的关系

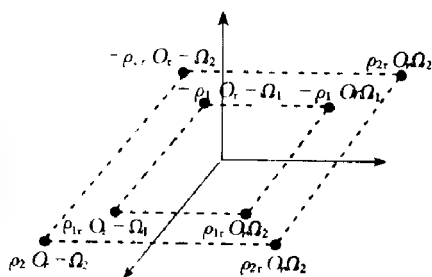


图 11.6 8 个平衡点的图

其中

$$A_j = -3 \frac{\Omega_j^2}{\rho_j^4} - 1 + \frac{3}{2} \rho_j^2 + \frac{5}{2} \rho_j^4 + \frac{\epsilon^2 c_1}{c_0^2 + \epsilon^2 c_1^2} [c + 3b\rho_j^2 + 5a\rho_j^4],$$

$$B_j = \frac{2\Omega_j}{\rho_j^3}, c_j = \frac{\epsilon c_0 \rho_j}{c_0^2 + \epsilon^2 c_1^2} [2c + 4b\rho_j + 6a\rho_j^4],$$

因  $aP_j^2 + bP_j + c = 0, P_j^2 - \frac{1}{2}P_j^3 - \frac{1}{2}p_j^4 = \Omega_j^2$ , 我们有

$$A_j = 4(P_j - P_0) \left( p_j + \frac{\sqrt{73} + 3}{8} \right) + \frac{2\epsilon^2 c_1 p_j}{c_0^2 + \epsilon^2 c_1^2} (b + 2ap_j),$$

$$B_j c_j = -\frac{4\Omega_j \epsilon c_0}{c_0^2 + \epsilon^2 c_1^2} (b + 2ap_j).$$

为方便计, 设  $c_1 > 0, \epsilon c_0 > 0$ , 以下讨论(11.14)平衡点的稳定性, 分二种情况:

情况 1 (11.17), (11.18) 有二个根.

设(11.17), (11.18) 具有二个正根, 则  $P_1 < -\frac{b}{2a} < P_2$ , 即  $2aP_1 + b < 0, 2aP_2 + b > 0$ . 如  $\Omega_j > 0$ ,

$$B_1 c_1 < 0, B_2 c_2 > 0, A_1 < 0, A_2 > 0. \quad (11.22)$$

首先讨论小正根  $P_1$  的稳定性, 设  $\Omega_j > 0, \lambda_1^1, \lambda_2^1, \lambda_3^1$  为(11.21)的三个根. 则由根和系数的关系可得

$$\begin{cases} \lambda_1^1 + \lambda_2^1 + \lambda_3^1 = 0, \end{cases} \quad (11.23)$$

$$\begin{cases} \lambda_1^1 \lambda_2^1 + \lambda_1^1 \lambda_3^1 + \lambda_2^1 \lambda_3^1 = -A_1 > 0, \end{cases} \quad (11.24)$$

$$\begin{cases} \lambda_1^1 \lambda_2^1 \lambda_3^1 = B_1 c_1 < 0. \end{cases} \quad (11.25)$$

(11.25) 推出存在一个负根, 设  $\lambda_3^1 < 0$ . 令  $\lambda_1^1 = \alpha + i\beta, \lambda_2^1 = \alpha - i\beta$ , 将  $\lambda_j^1$  代入(11.23), 有  $\alpha = -\frac{\lambda_3^1}{2} < 0$ . 因此

$$\operatorname{Re} \lambda_2^1 = \operatorname{Re} \lambda_1^1 > 0, \lambda_3^1 < 0.$$

其次分析对应于最大正根  $P_2$  的稳定性, 设  $f_2(\lambda) = \lambda^3 - A_2\lambda - B_2c_2$ , 则  $f_2'(\lambda) = 3\lambda^2 - A_2$ ,  $f_2(\lambda)$  具有二个定态点  $\pm\sqrt{\frac{A_2}{3}}$ , 更进一步  $B_2c_2 = O(\epsilon)$ . 推出

$$f_2\left(-\sqrt{\frac{A_2}{3}}\right) = \frac{2}{3}A_2\sqrt{\frac{A_2}{3}} - B_2c_2 > 0,$$

$$f_2\left(\sqrt{\frac{A_2}{3}}\right) = -\left(\frac{2}{3}A_2\sqrt{\frac{A_2}{3}} + B_2c_2\right) < 0.$$

因

$$f_2(0) = -B_2c_2 < 0, \lambda_1^2 < 0, \lambda_2^2 < 0,$$

$$\lambda_3^2 > 0 \left( \lambda_1^2 < -\sqrt{\frac{A_2}{3}} < \lambda_2^2, \lambda_3^2 > \sqrt{\frac{A_2}{3}} \right).$$

由以上分析对于(11.11)特征值(在 $P_1$ 和 $P_2$ 点线性化)有 $\lambda_3 < 0, \operatorname{Re} \lambda_j > 0 (j = 1, 2), \lambda_j < 0 (j = 1, 2), \lambda_3 > 0$  对于 $\Omega > 0, a \neq 0$ . 而 $P_1$ 和 $P_2$ 的特征值 $\lambda_3 > 0, \operatorname{Re} \lambda_j < 0 (j = 1, 2)$ 和 $\lambda_j > 0 (j = 1, 2), \lambda_3 < 0, \Omega < 0, a \neq 0$ . 我们有如下定理

**定理 11.7** 设(11.19), (11.20) 或(11.11) 具有二种类型的平衡点. 如 $\varepsilon c_0 > 0, \Omega_j > 0, c_1 > 0$ , 则 $P_1$ 是鞍焦点,  $P_2$ 是鞍点. 进一步

(i) 对平衡点 $P_1^1(\rho_1, 0, \Omega_1)$ 和 $P_1^2(-\rho_1, 0, \Omega_1)$ , 我们有 $\dim W_{\text{loc}}^s((\pm \rho_1, 0, \Omega)) = 1, \dim W_{\text{loc}}^u((\pm \rho_1, 0, \Omega_1)) = 2$ .

(ii) 对平衡点 $P_1^3(\rho_1, 0, -\Omega_1)$ 和 $P_1^4(-\rho_1, 0, -\Omega_1)$ , 我们有 $\dim W_{\text{loc}}^s((\pm \rho_1, 0, \Omega_1)) = 2, \dim W_{\text{loc}}^u((\pm \rho_1, 0, -\Omega_1)) = 1$ .

(iii) 对平衡点 $P_2^1(\rho_2, 0, \Omega_2)$ 和 $P_2^2(-\rho_2, 0, \Omega_2)$ , 我们有 $\dim W_{\text{loc}}^s((\pm \rho_2, 0, \Omega_2)) = 2, \dim W_{\text{loc}}^u((\pm \rho_2, 0, \Omega_2)) = 1$ .

(iv) 对于平衡点 $P_2^3(\rho_2, 0, \Omega_2)$ 和 $P_2^4(-\rho_2, 0, -\Omega_2)$ , 我们有 $\dim W_{\text{loc}}^s((\pm \rho_2, 0, -\Omega_2)) = 1, \dim W_{\text{loc}}^u((\pm \rho_2, 0, -\Omega_2)) = 2$ , 其中 $W_{\text{loc}}^s((\pm \rho_j, 0, \Omega_j))$ 和 $\dim W_{\text{loc}}^u((\pm \rho_j, 0, \Omega_j))$ 分别表示平衡点 $(\pm \rho_j, 0, \Omega_j) (j = 1, 2)$  稳定流形和不稳定流形.

情况 2 (11.17), (11.18) 有一个根.

如 $a = 0$ , 则 $P_* = \frac{\omega - c_1}{c_2 - \frac{c_1}{2}}$  为(11.17), (11.18) 的一个正根,

它几乎同于情况 1 有如下结果.

**定理 11.8** 如 $a = 0 (c_1 = 2c_3), \varepsilon c_0 b > 0$ , 则存在(11.11) 的 4 个平衡点 $(\pm \rho_*, 0, \Omega_*)$ ,  $(\pm \rho_*, 0, -\Omega_*)$ . 进一步有

(i) 如  $(\pm \rho_*)^2 = P_* < P_0$ , 则平衡点是鞍点焦点和  
 $\dim W_{\text{loc}}^s((\pm \rho_*, 0, \Omega_*)) = 2, \dim W_{\text{loc}}^u((\pm \rho_*, 0, \Omega_*)) = 1,$   
 $\dim W_{\text{loc}}^s((\pm \rho_*, 0, -\Omega_*)) = 1, \dim W_{\text{loc}}^u((\pm \rho_*, 0, -\Omega_*)) = 2.$

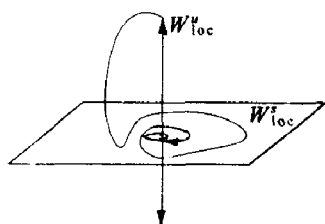
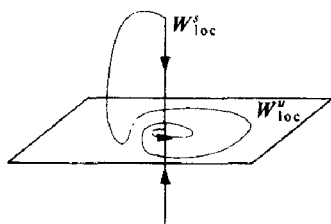
(ii) 如  $P_0 < (\pm \rho_*)^2 = P_* \leq 1$ , 则平衡点是鞍点, 且  
 $\dim W_{\text{loc}}^s((\pm \rho_*, 0, \Omega_*)) = 2, \dim W_{\text{loc}}^u((\pm \rho_*, 0, \Omega_*)) = 1,$   
 $\dim W_{\text{loc}}^s((\pm \rho_*, 0, -\Omega_*)) = 1, \dim W_{\text{loc}}^u((\pm \rho_*, 0, -\Omega_*))$   
 $= 2.$

当  $a \neq 0$  时, 我们有如下定理

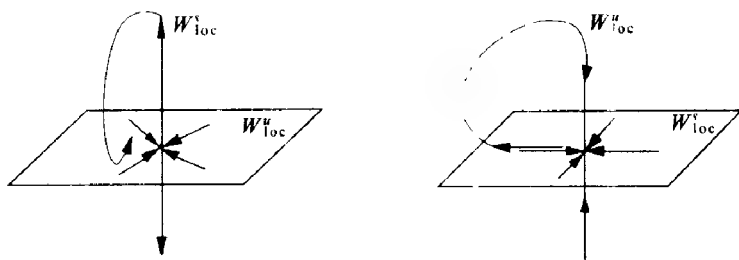
**定理 11.9** 设(11.19), (11.20)具有一个根, 如  $c_1 \neq 2c_2 (a \neq 0), \varepsilon_{c_0} > 0, c_1 > 0$ , 则存在(11.17), (11.18)或(11.11)四个平衡点, 进一步有

(i) 如  $(\pm \rho_*)^2 = P_* < P_0$ , 则平衡点是鞍焦点, 且  
 $\dim W_{\text{loc}}^s((\pm \rho_*, 0, \Omega_*)) = 1, \dim W_{\text{loc}}^u((\pm \rho_*, 0, \Omega_*)) = 2,$   
 $\dim W_{\text{loc}}^s((\pm \rho_*, 0, -\Omega_*)) = 2, \dim W_{\text{loc}}^u((\pm \rho_*, 0, -\Omega_*)) = 1.$

(ii) 如  $P_0 < (\pm \rho_*)^2 = P_* < 1$ , 则平衡点是鞍点, 且  
 $\dim W_{\text{loc}}^s((\pm \rho_*, 0, \Omega_*)) = 2, \dim W_{\text{loc}}^u((\pm \rho_*, 0, \Omega_*)) = 1,$   
 $\dim W_{\text{loc}}^s((\pm \rho_*, 0, -\Omega_*)) = 1, \dim W_{\text{loc}}^u((\pm \rho_*, 0, -\Omega_*)) = 2,$   
 其中  $W_{\text{loc}}^s$  和  $W_{\text{loc}}^u$  分别为平衡点的稳定和不稳定流形. 以上均见图 11.7 表示.



(a)  $P_1^2(-\rho_1, 0, \Omega_1)$  or  $P_1^1(-\rho_1, 0, \Omega_1)$  (b)  $P_1^2(-\rho_1, 0, \Omega_1)$  or  $P_1^3(-\rho_1, 0, \Omega_1)$   
 $(W^s = 1, W^u = 2)$   $(W^s = 2, W^u = 1)$



$$(c) P_2^1(-\rho_2, 0, \Omega_1) \text{ or } P_2^1(\rho_2, 0, \Omega_2) \quad (d) P_2^1(-\rho_1, 0, \Omega_1) \text{ or } P_2^1(\rho_1, 0, \Omega_1) \\ (W^s = 2, W^u = 1) \quad (W^s = 2, W^u = 1)$$

图 11.7 最近平衡点的几何

我们考虑(11.11), 它具一个不动点

$$\begin{cases} \rho = R, \\ \Omega = R^2 k, \\ v = 0, \end{cases} \quad (11.26)$$

其中  $R$  和  $k$  满足(11.14). 不动点对应于(11.1) 的周期解, 我们将讨论方程组(11.11) 周期解的存在性和非存在性, 它不具形式(11.3).

由(11.10) 第一式和(11.11) 第三式可得

$$\begin{cases} K_r = \frac{2\Omega\epsilon c_0}{c_0^2 + \epsilon^2 c_1^2} \left[ (c_1 - \omega) + \rho^2 \left( c_2 - \frac{c_1}{2} \right) + \rho^4 \left( c_3 - \frac{c_1}{2} \right) \right], \end{cases} \quad (11.27)$$

$$\begin{cases} \Omega_r = \rho^2 \frac{\epsilon c_0}{c_0^2 + \epsilon^2 c_1^2} \left[ (c_1 - \omega) + \left( c_2 - \frac{c_1}{2} \right) \rho^2 + \left( c_3 - \frac{c_1}{2} \right) \rho^4 \right]. \end{cases} \quad (11.28)$$

$K, \Omega$  形成有界域  $E$ . Poincaré 映照  $P$  定义在  $E$  的  $O(\epsilon)$  邻域,  $E_\epsilon$  定义为: 如  $(K_0, \Omega_0) \in E_\epsilon$ , 考虑  $\Gamma_\epsilon(x)$  为(11.11) 具初值  $v(0) = 0, \Omega(0) = \Omega_0, \rho(0)$  使得  $K(0) = K_0$  的一个解, 令  $(\bar{\rho}, 0, \bar{\Omega})$  为  $\Gamma_\epsilon(x)$  和  $v = 0$  平面具  $\frac{dv}{dx} < 0$  的交点, 则有

$$P(K_0, \Omega_0) = (\bar{K}(\bar{\rho}_0, 0, \bar{\Omega}), \bar{\Omega}) = \left( \rho^2 + \frac{\bar{\Omega}^2}{\rho^2} - \frac{1}{4} \bar{\rho}^4 - \frac{1}{6} \bar{\rho}^6, \bar{\Omega} \right).$$

定义  $\Delta K(K_0, \Omega_0)$  和  $\Delta \Omega(K_0, \Omega_0)$  为

$$P(K_0, \Omega_0) = (\bar{K}, \bar{\Omega}) \\ = (K_0 + \Delta K(K_0, \Omega_0), \Omega_0 + \Delta \Omega(K_0, \Omega_0)).$$

$\Delta K, \Delta \Omega$  依到  $O(\varepsilon)$  计算为

$$\Delta K(K_0, \Omega_0) = \int_0^{X_\varepsilon(K_0, \Omega_0)} K_r(\Gamma_\varepsilon(x)) dx,$$

$$\Delta \Omega(K_0, \Omega_0) = \int_0^{X_\varepsilon(K_0, \Omega_0)} \Omega_r(\Gamma_\varepsilon(x)) dx.$$

$X_\varepsilon(K_0, \Omega_0)$  为  $\Gamma_\varepsilon$  的回来时间(“时间 =  $x$ ”).

设  $\rho_*$  为扰动组的平衡点, 则  $\rho_*$  满足

$$c_1 - w + \left(c_2 - \frac{c_1}{2}\right)\rho_*^2 + \left(c_3 - \frac{c_1}{2}\right)\rho_*^4 = 0.$$

由上面等式和(11.27) 以及注意到  $\frac{2\Omega\varepsilon c_0}{c_0^2 + \varepsilon^2 c_1^2} = \frac{2\Omega\varepsilon}{c_0} + O(\varepsilon)$  推出

$$\Delta K = \int_0^{x(K_0, \Omega_0)} \frac{2\Omega\varepsilon}{c_0} (\rho^2 - \rho_*^2) \left[ \left(c_2 - \frac{c_1}{2}\right) + \left(c_3 - \frac{c_1}{2}\right)(\rho^2 + \rho_*^2) \right] dx + O(\varepsilon^2).$$

轨线  $(\rho_0(x), v_0(x))$  在  $\Omega_0$  平面上(11.10) 的积分  $K$  描述. 它和  $\rho$  轴( $v = \rho_x$ ) 相交于二个点  $0 < \rho_1(K_0, \Omega_0) < \rho_2(K_0, \Omega_0)$ . 因此令  $\rho^2 = R, \rho_1^2 = R_1, \rho_2^2 = R_2$ , 由(11.10) 第二式和  $2\rho\rho_x dx = dR$  可得

$$\Delta K = -\frac{\Omega_0\varepsilon}{c_0} \int \frac{R_2(K_0, \Omega_0)}{R_1(K_0, \Omega_0)} \cdot \frac{(\rho_*^2 - R) \left[ \left(c_2 - \frac{c_1}{2}\right) + \left(c_3 - \frac{c_1}{2}\right)(R + \rho_*^2) \right]}{\sqrt{K_0 R - R^2 - \Omega_0^2 + \frac{1}{4}R^3 + \frac{1}{6}R^4}} dR, \quad (11.29)$$

且  $\Delta k < 0, \rho^2(x) < \rho_*^2$ .

类似可得

$$\Delta\Omega = -\frac{\varepsilon}{c_0} \int \frac{R_2(K_0, \Omega_0)}{R_1(K_0, \Omega_0)} \cdot \frac{(\rho_*^2 - K)[(c_2 - \frac{c_1}{2}) + (c_3 - \frac{c_1}{2})(R + \rho_*^2)]}{\sqrt{K_0 R - R^2 - \Omega_0^2 + \frac{1}{4}R^3 + \frac{1}{6}R^4}} dR + O(\varepsilon^2), \quad (11.30)$$

且  $\Delta\Omega < 0, \rho^2(x) < \rho_*^2$ . 因此

$$\frac{d}{dx}(\Omega^2 - \rho_*^2 K) = \frac{2\Omega\varepsilon c_0}{c_0^2 + \varepsilon^2 c_1^2} (\rho^2 - \rho_*^2)^2 (\rho^2 - \rho_*^2) (c_3 - \frac{c_1}{2}).$$

为方便计, 设  $a = c_3 - \frac{c_1}{2} > 0$ , 则

$$2\Omega\Delta\Omega - \rho_*^2\Delta K > 0, \Omega\varepsilon c_0 > 0. \quad (11.31)$$

(11.31) 表示对  $\Omega_0 \neq 0, \Delta\Omega = \Delta K = 0$  是不可解的. 因此 Poincaré 映照  $P$  对  $\Omega \neq 0$  不具有不动点.

**定理 11.10** 对  $\Omega \neq 0, \varepsilon \neq 0$ , 扰动方程组 (11.11) 的所有周期解是坍塌的, 所有的 (11.1) 拟周期解  $w(x, t)$  对扰动是破裂的.

对于  $\Omega = 0$ , 存在  $K_0$  使得  $\Delta K(K_0, 0) = \Delta\Omega(K_0, 0) = 0$ . 因此有

**定理 11.11** 存在 Ginzburg - Landau 方程具小复系数的解, 它对时间和空间是慢周期的, 不具形式  $e^{i(kx - \omega t)}$ .

现考虑异宿轨道.

系统 (11.11) 对某些值表现出异宿轨道, 我们从二维不稳定流形  $\Gamma_u^+$  在平衡点  $(\pm\sqrt{p_j}, 0, \Omega_j)$  开始, 定义  $\gamma_u^+ = \{(K_i^+, \Omega_i^+)\}_{i \in I}, I = \{1, 2, 3, \dots\}$ . 其中  $(K_1^+, \Omega_1^+) \in E_+$  为  $\Gamma_u^+$  和  $v = 0$  平面 ( $v_x < 0$ ) 的第一个交点.  $(K_{i+1}^+, \Omega_{i+1}^+) = P(k_i^+, \Omega_i^+)$ . 这里  $P_j = \rho_j^2$  为未扰动方程组的平衡点. 同样我们定义  $\gamma_s^+$  为  $E_+$  中的点集, 在  $K$  轴对称于  $\gamma_u^+$ . 而  $\gamma_i$  为对应于  $(\pm\sqrt{p_i}, 0, \pm\Omega_j)$  或  $(\pm\sqrt{p_i}, 0, \mp\Omega_j)$  的一维稳定流形  $\Gamma_s^-$ . 我们研究系数  $C_0, C_1, C_2, C_3, \varepsilon$  和  $\omega$ , 使得  $\Gamma_u^+ = \Gamma_s^-$ . 由

Poincaré 映照, 我们有

**定理 11.12** 对任何  $\varepsilon$  充分小, 至少存在系数  $C_0, C_1, C_2$  和  $C_3$  依赖于  $j$  ( $j = 1, 2$ ) 使得系统 (11.11) 具有异宿轨道相连  $(\sqrt{p_j}, 0, \Omega_j)$  和  $(\sqrt{p_j}, 0, -\Omega_j)$ , 另外相连  $(-\sqrt{p_j}, 0, \Omega_j)$  和  $(-\sqrt{p_j}, 0, -\Omega_j)$ . 见图 11.8、图 11.9、图 11.10

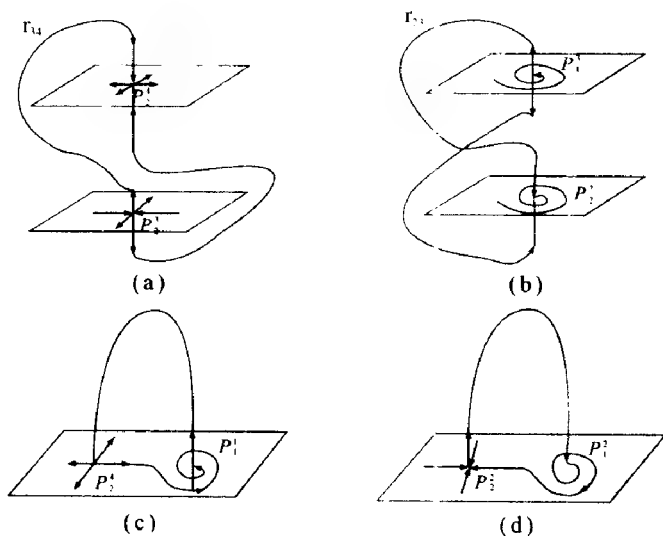


图 11.8 异宿轨道的几何

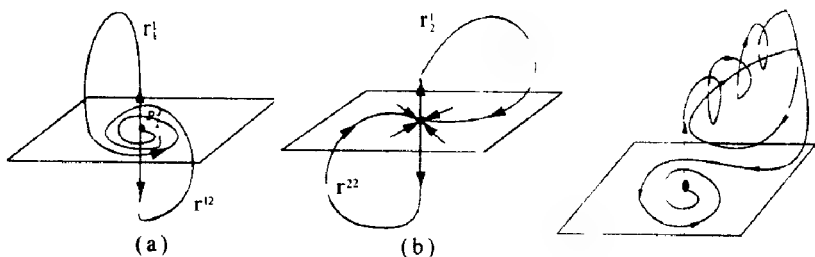


图 11.9 同宿轨道的对称图

图 11.10 双脉冲同宿轨道

对于立方—五次 Ginzburg-Landau 方程 (11.1), 用拟谱方法数值求解它. 数值如果表明 (11.1) 的解不具有周期性,  $\varepsilon \neq 0$ . 在图 11.11—11.14 中, 我们在相平面  $(|\omega(x_0, t)|, |\omega(x_0, t)|_t)$  中画出图. 其中



$$x_0 = \frac{\pi}{q}, \quad q = 1.0931,$$

初值  $W(x, 0) = 1 + 0.02 \exp(i \frac{\pi}{4}) \cdot \cos qx, \epsilon = 0.0025$ .

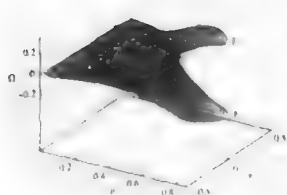


图 11.11 异宿轨道

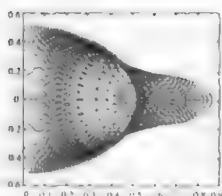


图 11.12

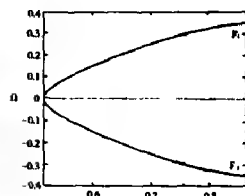


图 11.13 中异宿轨道  
在  $\Omega w$  上的 Poincaré 截面

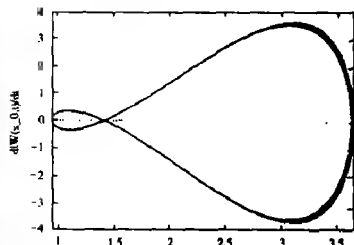
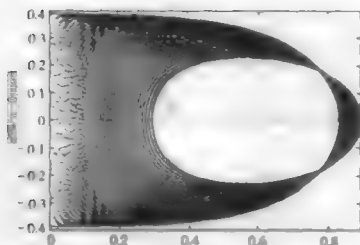


图 11.14 在相空间  $(|w(x_0, t)|, |w(x_0, t)|)$  上  $w(x, t)$  的流 ( $\epsilon = 0.025$ )  
图 11.15 在相空间  $(|w(x_0, t)|, |w(x_0, t)|)$  上  $w(x, t)$  的流,  $\epsilon = 0$

## § 12 广义 Ginzburg-Landau 方程行波解的稳定性

考虑如下形式的广义 GL 方程

$$\begin{aligned} U_t + \bar{\mu} U_x &= (\bar{\mu} + i\bar{\sigma})U + (1 + i\bar{\beta})U_{xx} \\ &+ (\bar{\eta} + i\bar{\delta})|U|^2U + (\bar{\xi} + i\bar{\gamma})|U|^4U \\ &- (\bar{\alpha} + i\bar{q})|U|^2U_x - (\bar{m} + i\bar{n})U^2\bar{U}_x, \end{aligned} \quad (12.1)$$

其中  $(x, \tau) \in R \times R^+$ ,  $U(x, z)$  为未知复值函数,  $\bar{\mu}, \bar{\sigma}, \bar{\beta}, \bar{\eta}, \bar{\delta}, \bar{\xi}, \bar{\gamma}, \bar{\alpha}, \bar{q}, \bar{m}, \bar{n}$  均为实常数. 考虑 (12.1) 的平面波解

$$U(z) = r_0 e^{-iQ_0 z}, \quad z = x - \epsilon c \tau, \quad 0 < \epsilon \ll 1, \quad (12.2)$$

其中  $r_0, \theta_0$  满足

$$\begin{cases} \bar{\mu} - \theta_0^2 + \eta r_0^2 + \xi r_0^4 - \bar{q} r_0^2 \theta_0 + \eta r_0^2 \theta_0 = 0, \\ \bar{\sigma} + \delta r_0^2 + \gamma r_0^4 + (\bar{\alpha} - m) r_0^2 \theta_0 + (\beta + \epsilon c - \bar{\nu}) \theta_0. \end{cases} \quad (12.3)$$

在  $(z = x - \epsilon c \tau, \tau)$  平面上, GL 方程(12.1) 可写为

$$\begin{aligned} U_\tau(\tau c - \nu) U_z + (1 + i\bar{\beta}) U_{zz} + (\bar{\mu} + i\sigma) U + (\bar{\eta} + i\bar{\delta}) |U|^2 U \\ + (\xi + i\gamma) |U|^4 U - (\alpha + i\bar{q}) |U|^2 U_z - (\bar{m} + i\bar{n}) U^2 \bar{U}_z. \end{aligned} \quad (12.4)$$

令  $\bar{\nu} = \epsilon \nu, \bar{\eta} = 1, \eta = -\frac{1}{2}, \beta = \epsilon \beta, \bar{\sigma} = \epsilon \sigma, \delta = \epsilon \delta, \bar{\xi} = -\frac{1}{2},$   
 $\gamma = \epsilon \gamma, \bar{\alpha} = \epsilon \alpha, \bar{q} = \epsilon q, m = \epsilon m, \bar{n} = \epsilon n$ , 则(12.4) 可写为

$$\begin{aligned} U_z = \epsilon(c - \nu) U_z + (1 + i\epsilon\beta) U_{zz} + (1 + i\epsilon\sigma) U \\ + \left(-\frac{1}{2} + i\epsilon\delta\right) |U|^2 U + \left(-\frac{1}{2} + i\epsilon\gamma\right) |U|^4 U \\ - \epsilon(\alpha + iq) |U|^2 U_z - \epsilon(m + in) U^2 \bar{U}_z. \end{aligned} \quad (12.5)$$

引入极坐标

$$U(z, \tau) = r(z, \tau) e^{i\theta(z, \tau)}, \quad (12.6)$$

(12.5) 变为

$$\begin{cases} r_\tau = r_{zz} + \epsilon\beta r \theta_{zz} + \epsilon(c + 2\beta\theta_z - \nu) r_z + r \left(1 - \frac{1}{2} r^2 \right. \\ \quad \left. - \frac{1}{2} r^4 - \theta_z\right) - \epsilon(\alpha + m) r^2 r_z - r^3 \epsilon(q - n) \theta_z, \\ \theta_\tau = \theta_{zz} - \epsilon\beta \frac{r_{zzz}}{r} + 2 \frac{r_z \theta_z}{r} + \epsilon(c + \beta\theta_z) - \epsilon\nu\theta_z \\ \quad - \epsilon\alpha - \epsilon\delta r^2 - \epsilon\gamma r^4 - \epsilon(\alpha - m) r^2 \theta_z + \epsilon(q + n) r r_z. \end{cases} \quad (12.7)$$

令

$$t = \epsilon^2 \tau, z = \epsilon Z, \theta = \epsilon \Theta, \quad (12.8)$$

则(12.7) 变为

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon^2 r_t &= \varepsilon^2 r_{zz} + \varepsilon^2 \beta r \theta_{zz} + \varepsilon^2 (c + 2\beta \theta_z - \nu) r_z + r \left( 1 - \frac{1}{2} r^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} r^4 - \theta_z^2 \right) - \varepsilon^2 (\alpha + m) r^2 r_z - r^3 \varepsilon (q - n) \theta_z, \\ \theta_t &= \theta_{zz} - \varepsilon^2 \beta \frac{r_{zz}}{r} + \frac{2r_z \theta_z}{r} + (c + \beta \theta_z - \nu) \theta_z - (\sigma + \delta r^2 + r r^4) \\ &\quad - (\alpha - m) r^2 \theta_z + \varepsilon (q + n) r r_z. \end{aligned} \right. \quad (12.9)$$

设  $r_z, r_{zz}, r_t, \theta_z, \theta_{zz}$  为  $O(1)$  次, 对一切  $(z, t) \in R \times R^+$  和  $\forall \varepsilon > 0$ , 令  $\varepsilon \rightarrow 0$ , 可得

$$\left\{ \begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{2} r^4 - \theta_z^2 &= 0, \\ \theta_t &= \theta_{zz} + 2 \frac{r_z \theta_z}{r} + (c + \beta \theta_z - \nu) \theta_z - (\sigma + \delta r^2 + r r^4) \\ &\quad - (\alpha - m) r^2 \theta_z. \end{aligned} \right. \quad (12.10)$$

从(12.10)解出  $r^2$  为

$$r^2 = \frac{\sqrt{9 - 8\theta_z^2} - 1}{2}. \quad (12.11)$$

将(12.11)代入(12.10)第二个方程, 得

$$\begin{aligned} \theta_t &= \theta_{zz} - \frac{8\theta_z^2 \theta_{zz}}{\sqrt{9 - 8\theta_z^2}(\sqrt{9 - 8\theta_z^2} - 1)} + [c - \nu + (\beta + 2r)\theta_z] \theta_z \\ &\quad - \sigma + 2\gamma + (\gamma - \delta) \frac{\sqrt{9 - 8\theta_z^2} - 1}{2}. \end{aligned} \quad (12.12)$$

为方便计, 令  $\beta = 0$  于(12.9)中, 由此可得

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon^2 r_t &= \varepsilon^2 r_{zz} + \varepsilon^2 (c - \nu - (\alpha + m) r^2) r_z + r \left( 1 - \frac{1}{2} r^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} r^4 - \theta_z^2 \right) - r^3 \varepsilon (q - n) \theta_z, \\ \theta_t &= \theta_{zz} + (c - \nu - (\alpha - m) r^2 + 2 \frac{r_z}{r}) \theta_z - (\sigma + \delta r^2 + \gamma r^4) \\ &\quad + \varepsilon (q + n) r r_z. \end{aligned} \right. \quad (12.13)$$

现考虑(12.13)的定态解,  $\epsilon \ll 1$ , 可得二个方程组, 即慢变方程组和快变方程组. 慢变方程组为

$$\begin{cases} \epsilon r' = s, \\ \epsilon s' = -\epsilon(c - \nu - (\alpha + m)r^2)s - r\left(1 - \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{2}r^4 - \phi^2\right) \\ \quad + \epsilon r^3(q - n)\phi, \\ \theta' = \phi, \\ \phi' = -(c - \nu - (\alpha - m)r^2 + 2\frac{s}{\epsilon r})\phi + (\sigma + \delta r^2 + \gamma r^4) \\ \quad - (q + n)rs, \end{cases} \quad (12.14)$$

其中  $' = \frac{d}{dz}$ , 令  $z = \epsilon \xi$ , 则得快变方程组

$$\begin{cases} \dot{r} = s, \\ \dot{s} = -\epsilon(c - \nu - (\alpha + m)r^2)s - r\left(1 - \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{2}r^4 - \phi^2\right) \\ \quad + \epsilon r^3(q - n)\phi, \\ \dot{\theta} = \epsilon \phi, \\ \dot{\phi} = -\epsilon(c - \nu - (\alpha - m)r^2 + \frac{2s}{\epsilon r})\phi + \epsilon(\sigma + \delta r^2 + \gamma r^4) \\ \quad - \epsilon(q + n)rs, \end{cases} \quad (12.15)$$

其中  $\dot{\cdot} = \frac{d}{d\xi}$ .

当  $\epsilon = 0$  时, 存在不变流形.

$$M_0 = \{(r, s, \theta, \phi) : r^2 + r^4 + 2\phi = 2, s = 0, \theta \in \mathbb{R}\}. \quad (12.16)$$

(12.15) 在此流形线性化, 可计算特征方程

$$\det(Df|_{M_0} - \lambda I) = \lambda^2[\lambda^2 + 4 - 3r^2 - 4r^4] = 0,$$

因此当  $r^2 > \frac{\sqrt{73}-3}{8}$ ,  $M_0$  为法向双曲的, 或  $\phi^2 < \frac{35-\sqrt{73}}{64}$ , 令

$Q_0 = \left( \frac{35 - \sqrt{73}}{64} \right)^{\frac{1}{2}}$ . 因此存在 (12.14) 的不变流形  $M_\epsilon$ , 它以  $O(\epsilon)$  逼近  $M_0$ , 流形  $M_\epsilon$  为

$$\begin{aligned} M_\epsilon &= \{(r, s, \theta, \phi) : \gamma = M^r(\phi, \epsilon), \\ s &= M^s(\phi, \epsilon), \theta \in R, \phi^2 < \frac{35 - \sqrt{73}}{64}\}, \end{aligned} \quad (12.17)$$

其中

$$M^r(\phi, 0) = \sqrt{\frac{\sqrt{9 - 8\phi^2} - 1}{2}}, M^s(\phi, 0) = 0. \quad (12.18)$$

在方程组 (12.15) 中,  $\theta$  不与其他方程耦合, 因此可考虑为  $(r, s, \phi)$  的方程组  $\theta$  作为辅助方程.

由 (12.14) 的最后一个方程, 可得

$$\begin{aligned} (r^2\phi)' &= r^2[(\nu + (\alpha - m)r^2 - c)\phi + (\sigma + \delta r^2 + \gamma r^4) \\ &\quad - \frac{\epsilon}{2}(r^2)'(q + n)]. \end{aligned} \quad (12.19)$$

因此  $r = M^r$  整个方程在  $M_\epsilon$  上为

$$\begin{cases} \theta' = \phi, \\ \phi' = \frac{9 - 8\phi^2 - \sqrt{9 - 8\phi^2}}{9 - 16\phi^2 - \sqrt{9 - 8\phi^2}} g(\phi) + O(\epsilon), \end{cases} \quad (12.20)$$

其中

$$g(\phi) = A + B\phi + C\sqrt{9 - 8\phi^2} + D\phi\sqrt{9 - 8\phi^2} + E\phi^2, \quad (12.21)$$

这里  $A = \sigma - \frac{\delta}{2} - \frac{5}{2}\gamma$ ,  $B = \nu - c - \frac{\alpha - m}{2}$ ,  $C = \frac{\delta - \gamma}{2}$ ,  $D = \frac{\alpha - m}{2}$ ,  $E = -2\gamma$ . 对于不同参数  $A, B, C, D, E$ , 函数  $g(\phi) = 0$

的根的数目是不同的, 取  $C = D = E = 0$ ,  $|\frac{A}{B}| < Q_0$  作为例子, 则  $\phi = -A/B$  为  $g(\phi)$  的根. 因此 (12.20) 第二个方程能写为

$$\phi' = \frac{9 - 8\phi^2 - \sqrt{9 - 8\phi^2}}{9 - 16\phi^2 - \sqrt{9 - 8\phi^2}} g(\phi)$$

$$= k(\phi) \prod_{j=1}^s (\phi - \phi_j) (0 \leq s \leq 4), \quad (12.22)$$

其中  $\phi_j$  为  $g(\phi) = 0$  的根, 为方便计, 设  $k(\phi) > 0$ .

情况 1. 1 个根.

此时存在一个根, 设  $\phi = \phi_1$  有

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \phi(z) = \phi_1$$

情况 2. 2 个根.

此时存在两个根, 设为  $\phi_{\pm}$ ,  $\phi_{-} < \phi_{+}$  有

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} \phi(z) = \phi_{\pm}.$$

情况 3. 3 个根.

此时有 3 个根, 设为  $\phi_j (j = 1, 2, 3)$ , 且  $\phi_1 < \phi_2 < \phi_3$ .

$$\phi' = k(\phi)(\phi - \phi_1)(\phi - \phi_2)(\phi - \phi_3).$$

积分可得

$$(\phi - \phi_1)^{\beta_1}(\phi - \phi_3)^{\beta_3} = c_0 e^{\int_0^z k(\phi(s)) ds} (\phi - \phi_2)^{\beta_2},$$

其中  $\beta_1 = \phi_3 - \phi_2$ ,  $\beta_2 = \phi_3 - \phi_1$ ,  $\beta_3 = \phi_2 - \phi_1$ .

注意到  $k(\phi) > 0$ ,  $|\phi| < Q_0$ , 由  $k(\phi)$  的连续性有  $\min_{z \in R} k(\phi(z)) > 0$ . 因此有

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \phi(z) = \phi_1 \text{ 或 } \phi_3, \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} \phi(z) = \phi_2.$$

情况 4. 4 个根.

类似计算可得

$$(\phi - \phi_2)^{\beta_2}(\phi - \phi_4)^{\beta_4} = c_0 e^{\int_0^z k(\phi(s)) ds} (\phi - \phi_1)^{\beta_1}(\phi - \phi_3)^{\beta_3},$$

其中

$$\beta_1 = (\phi_4 - \phi_3)(\phi_4 - \phi_2)(\phi_3 - \phi_2),$$

$$\beta_2 = (\phi_4 - \phi_2)(\phi_4 - \phi_1)(\phi_3 - \phi_1),$$

$$\beta_3 = (\phi_4 - \phi_2)(\phi_4 - \phi_1)(\phi_2 - \phi_1),$$

$$\beta_4 = (\phi_3 - \phi_2)(\phi_3 - \phi_1)(\phi_2 - \phi_1).$$

因此

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \phi(z) = \phi_1 \text{ 或 } \phi_3,$$

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \phi(z) = \phi_2 \text{ 或 } \phi_4.$$

异宿轨道的图形见图 12.1, 图 12.2.

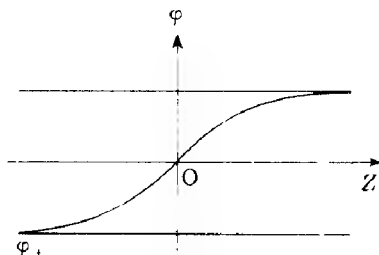


图 12.1 情况 2 的异宿轨道

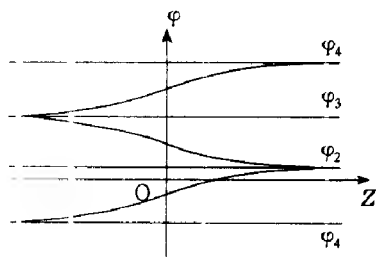


图 12.2 情况 4 的异宿轨道

无损于一般性, 我们设相近(12.22)的轨道  $\tilde{\phi}(z)$  存在,  $\lim_{z \rightarrow \pm\infty} \tilde{\phi}(z) = \phi_{\pm}$ . 因临界点  $\phi_{\pm}$  对(12.22)是双曲的, 因此在流形  $M_{\epsilon}$  上我们有轨道线为

$$\begin{aligned} \tilde{r}(z) &= \sqrt{(\sqrt{9 - 8(\tilde{\phi}(z))^2} - 1)/2} + O(\epsilon), \\ \tilde{\theta}(z) &= \int_0^z \tilde{\phi}(s) ds. \end{aligned} \quad (12.23)$$

因此有

**定理 12.1** 存在  $\epsilon_0 > 0$ , 使得当  $0 < \epsilon < \epsilon_0$ , 存在参数空间的区域, 对于它, (12.14) 的异宿轨道在  $M_{\epsilon}$  存在. 现考虑这些轨道的稳定性. 令

$$r(z) = \rho(z), \theta(z) = \int_0^z \phi(s) ds, \quad (12.24)$$

其中  $\lim_{z \rightarrow \pm\infty} \phi(z) = \phi_{\pm}$ .

为了得到(12.13)关于行波解(12.24)的稳定性. 对(12.13)作线性化, 引入小扰动

$$r(z, t) = \rho(z) + R(z, t), \theta(z, t) = \int_0^z \phi(s) ds + \theta(x, t),$$

代入(12.13), 并作线性化, 得

$$\begin{cases} R_t = R_{zz} + [c - \nu - (\alpha + m)\rho^2]R_x - \left[\frac{2\rho\phi}{\epsilon^2} + \frac{\rho^3}{\epsilon}(q - n)\right]\theta_x \\ \quad + \frac{1}{\epsilon^2}\left[1 - \frac{3}{2}\rho^2 - \frac{5}{2}\rho^4 - \phi^2 - 2\epsilon^2(\alpha + m)\rho\rho_z - 3\epsilon\rho^2(q - n)\phi\right]R, \\ \theta_t = \theta_{zz} + \left[c - \nu - (\alpha - m)\rho^2 + 2\frac{\rho_x}{\rho}\right]\theta_x + \left[2\frac{\phi}{\rho} + \epsilon(q + n)\rho\right]R_x \\ \quad + \left[\epsilon(q + n)\rho_x - 2(\alpha - m)\phi\rho - 2\frac{\rho_x}{\rho}\phi - 2\delta\rho - 4\gamma\rho^3\right]R. \end{cases} \quad (12.25)$$

上式方便地写成

$$\begin{pmatrix} R \\ \theta \end{pmatrix}_t = L \begin{pmatrix} R \\ \theta \end{pmatrix}. \quad (12.26)$$

置

$$R(z, t) = R(z)e^{\lambda t}, \theta(\lambda t) = \theta(z)e^{\lambda t}, \quad (12.27)$$

代入(12.25)可得特征值方程

$$\begin{cases} \epsilon^2 R'' + \epsilon^2 [c - \nu - (\alpha + m)\rho^2]R' - \left[\frac{2\rho\phi}{\epsilon^2} + \rho^3\epsilon(q - n)\right]\theta' \\ \quad + \left[1 - \frac{3}{2}\rho^2 - \frac{5}{2}\rho^4 - \phi^2 - 2\epsilon^2(\alpha + m)\rho\rho_z - 3\epsilon\rho^2(q - n)\phi\right]R \\ \quad = \epsilon^2 \lambda R, \\ \theta'' + \left[c - \nu - (\alpha - m)\rho^2 + 2\frac{\rho_x}{\rho}\right]\theta' + \left[2\frac{\phi'}{\rho} + \epsilon(q + n)\rho\right]R' \\ \quad + [\epsilon(q + n)\rho_x - 2(\alpha + m)\phi\rho - 2\frac{\rho_x}{\rho}\phi - 2\delta\rho - 4\gamma\rho^3]R = \lambda\theta, \end{cases} \quad (12.28)$$

其中  $' = \frac{d}{dz}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  为特征值.

如对任何  $\lambda \in \mathbb{C}$  具有正的实部, 存在(12.28)的非平凡解  $(R(z), \theta(z))$ , 奇性轨道是不稳定的.

方程组(12.28)具快-慢结构, 慢方程组为



$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon R' = S, \\ \epsilon S' = -\epsilon [c - \nu - (\alpha + m)\rho^2]S + \left[ \frac{2\rho\phi}{\epsilon^2} + \rho^3\epsilon(q - n) \right] \Phi \\ \quad - \left[ 1 - \frac{3}{2}\rho^2 - \frac{5}{2}\rho^4 - \phi^2 - 2\epsilon^2(\alpha + m)\rho\rho_z \right. \\ \quad \left. - 3\epsilon\rho^2(q - n)\phi - \epsilon^2\lambda \right] R, \\ \Theta' = \Phi, \\ \Phi' = -[c - \nu - (\alpha - m)\rho^2 + 2\frac{\rho_z}{\rho}] \Phi - \left[ 2\frac{\phi}{\rho} + \epsilon(q + n)\rho \right] S/\epsilon \\ \quad - [\epsilon(q + n)\rho_z - 2(\alpha - m)\phi\rho - 2\frac{\rho_z\phi}{\rho} - 2\delta\rho - 4\gamma\rho^3] R + \lambda\theta, \\ \tau' = k(1 - \tau^2), \end{array} \right. \quad (12.29)$$

其中变元  $\tau$  由关系

$$z = \frac{1}{k} \ln \left( \frac{1 + \tau}{1 - \tau} \right) \quad (12.30)$$

确定, 这里  $K > 0$  充分小使得 (12.29) 在  $\mathbb{R}^4 \times [-1, 1]$  上属于  $C^1$  (见 Alexander 等 [19] 引理 3.1). 显然如  $z \rightarrow \pm \infty$ , 则  $\tau \rightarrow \pm 1$ . 由于引入  $\tau$  的方程, 使系统为自治的, 因此在  $\mathbb{R}^4 \times [-1, 1]$  上定义动力系统, 作变元变换  $z = \epsilon\xi$ , 得到快方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{R} = S, \\ \dot{S} = -\epsilon [c - \nu - (\alpha + m)\rho^2]S + \left[ \frac{2\rho\phi}{\epsilon^2} + \rho^3\epsilon(q - n) \right] \Phi - \left[ 1 - \frac{3}{2}\rho^2 \right. \\ \quad \left. - \frac{5}{2}\rho^4 - \phi^2 - 2\epsilon^2(\alpha + m)\rho\rho_z - 3\epsilon\rho^2(q - n)\phi - \epsilon^3\lambda \right] R, \\ \dot{\Theta} = \epsilon\Phi, \\ \dot{\Phi} = -\epsilon [c - \nu - (\alpha - m)\rho^2] \Phi + 2\frac{\dot{\rho}}{\rho^2}\phi R - 2\frac{\dot{\rho}}{\rho}\Phi - \frac{2\phi}{\rho}S - \epsilon(q + n)\rho S \\ \quad - \epsilon[(q + n)\dot{\rho} - 2(\alpha - m)\phi\rho - 2\delta\rho - 4\gamma\rho^3] R + \epsilon\lambda\theta, \\ \dot{\tau} = \epsilon k(1 - \tau^2). \end{array} \right. \quad (12.31)$$

以下我们证明存在  $\lambda_0 > 0$ , 如  $|\lambda| > \lambda_0$ , 则  $\lambda$  不是 (12.28) 的特征值. 如同 Alexander [19] 中的证明. 设  $\Phi_-(\lambda, z)$ ,  $\Phi_+(\lambda, z)$  分

别表示不稳定丛和稳定丛,有如下引理

**引理 12.2**<sup>[19]</sup>  $\lambda \in \Omega$  为  $L$  的特征值当且仅当  $\Phi_-(\lambda, \tau) \cap \Phi_+(\lambda, \tau) \neq \emptyset$ , 对某  $\tau \in (-1, +1)$ , 其中  $\Omega$  的定义见<sup>[19]</sup>.

**引理 12.3** 存在正数  $M$  和  $\delta$  ( $\delta < \frac{\pi}{2}$ ) 使得如  $|\lambda| > M$ ,  $|\arg \lambda| < \pi - \delta$ , 则  $\lambda$  不是方程组(12.28)的一个特征值.

证 记

$$\phi(z) = \rho'(z)/\rho(z). \quad (12.32)$$

考虑(12.29),  $\epsilon \neq 0$ , 作伸缩变换

$$y = z|\lambda|^{\frac{1}{2}}, \tilde{S} = S/|\lambda|^{\frac{1}{2}}, \tilde{\Phi} = \Phi/|\lambda|^{\frac{1}{2}}, \quad (12.33)$$

则(12.29)变成

$$\left\{ \begin{aligned} \epsilon R' &= \tilde{S}, \\ \epsilon \tilde{S}' &= -\epsilon \frac{c-\nu-(\alpha+m)\rho^2}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}} \tilde{S} + \frac{\frac{2\rho\phi}{\epsilon^2} + \rho^3\epsilon(q-n)}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}} \tilde{\Phi} \\ &\quad - \left[ \frac{1 - \frac{3}{2}\rho^2 - \frac{5}{2}\rho^4 - \phi^2 - 2\epsilon^2(\alpha+m)\rho\rho_z - 3\epsilon\rho^2(q-n)\phi}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}} \right. \\ &\quad \left. - \epsilon^2 e^{i\arg \lambda} R \right], \\ \theta' &= \tilde{\Phi}, \\ \tilde{\Phi}' &= \frac{c-\nu-(\alpha-m)\rho^2 + 2\frac{\rho_z}{\rho}}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}} \tilde{\Phi} - \frac{2\frac{\phi}{\rho} + \epsilon(q+n)\rho}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}} \tilde{S}/\epsilon \\ &\quad - \frac{\epsilon(q+n)\rho_z - 2(\alpha-m)\phi\rho - 2\frac{\rho_z}{\rho}\phi - 2\delta\rho - 4\gamma\rho^3}{R} + e^{i\arg \lambda}\theta, \\ \tau' &= \frac{K}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}}(1-z^2), \end{aligned} \right. \quad (12.34)$$

这里  $' = \frac{d}{dy}$ .

取(12.34),  $|\lambda| \rightarrow \infty$  的极限得

$$\begin{cases} \epsilon R' = \bar{S}, \\ \epsilon \bar{S} = \epsilon^2 e^{i \arg \lambda} R, \\ \theta' = \Phi, \\ \bar{\Phi} = e^{i \arg \lambda} \theta, \\ \tau' = 0. \end{cases} \quad (12.35)$$

由  $\tau' = 0$  推出流(12.35)在每个  $\tau$  片上是不变的. 对于  $\tau \in [-1, +1]$ , (12.35) 右端的特征值为  $\pm e^{i \arg \lambda} \epsilon^2$ . 如  $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$  和  $|\arg \lambda| < \pi - \delta$ , 则存在两个正实部的特征值和两个负实部的特征值, 对固定  $\tau$ , (12.35) 确定的流在 Grassmann  $G_2(C^4)$  上具有一个吸引子. 它是不稳定子空间. 由此推出如  $|\lambda|$  充分大, 则流(12.34) 的解在  $G_2(C^4) \times [-1, 1]$  上趋近于这个吸引子. 因此不可能和  $\Phi_+$  相连. 由引理 12.2,  $\lambda$  不可能是特征值.

以下考虑不稳定流形的构造.

设  $\Sigma$  为含有右半平面的复平面上一个开集, 以  $\Gamma$  为它的边界  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ :

$$\Gamma_1 = \{\lambda_0 + re^{i\gamma_0} : r \geq 0, \frac{\pi}{2} \leq \gamma_0 < \pi\},$$

$$\Gamma_2 = \{-r^2 + ia^2r : -\mu \leq r \leq \mu\},$$

$$\Gamma_3 = \{\lambda : \bar{\lambda} \in \Gamma_1\}.$$

$\lambda_0 = -\mu^2 + ia^2\mu$ , 如图 12.3 所示,  $\bar{\Sigma}$  表示它的闭包, 显然  $\{0\} \subset \sigma_e(L) \cap \bar{\Sigma}$ ,  $\sigma_e(L)$  表示算子  $L$  的连续谱.

令  $Y = (R, S, \theta, \Phi)^T$ . 方程(12.34) 可写成

$$\begin{cases} Y' = M(\lambda, \tau, \epsilon) Y, \\ \tau' = K(1 - \tau^2). \end{cases} \quad (12.36)$$

定义渐近矩阵  $M^\pm(\lambda, \epsilon)$  为

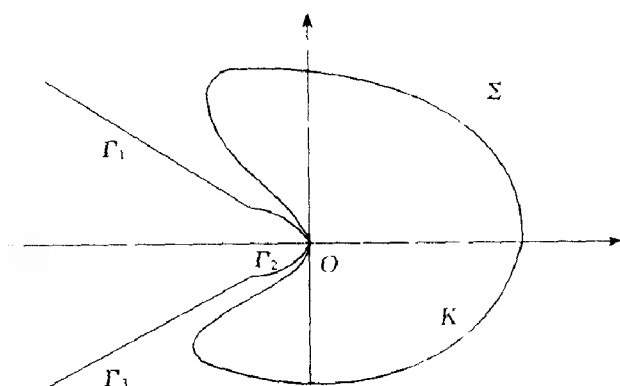


图 12.3 曲线  $K$  与区域  $\Sigma$

$$M^{\pm}(\lambda, \epsilon) = \lim_{\tau \rightarrow \pm 1} M(\lambda, \tau, \epsilon). \quad (12.37)$$

(12.36) 的渐近方程组为

$$\begin{cases} Y' = M^{\pm}(\lambda, \epsilon) Y, \\ \tau' = 0. \end{cases} \quad (12.38)$$

Evans 函数  $E(\lambda, \epsilon)$  定义为

$$E(\lambda, \epsilon) = e^{-\int_0^1 \text{tr} M(\lambda, s, \epsilon) ds} |Y_1 \cdots Y_4|(\lambda, z, \epsilon), \quad (12.39)$$

其中  $|\cdot|$  表示  $4 \times 4$  矩阵的行列式,  $Y_j(\lambda, z, \epsilon)$ ,  $j = 1, 2, \dots, 4$ , 表示 (12.38) 的解, 使得

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} Y_j(\lambda, z, \epsilon) = 0, j = 1, 2; \lim_{z \rightarrow +\infty} Y_j(\lambda, z, \epsilon) = 0, j = 3, 4.$$

这些解是存在的, 有如下引理 (见 [20]).

**引理 12.4** 对任何固定的  $\epsilon$  和  $\lambda \in \Sigma$  有

- (1)  $E(\lambda, \epsilon)$  关于  $\lambda$  是解析的,
- (2)  $E(\lambda, \epsilon) = 0$  当且仅当  $\lambda$  是一个特征值.

**引理 12.5** 对任何  $\epsilon > 0$ , Evans 函数  $E(\lambda, \epsilon)$  在  $\lambda = 0$  处解析.

**引理 12.6** 存在  $\epsilon_0 > 0$  使得当  $0 < \epsilon < \epsilon_0$  时,  $E(0, \epsilon) \neq 0$ .

设  $K$  为一曲线同胚于  $S^1$ , 它不含有  $L$  的特征值  $K_0$  为  $K$  所界的区域. 可在集合

$$K_0 \times \{-1\} \cup K \times [-1, 1] \cup K_0 \times \{+1\}$$

上构造丛,此集合同构于  $S^2$ ,如图 12.4 所示.不稳定丛的扩张记为  $\epsilon(K)$ ,它具有纤维

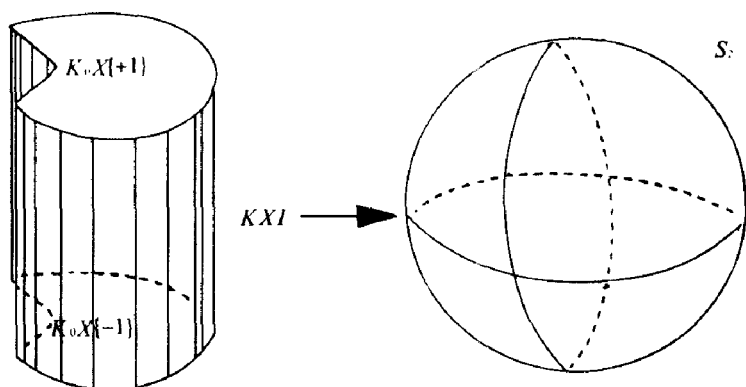


图 12.4 不稳定增大丛集

$$\begin{cases} U^\pm(\lambda), \tau = \pm 1, \\ U^*(\lambda, \tau), \tau \in (-1, +1). \end{cases}$$

**引理 12.7** 第一阵数  $c_1(\epsilon(K))$  等于在  $K$  内  $L$  的特征值数目 (包括代数重数).

现构造快不稳定丛  $\epsilon_f(K)$ . (12.29) 的不稳定丛是二个一维丛  $\epsilon_f(K)$  和  $\epsilon_s(K)$  的直接和. 首先构造  $\epsilon_f(K)$ . 当  $\epsilon = 0$  时, 由 (12.16) 有  $\dot{\rho} = 0$ .

$\rho^2 + \rho^4 + 2\phi^2 = 2$ , 其中  $' = \frac{d}{d\xi}$ , 当  $\epsilon = 0$  时, (12.31) 变成

$$\begin{cases} \dot{R} = S, \\ \dot{S} = (4 - \rho^2 - 4\phi^2)R + 2\phi\rho\Phi, \\ \dot{\theta} = 0, \\ \dot{\Phi} = -2\frac{\phi}{\rho}S, \\ \dot{\tau} = 0. \end{cases} \quad (12.40)$$

上面右端的特征值为  $\pm \sqrt{4 - \rho^2 - 8\phi^2}$  和 0. 类似于 [5] 的证明有

**引理 12.8** 存在  $\varepsilon_1 > 0$ , 使得当  $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ , 则丛  $\varepsilon_f(K)$  具有  $c_1(\varepsilon_f(K)) = 0$ .

现构造慢不稳定丛  $\varepsilon_s(K)$ . (12.40) 具有不变流形.

$$M_0^L = \{(R, S, \theta, \Phi, \tau) : S = 0, R = \frac{2\rho\phi}{4 - \rho^2 - 4\phi^2}, \\ \theta \in R, \tau \in [-1, +1]\}. \quad (12.41)$$

当  $4 - \rho^2 - 4\phi^2 > 0$  时, 这个流形是法向双曲的. 因此存在慢方程组 (12.29) 的流形  $M_\varepsilon^L$  以  $O(\varepsilon)$  逼近于  $M_0^L$ . 同时可证.

**引理 12.9** 存在  $\varepsilon_2 > 0$ , 使得  $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$ , 则丛  $\varepsilon_f(K)$  具有  $c_1(\varepsilon_s(K)) = 0$ .

整个丛为 Whitney 丛和  $\varepsilon(K) = \varepsilon_s(K) \oplus \varepsilon_f(K)$ . 令  $\varepsilon_3 = \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ , 因向量丛的第一陈数为子丛的相元求和. 由引理 12.8, 12.9 可得

$$c_1(\varepsilon(K)) = c_1(\varepsilon_s(K)) + c_1(\varepsilon_f(K)) = 0.$$

由此可得 [20] 中如下线性稳定性结果.

**定理 12.10** 设  $0 < \varepsilon < \varepsilon_3$ , 则在  $K$  为边界的区域  $K_0$  内, 没有 (12.29) 的特征值.

**定理 12.11** 参数  $c, \nu, \beta, \sigma, \delta, \gamma, \alpha, q, m, n$  选取得使  $p(\phi) = 0$  具有二个解  $\phi_+, \phi_- \leq \frac{35 - \sqrt{73}}{64}$ , 则存在  $\varepsilon_0 > 0$ , 使当  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  时, (12.13) 的行波解以  $O(\varepsilon)$  逼近 (12.10) 的行波解. 这个解表示 (12.24), 存在  $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$  使得  $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$  时, 行波是稳定的.

### § 13 Ginzburg-Landau 方程的环绕数上界估计

考虑如下的 Ginzburg - Landau 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (1 + i\nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 + i\mu) |u|^2 u - au = 0, \quad (13.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), x \in R, \quad (13.2)$$

$$u(x + 1t) = u(x, t), x \in R, t \geq 0, \quad (13.3)$$

其中  $a > 0, \nu, \mu$  为给定实数.  $u_0(x) \in L^2_{\text{loc}}(R)$ .

定义  $f: R \rightarrow \mathbb{C}$  为可微周期为 1 的函数,  $\{f\} = \{f(x): x \in [0, 1]\} \subseteq \mathbb{C}$ ; 则  $f$  环绕点  $p \in \mathbb{C}$  的环绕数为

$$\text{ind}_p(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x) - p} dx. \quad (13.4)$$

记  $H$  为复值平方可积函数;  $H$  为  $R$  域上的 Hilbert 空间, 引入内积  $(u, v) = \text{Re} \int_{\Omega} uv^* dx, \|u\| = (u, u)^{1/2}$ .

作 F 氏展开

$$u = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j e^{2\pi i j x}, u_j \in \mathbb{C}, \quad (13.5)$$

它满足  $\|u\|^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |u_j|^2 < \infty$ .

设  $A$  为闭无界正算子.

$$A^s u = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |2\pi j|^{2s} u_j e^{2\pi i j x}, \quad (13.6)$$

其中  $u$  为 (13.5) 所定义,  $s > 0$ . 这些算子的定义域为  $D(A^s) =$

$$\left\{ u = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j e^{2\pi i j x} : \sum_{j=-\infty}^{\infty} |2\pi j|^{2s} |u_j|^2 < \infty \right\}.$$

注意到

$$\|A^{\frac{m}{2}} u\| = \|u^{(m)}\| = \left\| \frac{\partial^m u}{\partial x^m} \right\|, u \in D(A^{\frac{m}{2}}), m \in \mathbb{N}. \quad (13.7)$$

定义  $B(u, v, \omega) = uv\omega^*, u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ . 方程 (13.1) 可写成形式

$$u_t(1 + i\nu)Au + (1 + i\mu)B(u, u, u) - au = 0. \quad (13.8)$$

为了建立非线性项  $B$  的估计, 我们用如下 Agmon 不等式

$$\|u\|_{\infty}^2 = \left( \sup_{x \in \Omega} |u(x)| \right)^2 \leq \|u\| \|u_x\| + \|u\|^2. \quad (13.9)$$

对函数  $u \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$ , 它是 1 周期  $\left(u_t = \frac{\partial u}{\partial x}\right)$ , 且

$$\|u\|_{\infty}^2 \leq \|u\| \|u_x\|, \quad (13.10)$$

如  $\int_{\Omega} u dx = 0$ , 则有

$$\begin{aligned} |(B(u_1, u_2 v), v)| &\leq |u_1| |u_2| |v|_\infty^2 \\ &\leq |u_1| |u_2| (|v| |v_x| + |v|^2), \end{aligned} \quad (13.11)$$

类似有

$$\begin{aligned} |(B(v, u_1, u_2), v)| &\leq |u_1| |u_2| |v|_\infty^2 \\ &\leq |u_1| |u_2| (|v| |v_x| + |v|^2). \end{aligned} \quad (13.12)$$

对应于初值  $u_0$  的解  $u(t) = S(t)u_0$  对  $t \geq 0$ ,  $S(t)$  具有以下性质:

(i)  $S(t)H \subseteq H$ , 对  $t \geq 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0} S(t)u_0 = S(0)u_0 = u_0$ ,  $u_0 \in H$ .

(ii)  $S(t)S(s)u_0 = S(t+s)u_0$ ,  $s, t \geq 0$ ,  $u_0 \in H$ .

(iii)  $S(t)$  是一对的, 对任何  $t \geq 0$ .

(iv) 存在常数  $\rho_0 = \rho_0(a, \nu, \mu)$ ,  $t_0 = t_0(a, \nu, \mu)$  使得对  $t \geq t_0$   $S(t)H \subseteq B = \{u \in H: |u| \leq \rho_0\}$ .

更进一步,  $S(t)B \subseteq B$ ,  $\forall t \geq 0$ , 可取  $\rho_0 = 2\sqrt{a}$ . 整体吸引子为  $\mathcal{A} = \bigcap_{t \geq 0} S(t)B$ .

吸引子的性质:

(a)  $\mathcal{A} \neq \emptyset$ .

(b)  $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$ ,  $t \geq 0$ .

(c)  $|u_0| \leq \rho_0$ ,  $u_0 \in \mathcal{A}$ .

(d)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{u_0 \in H} \text{dist}(S(t)u_0, \mathcal{A}) = 0$ .

解的 Gevrey 类正则性: 对  $\tau > 0$ , 考虑算子

$$e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} u = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j e^{\tau |2\pi j|} e^{2\pi i j x}, \quad (13.13)$$

对所有  $u = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j e^{2\pi i j x}$ , 使得

$$|u|_\tau^2 = |e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} u|^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{2\tau |2\pi j|} |u_j|^2 < \infty. \quad (13.14)$$



$D(e^{\tau A^{\frac{1}{2}}})$  为  $e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}$  的定义域, 称为函数具参数  $\tau$  的 Gevrey 类. 它是一个 Hilbert 空间, 定义内积

$$(u, v)_2 = (e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} u, e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} v), u, v \in D(e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}),$$

$$\|u\|_{\tau} = (u, u)^{\frac{1}{2}}.$$

令  $u_k \in D(e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}), k = 1, 2, 3, 4, \tau > 0$ .

对  $u_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_{kj} e^{2\pi i j x}$  和对固定  $\tau > 0$ , 令

$$u_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |u_{kj}| e^{\tau \cdot 2\pi j} e^{2\pi i j x} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_{kj} e^{2\pi i j x}.$$

**引理 13.1**  $|(B(u_1, u_2, u_3), u_4)_{\tau}| \leq (B(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3), \tilde{u}_4).$

**证**  $|(B(u_1, u_2, u_3), u_4)_{\tau}|$

$$= \left| \operatorname{Re} \sum_{j, m, k=-\infty}^{\infty} u_{1,j} u_{2,k} u_{3,j+k-m}^* u_{4,m}^* e^{2\tau \cdot 2\pi m} \right|$$

$$\leq \sum_{j, m, k=-\infty}^{\infty} |u_{1,j}| |u_{2,k}| |u_{3,j+k-m}^*| |u_{4,m}^*| e^{2\tau \cdot 2\pi m}$$

$$= \sum_{j, m, k=-\infty}^{\infty} \tilde{u}_{1,j} \tilde{u}_{2,k} \tilde{u}_{3,j+k-m} \tilde{u}_{4,m} \exp(2\pi\tau(|m| - |j+k-m| - |j| - |k|))$$

$$\leq \sum_{j, m, k=-\infty}^{\infty} \tilde{u}_{1,j} \tilde{u}_{2,k} \tilde{u}_{3,j+k-m} \tilde{u}_{4,m} = (B(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3), \tilde{u}_4).$$

从(13.14)知  $\|\tilde{u}_i\| = \|u_i\|_{\tau}, \|\tilde{u}_{ix}\| = A^{\frac{1}{2}} u_i \|_{\tau}, \tau \geq 0, i = 1, 2, 3, 4$ . 连同引理, (13.11), (13.12) 推出

$$(B(u_1, u_2, v), v)_{\tau}$$

$$\leq \|u_1\|_{\tau} \|u_2\|_{\tau} (\|v\|_{\tau} \|A^{\frac{1}{2}} v\|_{\tau} + \|v\|_{\tau}^2), \quad (13.15)$$

$$|(B(v, u_1, u_2), v)_{\tau}|$$

$$\leq \|u_1\|_{\tau} \|u\|_{\tau} (\|v\|_{\tau} \|A^{\frac{1}{2}} v\|_{\tau} + \|v\|_{\tau}^2). \quad (13.16)$$

**定理 13.2** 存在常数  $\rho_1 = \rho_1(a, \nu, \mu)$  使得下式成立: 如果  $\|u_0\| \leq \rho_0, u(t) = S(t)u_0$ , 则

$$|e^{(\frac{3}{8}\rho_1)tA^{\frac{1}{2}}}u(t)| \leq 2\rho_0, 0 \leq t \leq 8\rho_1^2/3 = t_1, \quad (13.17)$$

$$|e^{\rho_1 A^{\frac{1}{2}}}u(t)| \leq 2\rho_0, t > 8\rho_1^2/3 = t_1, \quad (13.18)$$

其中选取

$$\rho_1 = \frac{3}{8}(2a + 8\rho_0^2\sqrt{1+\mu^2} + 16\rho_0^4(1+\mu^2)^{-\frac{1}{2}}). \quad (13.19)$$

证 令  $\varphi(t) = (u, u)_{at}, \alpha > 0$ , 则

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\varphi'(t) &= (e^{atA^{\frac{1}{2}}}u_t, e^{atA^{\frac{1}{2}}}u) + \alpha(A^{\frac{1}{2}}e^{atA^{\frac{1}{2}}}u, e^{atA^{\frac{1}{2}}}u) \\ &= -(Au, u)_{at} - ((1+i\mu)B(u, u, u)_{at} + \alpha|u|_{at}^2 + \alpha|A^{\frac{1}{4}}u|_{at}^2). \end{aligned}$$

因  $(iv, Au, u)_{at} = 0$ , 由(13.15)和插值不等式可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\varphi'(t) + |A^{\frac{1}{2}}u|_{at} &\leq \sqrt{1+\mu^2}(|u|_{at}^4 + |u|_{at}^3|A^{\frac{1}{2}}u|_{at} \\ &\quad + \alpha|u|_{at}|A^{\frac{1}{2}}u|_{at}) \\ &\leq \sqrt{1+\mu^2}|u|_{at}^4 + \frac{1}{2}(1+\mu^2)|u|_{at}^6 + \frac{1}{2}|A^{\frac{1}{2}}u|_{at}^2 \\ &\quad + \alpha|u|_{at}^2 + \frac{1}{2}\alpha^2|u|_{at}^2 + \frac{1}{2}|A^{\frac{1}{2}}u|_{at}^2. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &\leq (2a + \alpha^2)\varphi(t) + 2\sqrt{1+\mu^2}\varphi^2(t) + (1+\mu^2)\varphi^3(t). \\ \text{注意到假设 } \varphi(0) &\leq \rho_0^2, \text{ 只要 } \varphi(t) \leq 4\rho_0^2, \text{ 即有} \\ \varphi'(t) &\leq 4\rho_0^2(2a + \alpha^2 + 8\rho_0^2\sqrt{1+\mu^2} + 16\rho_0^4(1+\mu^2)) = 8\alpha^2\rho_0^2. \\ \text{选取} \end{aligned}$$

$$\alpha = (2a + 8\rho_0^2\sqrt{1+\mu^2} + 16\rho_0^4(1+\mu^2))^{\frac{1}{2}}.$$

这就证明了

$$\varphi(t) \leq \varphi(0) + 8\alpha^2\rho_0^2t, t \leq \frac{3}{8\alpha^2} = t_1.$$

现取  $\rho_1 = \frac{3}{8\alpha}$ , 即得(13.17). 不等式(13.18)作为(13.17)和  $S(t)$  性质(iv)的推论.

**推论 13.3(空间解析性)** 对任何  $u_0 \in H$ , 使得  $|u_0| \leq \rho_0$ ,

和每个固定  $t \geq t_1$ , 函数  $\operatorname{Re} S(t)u_0$  和  $\operatorname{Im} S(t)u_0$  为空间变元的实解析函数, 它的解析半径至少为  $\rho_1$ , 我们有估计

$$\left| \frac{d^n}{dx^n} \operatorname{Re} S(t)u_0 \right| \leq n! 2\rho_0 \cdot \rho_1^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \forall t \geq t_1.$$

$$\left| \frac{d^n}{dx^n} \operatorname{Im} S(t)u_0 \right| \leq n! 2\rho_0 \rho_1^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

证 这两个估计来自 (13.18) 和 (13.7), 为得到解析性, 固定任意  $\epsilon \in (0, 1)$ , 取  $n \geq 1$ , 利用 (13.10) 得

$$\left| \frac{d^n}{dx^n} \operatorname{Re} S(t)u_0 \right|_\infty \leq \left| \frac{d^n}{dx^n} \operatorname{Re} S(t)u_0 \right|^{\frac{1}{2}} \left| \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \operatorname{Re} S(t)u_0 \right|^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq (n+1)! 2\rho_0 \rho_1^{\frac{1}{2}} \rho_1^n \leq n! 2\epsilon^{-1} \rho_0 \rho_1^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1+\epsilon}{\rho_1} \right)^n.$$

对  $n = 0$ , 利用 (13.9) 得

$$\|\operatorname{Re} S(t)u_0\|_\infty \leq (2\rho_0)^2 \left( 1 + \frac{1}{\rho_1} \right).$$

$\operatorname{Re} S(t)$  的解析性来自 [21, 定理 19.9]. 相同的原理对  $\operatorname{Im} S(t)u_0$  可得.

现考虑高阶导数的强挤压性.

**定理 13.4** ([22], 强挤压性) 存在常数  $\rho_2 = \rho_2(a, \nu, \mu)$  和  $\rho_3 = \rho_3(a, \nu, \mu)$  具有如下性质: 如  $u_1, u_2$  为 GL 方程的解, 且  $\|u_1(0)\| \leq \rho_0, \|u_2(0)\| \leq \rho_0$ . 令  $v = u_1 - u_2$ , 则如下断言之一成立:

(a)  $\|v(t)\| \leq \|v(0)\| e^{-\rho_2 t}, t \geq 0$ ,

(b) 存在  $t' > 0$ , 使得

$$\|A^{\frac{1}{2}} v(t)\|^2 \leq \rho_3 \|v(t)\|^2, t \geq t'. \quad (13.20)$$

进一步, 如 (13.20) 对  $t = t''$  成立, 则它对任何  $t' \geq t''$  成立.

**推论 13.5** ([22]) 如  $u_1, u_2 \in \mathcal{V}, v_1 = u_1 - u_2$ , 则

$$\|A^{\frac{1}{2}} v\|^2 \leq \rho_3 \|v\|^2.$$

**定理 13.6** 存在常数  $\rho_4 = \rho_4(a, \nu, \mu), t_2 = t_2(a, \nu, \mu)$  使

以下结论成立:如  $u_1, u_2$  为 GL 方程的解使得

$$\|e^{\rho_1 A^{\frac{1}{2}}} u_i(t)\| \leq 2\rho_0, \quad t \geq 0, \quad i = 1, 2 \quad (13.21)$$

和

$$\|A^{\frac{1}{2}} v(t)\|^2 \leq \rho_3 \|v(t)\|^2, \quad (13.22)$$

其中  $v = u_1 - u_2$ , 则有

$$\|e^{\rho_1 A^{\frac{1}{2}}} v(t)\| \leq 2 \|v(t)\|. \quad (13.23)$$

证 易知

$$\begin{aligned} & v_t + (1 + i\nu)Av + (1 + i\mu)(B(u_1, u_2, v) \\ & + B(v, u_1 + u_2, u_2) - av) = 0. \end{aligned} \quad (13.24)$$

令  $\varphi(t) = (v, v)_{at}$ , 固定  $\alpha > 0$ , 则对  $at \leq \rho_1$  有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \varphi'(t) &= (e^{\alpha A^{\frac{1}{2}}} v_t, e^{\alpha A^{\frac{1}{2}}} v) + \alpha (A^{\frac{1}{2}} e^{\alpha A^{\frac{1}{2}}} v, e^{\alpha A^{\frac{1}{2}}} v) \\ &= -(Av, v)_{at} - ((1 + i\mu)B(u_1, u_2, v), v)_{at} \\ &\quad - ((1 + i\mu)B(v, u_1 + u_2, u_2), v)_{at} \\ &\quad + \alpha \|v\|_{at}^2 + \alpha \|A^{\frac{1}{2}} v\|_{at}^2. \end{aligned}$$

由估计 (13.15), (13.16) 和 (13.21) 可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \varphi'(t) + \|A^{\frac{1}{2}} v\|_{at}^2 &\leq \sqrt{1 + \mu^2} \|u_1\|_{at}^2 (\|v\|_{at} + \|A^{\frac{1}{2}} v\|_{at} + \|v\|_{at}^2) \\ &\quad + \sqrt{1 + \mu^2} \|u_1 + u_2\|_{at} \|u_2\|_{at} (\|v\|_{at} + \|A^{\frac{1}{2}} v\|_{at} + \|v\|_{at}^2) \\ &\quad + \alpha \|v\|_{at}^2 + \alpha \|v\|_{at} \|A^{\frac{1}{2}} v\|_{at} \\ &\leq \|v\|_{at} + \|A^{\frac{1}{2}} v\|_{at} (12\rho_0^2 \sqrt{1 + \mu^2} + \alpha) \\ &\quad + \|v\|_{at}^2 (12\rho_0^2 \sqrt{1 + \mu^2} + \alpha) \\ &\leq 72\rho_0^4 (1 + \mu^2) \|v\|_{at}^2 + \frac{1}{2} \|A^{\frac{1}{2}} v\|_{at}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \alpha^2 \|v\|_{at}^2 + \frac{1}{2} \|A^{\frac{1}{2}} v\|_{at}^2 \\ &\quad + \|v\|_{at}^2 (12\rho_0^2 \sqrt{1 + \mu^2} + \alpha), at \leq \rho_1. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &\leq \varphi(t)(144\rho_0^4(1+\mu^2) + a^2 + 24\rho_0^2\sqrt{1+\mu^2} + 2a) \\ &= \varphi(t)(\lambda_1 + a^2), \alpha \leq \rho_1.\end{aligned}\quad (13.25)$$

另一方面, 作(13.24) 和  $v$  的内积, 由(13.22) 推出

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|^2 &= -\|A^{\frac{1}{2}}v\|^2 - [(1+i\mu)B(u_1, u_2, v), v] + a\|v\|^2 \\ &\leq -((1+i\mu) \cdot B(u_1, u_1 + u_2, v), v) + a\|v\|^2 \\ &\geq -\rho_3\|v\|^2 - 12\rho_0^2\sqrt{1+\mu^2}(\|v\| \|A^{\frac{1}{2}}v\| + \|v\|^2) \\ &\geq -\|v\|^2(\rho_3 + 12\rho_0^2\rho_3^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\mu^2} + 12\rho_0^2\sqrt{1+\mu^2}) \\ &= -\frac{\lambda^2}{2}\|v\|^2, t \geq 0,\end{aligned}$$

可得

$$\|v(t)\|^2 \geq e^{-\lambda_2 t} \|v(0)\|^2.$$

连同(13.25) 得

$$\|e^{a+A^{\frac{1}{2}}}v(t)\|^2 \leq e^{(\lambda_1+\lambda_2+a^2)t} \|v(t)\|^2, at \leq \rho_1.$$

选取  $\alpha = \max\{\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}\}$ ,  $t = t_2 = \min\left\{\frac{1}{4\lambda_1}, \frac{1}{4\lambda_2}, \frac{\rho_1}{\sqrt{\lambda_1}}, \frac{\rho_1}{\sqrt{\lambda_2}}\right\}$  和

$\rho_4 = \alpha t_4$ , 则有

$$\|e^{\rho_4 A^{\frac{1}{2}}}v(t_2)\| \leq e^{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} \|v(t_2)\|^2 \leq 4 \|v(t_2)\|^2.$$

得到(13.23),  $t = t_2$ . 利用对时间的平移, 可得(13.23), 对一切  $t \geq t_2$ .

**附注 13.7** 如果忽略对  $\mu, \nu$  的依赖性, 可得

$$\begin{cases} \rho_0 = O(a^{\frac{1}{2}}), \\ \rho_1^{-1} = O(a), \\ \rho_2^{-1} = O(a^{-2}), \\ \rho_3 = O(a^4), \\ \lambda_1 = O(a^2), \\ \lambda_2 = O(a^4), \\ \rho_4^{-1} = O(a^{-2}). \end{cases} \quad a \rightarrow \infty$$

**推论 13.8** 设  $u_1, u_2 \in \mathcal{A}$ ,  $v = u_1 - u_2$ , 则有

$$(i) \|v\|_{\rho_4} \leq 2 \|v\|;$$

$$(ii) \|v^{(n)}\| \leq 2n! \rho_4^n \|v\|, n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$(iii) \|v^{(n)}\|_{\infty} \leq \frac{M}{2} n! \left(\frac{2}{\rho_4}\right)^n \|v\|_{\infty}, \text{ 对 } n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\text{其中 } M = \max \left\{ 4\rho_4^{-\frac{1}{2}}, 2 \left(1 + \frac{2}{\rho_4}\right)^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

**证** 由吸引子性质(b), 存在  $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2 \in \mathcal{A}$ , 使得  $S(t_1 + t_2) \tilde{u}_i = u_i, i = 1, 2$ . 由性质(c) 和定理 13.2, 我们有

$$\|e^{\rho_1 A^{\frac{1}{2}}} S(t) \tilde{u}_i\| \leq 2\rho_0, t \geq t_1, \quad i = 1, 2.$$

由推论 13.5 有

$$\|A^{\frac{1}{2}}(S(t) \tilde{u}_1 - S(t) \tilde{u}_2)\| \leq \rho_3 \|S(t) \tilde{u}_1 - S(t) \tilde{u}_2\|, \quad t \geq t_1.$$

由定理 13.6, 即得(i), (ii) 易从(i) 得到.

(iii) 对  $n > 1$ , 从(13.10) 和(ii) 有

$$\begin{aligned} \|v^{(n)}\|_{\infty} &\leq \|v^{(n)}\|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \|v^{(n+1)}\|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \leq 2(n+1)! \rho_4^{\frac{1}{2}} \rho_4^{-n} \|v\| \\ &\leq 2n! \rho_4^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{\rho_4}\right)^n \|v\|. \end{aligned}$$

对  $n = 0$  可用(13.9) 和(ii):

$$\|v\|_{\infty} \leq \|v\|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\|v\| + \|v_x\|)^{\frac{1}{2}} \leq \|v\| \left(1 + \frac{2}{\rho_4}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

因  $\|v\| \leq \|v\|_{\infty}$ , 这就证明了(iii).

**推论 13.9** 设  $u_1, u_2 \in \mathcal{A}$ ,  $v = u_1 - u_2$ , 函数  $\operatorname{Re} v$  和  $\operatorname{Im} v$  能分别延拓为函数  $v_r$  和  $v_i$ , 它在

$$\pi_{\delta} = \{z \in \mathbb{D} : |\operatorname{Im} z| < \delta\}$$

是全纯的,  $\delta = \frac{\rho_4}{4}$  使得

$$\|v_r(z)\| \leq M \|v\|_{\infty} = M \sup_{x \in \Omega} \|v(x)\|, x \in \pi_{\delta},$$

$$\|v_i(z)\| \leq M \|v\|_{\infty} = M \sup_{x \in \Omega} \|v(x)\|, z \in \pi_{\delta}.$$

**证** 由推论 13.3 可知函数  $\operatorname{Re} v, \operatorname{Im} v$  是实解析的, 因此, 它们

能被延拓至  $\pi_{2\delta}$  上的全纯函数(推论 13.8 (iii)). 为得到其他的断言, 取  $z \in \pi_\delta$ , 对  $v_r$  作 F 氏展开:

$$\begin{aligned} |v_r(z)| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \operatorname{Re} v^{(n)}(\operatorname{Re} z) \cdot (z - \operatorname{Re} z)^n \right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{1}{2} M n! \frac{1}{(2\delta)^n} |v|_\infty \right) \delta^n = M |v|_\infty. \end{aligned}$$

相同的估计适用于  $v_i$ .

现考虑环绕数的上界.

**命题 13.10** 设  $v$  为一函数满足命题 13.9 的断言, 且函数  $\operatorname{Re} v$  和  $\operatorname{Im} v$  的每一个至少在  $\Omega$  上具有  $m$  个零点, 这里  $m$  为非负整数. 如果

$$m \geq \max \left\{ 0, \frac{\log(M\sqrt{2})}{-\log\left(\tanh \frac{\pi}{4\delta}\right)} + 1 \right\} = m_0,$$

则  $v = 0$ .

为证明这个命题, 我们需要如下的 Schatz 引理.

**引理 13.11** 设函数  $f$  在带  $\pi_\delta$  上全纯,  $\delta > 0$  且

$$|f(z)| \leq M', \quad M' > 0, \quad z \in \pi_\delta.$$

设  $z_1, z_2, \dots, z_m \in \pi_\delta$  为  $f(Z)$  的零点, 则

$$|f(z)| \leq M' \prod_{j=1}^m \left| \tanh \left( \frac{\pi(z - z_j)}{4\delta} \right) \right|, \quad z \in \pi_\delta.$$

**命题 13.10 的证明.** 设  $v_r$  和  $v_i$  分别为  $\operatorname{Re} v$ ,  $\operatorname{Im} v$  的全纯扩张, 且  $v_1$  为函数  $v_r$  或  $v_i$  之一,  $x_1, \dots, x_m$  为  $v_1$  的零点,  $m \geq m_0$ , 则由 Schatz 引理,

$$\begin{aligned} |v_1|_\infty &= \sup_{x \in \Omega} |v_1(x)| \leq M |v|_\infty \prod_{j=1}^m \sup_{x \in \Omega} \left| \tanh \left( \frac{\pi(x - x_j)}{4\delta} \right) \right| \\ &\leq M \left( \tanh \left( \frac{\pi}{4\delta} \right) \right)^m |v|_\infty. \end{aligned}$$

因此

$$|v|_\infty = \sup_{x \in \Omega} (|\operatorname{Re} v(x)|^2 + |\operatorname{Im} v(x)|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq M\sqrt{2}\left(\tanh\left(\frac{\pi}{4\delta}\right)\right)^m \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty,$$

$m \geq m_0$ , 那么  $M\sqrt{2}\left(\tanh\left(\frac{\pi}{4\delta}\right)\right)^m < 1$ . 于是  $v = 0$  在  $\Omega$  上, 命题得证.

最后叙述和证明主要结果:

**定理 13.12** 设  $u \in \mathcal{A}$ ,  $p \in \mathbb{C}$ .

(i) 如每个函数  $\operatorname{Re}(u - p)$  和  $\operatorname{Im}(u - p)$  在  $\Omega$  上至少有  $m_0 + 1$  个零点, 则  $u(x) = p, x \in \Omega$ .

(ii) 如  $p \notin \{u\}$ , 则  $|\operatorname{Ind} p(u)| \leq \frac{m_0}{2}$ .

**证** 显然 (i) 推出 (ii).

(i) 的证明, 令  $u \in \mathcal{A}$ , 设函数  $\operatorname{Re}(u - p)$  和  $\operatorname{Im}(u - p)$  至少有  $m_0 + 1$  个零点. 因  $\operatorname{Re}(u - p)$  和  $\operatorname{Im}(u - p)$  为实解析函数, 能选取  $0 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_{m_0+1} \leq 1$  和  $0 \leq y_1 < y_2 < \cdots < y_{m_0+1} \leq 1$ , 使得  $x_1, \dots, x_{m_0+1}$  为  $\operatorname{Re}(u - p)$  在  $[x_1, x_{m_0+1}]$  上的所有零点,  $y_1, \dots, y_{m_0+1}$  为  $\operatorname{Im}(u - p)$  在  $[y_1, y_{m_0+1}]$  上的所有零点, 选取正数

$$\varepsilon < \min\left\{\min_{1 \leq j \leq m_0} (x_{j+1} - x_j), \min_{1 \leq j \leq m_0} (y_{j+1} - y_j)\right\}. \quad (13.26)$$

令  $u_1(x) = u(x)$ ,  $u_2(x) = u(x - \varepsilon)$ ,  $x \in R$ , 因 GL 方程在空间变元的平移下是不变的, 我们有  $u_1, u_2 \in \mathcal{A}$ . 取  $v = u_1 - u_2$ , 令  $i \in \{1, 2, \dots, m_0\}$ . 计算

$$\operatorname{Re} v(x_i + \varepsilon) = \operatorname{Re} u(x_i + \varepsilon) - \operatorname{Re} u(x_i) = \operatorname{Re} u(x_i + \varepsilon) - \operatorname{Re} p,$$

$$\operatorname{Re} v(x_{i+1}) = \operatorname{Re} u(x_{i+1}) - \operatorname{Re} u(x_{i+1} - \varepsilon) = \operatorname{Re} p - \operatorname{Re} u(x_{i+1}).$$

因  $x_i, x_{i+1} \in [x_i, x_{i+1}]$ ,  $\operatorname{Re} v$  至少在  $(x_i, x_{i+1})$  一次消失, 推之, 至少在  $\Omega$  上  $m_0$  次消失. 类似,  $\operatorname{Im} v$  至少在  $\Omega$  内  $m_0$  次消失. 由命题 13.10 得  $v = 0$ , 即  $u(x) = u(x - \varepsilon)$ , 对任何  $\varepsilon > 0$  满足 (13.26), 因此  $u$  是一个常数. 定理证毕.



## § 14 广义 Ginzburg-Landau 方程的离散 吸引子及其维数估计

考虑如下广义 GL 方程

$$\begin{aligned} \partial_t u + \nu u_x = & \chi u + (\gamma_r + i\gamma_i)u_{xx} - (\beta_r + i\beta_i)|u|^2 u \\ & - (\delta_r + i\delta_i)|u|^4 u - (\lambda_r + i\lambda_i)|u|^2 u_x \\ & - (\mu_r + i\mu_i)u^2 \bar{u}_x, \end{aligned} \quad (14.1)$$

其中  $\gamma_r, \delta_r$  和  $\chi$  为正常数,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\nu, \gamma_i, \beta_r, \beta_i, \delta_i, \lambda_r, \lambda_i, \mu_r$  和  $\mu_i$  均为实常数, 考虑方程 (14.1) 的周期边界条件

$$u(x+1, t) = u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (14.2)$$

和初始条件

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (14.3)$$

研究 GL 方程周期初值问题 (14.1), (14.2), (14.3) 的空间离散化.

令  $J \in \mathbb{N}$ ,  $h = \frac{1}{J}$ , 近似函数  $u(x) \in L^2(0, 1)$  为

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_J)^{tr} = \left( u\left(\frac{1}{J}\right), u\left(\frac{2}{J}\right), \dots, u(1) \right)^{tr}. \quad (14.4)$$

通常离散负 Laplace 算子  $-\Delta$  是周期边界条件, 用差分格式置为

$$A = J^2 A_1 = J_2 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 2 & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & -2 & 2 & -1 \\ -1 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}_{J \times J} \quad (14.5)$$

用如下符号表示:

$$u_{jx} = \frac{1}{h}(u_{j+1} - u_j) = \frac{1}{h}\Delta_+ u_j, u_{j\bar{x}} = \frac{1}{2h}(u_{j+1} - u_{j-1}) = \frac{1}{h}\Delta_- u_j,$$

$$u_{j\hat{x}} = \frac{1}{2h}(u_{j+1} - u_{j-1}) = \frac{1}{2h}(\Delta_+ u_j + \Delta_- u_j).$$

此时问题(14.1), (14.2), (14.3) 近似为

$$\begin{aligned} \partial_t u_j + \nu u_{j\hat{x}} &= \chi u_j + (\gamma_r + i\gamma_i) u_{j\bar{x}} - (\beta_r + i\beta_i) |u_j|^2 u_j \\ &\quad - (\delta_r + i\delta_i) |u_j|^4 u_j - (\lambda_r + i\lambda_i) P(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}) \\ &\quad - (\mu_r + i\mu_i) Q(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}), \end{aligned} \quad (14.6)$$

$$\text{其中 } P(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}) = \frac{1}{2} \bar{u}_j (u_j^2)_{\hat{x}} = \frac{1}{4h} \bar{u}_j (u_{j+1}^2 - u_{j-1}^2),$$

$$\begin{aligned} Q(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}) &= u_j (|u_j|^2)_{\hat{x}} - \frac{1}{2} \bar{u}_j (u_j^2)_{\hat{x}} \\ &= \frac{1}{4h} [2u_j (|u_{j+1}|^2 - |u_{j-1}|^2) - \bar{u}_j (u_{j+1}^2 - u_{j-1}^2)], \end{aligned} \quad (14.7)$$

$$u_j(t) = u_{j+1}(t), \quad (14.8)$$

$$u_j(0) = u_0(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, J. \quad (14.9)$$

两个离散复周期函数  $u_h = \{u_j \mid j = 1, \dots, J\}$  和  $v_h = \{v_j \mid j = 1, 2, \dots, J\}$  为

$$(u, v)_h = \sum_{j=1}^J u_j \bar{v}_j h,$$

其中  $\bar{v}_j$  表示  $v_j$  的复数共轭, 对于离散函数  $u_h$  和它的  $k$  阶差商  $\delta^k u_h (k > 0)$  的模可表为

$$\|\delta^k u_h\|_p = \left( \sum_{j=1}^{J-k} \left\| \frac{\Delta_+^k u_j}{h^k} \right\|_h^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|\delta^k u_h\|_\infty = \max_{j=1, \dots, J-k} \left\| \frac{\Delta_+^k u_j}{h^k} \right\|,$$

其中  $k > 0$  为任何非负整数,  $p$  为实数, 现叙述某些插值关系关于离散函数  $u_h$  某些差商模在  $[0, 1]$  上:

**引理 14.1** 对任何离散函数  $u_h = \{u_j \mid j = 1, 2, \dots, J\}$  有

$$\|u_h\|_\infty \leq K_1 \|u_k\|_2^{\frac{1}{2}} (\|\delta u_h\|_2 + \|u_h\|_2)^{\frac{1}{2}}, \quad (14.10)$$

$$\|\delta u_h\|_2 \leq K_2 \|u_h\|_2^{\frac{1}{2}} (\|\delta^2 u_h\|_2 + \|u_h\|_2)^{\frac{1}{2}}, \quad (14.11)$$

$$\|\delta^k u_h\|_p \leq K_3 \|u_h\|_2^{\frac{k+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}{k}} \cdot (\|\delta^k u_h\|_2 + \|u\|_2)^{\frac{k+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}{h}}, \quad (14.12)$$

其中  $K_1, K_2$  和  $K_3$  为正常数与离散函数  $u_h$  和步长无关.

$$2 \leq p \leq \infty, 0 \leq k < n.$$

为简单记, 令  $\|u_h\|_2 = \|u_h\|$ ,  $\|u_h\|_{H^1} = \|\delta u_h\| + \|u_h\|$ ,  $\|u_h\|_{H^2} = \|\delta^2 u_h\| + \|u_h\|$ , 有时记  $u_h$  为  $u$ .

**引理 14.2** 设二个复离散函数  $f_h = \{f_j \mid j = 1, \dots, J\}$  和  $g_h = \{g_j \mid j = 1, 2, \dots, J\}$  满足周期条件  $f_j = f_{j+J}, g_j = g_{j+J}$ , 有

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^J \bar{f}_j (f_{j+1} - f_{j-1}) = 0, \\ (f_j g_j)_x = f_{j+1} g_{jx} = f_{jx} g_j, \\ (f_j g_j)_{\hat{x}} = f_{j+1} g_{j\hat{x}} + f_{j\hat{x}} g_{j-1}, \\ (f, g_{\bar{x}}) = -(f_x, g). \end{cases} \quad (14.13)$$

**证** 直接计算得

$$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^J \bar{f}_j (f_{j+1} - f_{j-1}) = \operatorname{Re} \left[ \sum_{j=1}^J \bar{f}_j f_{j+1} - \sum_{j'=0}^{J-1} \bar{f}_{j'+1} f_{j'} \right].$$

利用周期条件  $\sum_{j'=0}^{J-1} \bar{f}_{j'+1} f_{j'} = \sum_{j=1}^J \bar{f}_{j+1} f_j$ , 因此

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^J \bar{f}_j (f_{j+1} - f_{j-1}) &= \operatorname{Re} \sum_{j=1}^J (\bar{f}_j f_{j+1} - \bar{f}_{j+1} f_j) \\ &= \sum_{j=1}^J [\operatorname{Re}(\bar{f}_j f_{j+1} - \bar{f}_{j+1} f_j)] = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f_j, g_j)_x &= \frac{1}{h} (f_{j+1} g_{j+1} - f_j g_j) \\ &= \frac{1}{h} (f_{j+1} g_{j+1} - f_{j+1} g_j + f_{j+1} g_j - f_j g_j) \\ &= f_{j+1} g_{jx} + f_{jx} g_j. \end{aligned}$$

类似地

$$\begin{aligned}
(f_j, g_j)_{\hat{x}} &= \frac{1}{2h}(f_{j+1}g_{j+1} - f_{j-1}g_{j-1}) = f_{j+1}\frac{g_{j+1} - g_{j-1}}{2h} \\
&\quad + \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2h}g_{j-1} = f_{j+1}g_{j\hat{x}} + f_jg_{j-1}, \\
(f, g_{\bar{x}}) &= \sum_{j=1}^J f_j \bar{g}_{j\hat{x}} h = \sum_{j=1}^J f_j (\bar{g}_j - \bar{g}_{j-1}) = \sum_{j=1}^J f_j \bar{g}_j - \sum_{j=1}^J f_j \bar{g}_{j-1} \\
&= \sum_{j=1}^J f_j \bar{g}_j - \sum_{j=0}^{J-1} f_{j+1} \bar{g}_j = \sum_{j=1}^J f_j \bar{g}_j - \sum_{j=1}^J f_{j+1} \bar{g}_j = -(f_x, g).
\end{aligned}$$

**引理 14.3** 设  $\gamma_r > 0, \delta_r > 0, \chi > 0$  和  $4\gamma_r\delta_r > (\lambda_i - \mu_i)^2$ , 则对离散系统(14.6), (14.8), (14.9) 有

$$\|u(t)\|^2 \leq e^{-2\chi t} \|u(0)\|^2 + \frac{P^2}{2\chi}(1 - e^{-2\chi t}), \quad \forall t > 0, \quad (14.14)$$

$$\int_0^\infty \|u_x(t)\|^2 dt < \infty, \quad (14.15)$$

其中  $P = 2\chi + \left[ \frac{\beta_r + \frac{1}{2}}{2\beta} \right]$ ,  $\beta$  为适当选取的确定常数.

**证** 作(14.6) 和  $u$  的内积, 得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 &= -\nu \operatorname{Re} \sum_{j=1}^J u_{j\hat{x}} u_j h + \chi \|u\|^2 - \gamma_r \|u_x\|^2 \\
&\quad - \beta_r \sum_{j=1}^J |u_j|^4 h - \delta_r \sum_{j=1}^J |u_j|^6 h \\
&\quad - \operatorname{Re} \{ (\lambda_r + i\lambda_i) \sum_{j=1}^J P(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}) \bar{u}_j h \} \\
&\quad - \operatorname{Re} \{ (\mu_r + i\mu_i) \sum_{j=1}^J Q(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}) \bar{u}_j h \}.
\end{aligned} \quad (14.16)$$

由引理 14.2

$$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^J u_{j\hat{x}} \bar{u}_j h = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^J \bar{u}_j (\bar{u}_{j+1} - u_{j-1}) h = 0,$$

$$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^J P(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}) \bar{u}_j h = \frac{1}{4} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^J \bar{u}_j^2 (u_{j+1}^2 - u_{j-1}^2) h = 0,$$

$$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^J Q(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}) \bar{u}_j h = \frac{1}{4} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^J [2|u_j|^2(|u_{j+1}|^2 - |u_{j-1}|^2) - |u_{j-1}|^2 - u_j^2(u_{j+1}^2 - u_{j-1}^2)] = 0.$$

我们有

$$\begin{aligned} & -\operatorname{Re}\left\{(\lambda_r + i\lambda_i) \sum_{j=1}^J P(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}) \bar{u}_j h\right\} \\ & -\operatorname{Re}\left\{(\mu_r + i\mu_i) \sum_{j=1}^J Q(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}) u_j h\right\} \\ & = \frac{1}{4} \lambda_i \operatorname{Im} \sum_{j=1}^J (\bar{u}_j)^2 (u_{j+1}^2 - u_{j-1}^2) - \frac{1}{4} \mu_i \operatorname{Im} \sum_{j=1}^J (\bar{u}_j)^2 (u_{j+1}^2 - u_{j-1}^2) \\ & = \frac{1}{4} (\lambda_i - \mu_i) \operatorname{Im} \sum_{j=1}^J (\bar{u}_j)^2 (u_{j+1}^2 - u_{j-1}^2) \\ & = \frac{1}{4} (\lambda_i - \mu_i) \operatorname{Im} \sum_{j=1}^J (\bar{u}_j)^2 (u_{j+1} + u_{j-1})(u_{j+1} - u_j + u_j - u_{j-1}) \\ & \leq (\lambda_i - \mu_i) \sum_{j=1}^J |u_j|^2 \left| \frac{u_{j+1} + u_{j-1}}{2} - \frac{u_j + u_{j-1}}{2} \right| h \\ & \leq a_1 b_1 \left( \sum_{j=1}^J |u_j|^4 \left| \frac{u_{j+1} + u_{j-1}}{2} \right|^2 h \right)^{\frac{1}{2}} \|u_x\| \\ & \leq \frac{a_1^2}{2} \sum_{j=1}^J |u_j|^4 \left| \frac{u_{j+1} + u_{j-1}}{2} \right|^2 h + \frac{b_1^2}{2} \|u_x\|^2 \\ & \leq \frac{a_1^2}{2} \sum_{j=1}^J |u_j|^6 h + \frac{b_1^2}{2} \|u_x\|^2, \end{aligned} \quad (14.17)$$

其中  $a_1 b_1 = |\lambda_i - \mu_i|$ . Young 不等式

$$fg \leq \varepsilon^p \frac{f^p}{p} + \left( \frac{1}{\varepsilon^q} \right)^p \frac{1}{p'}, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad f, g, \varepsilon > 0 \quad (14.18)$$

和周期函数性质已在不等式(14.17)中用到.

将以上估计代入(14.16), 选取  $a_1$  和  $b_1$  使得

$$\alpha = 2\gamma_r - b_1^2 > 0, \quad \beta = 2\gamma_r - a_1^2 > 0.$$

我们有

$$\frac{d}{dt} \|u\|^2 \leq 2\chi \|u\|^2 - \alpha \|u_x\|^2 + 2\beta_r \sum_{j=1}^J |u_j|^4 h$$

$$-\beta \sum_{j=1}^J |u_j|^6 h. \quad (14.19)$$

因

$$\begin{aligned} & -\beta |u_j|^6 + 2\beta_r |u_j|^4 + 2\chi |u_j|^2 \\ &= -\beta \left( |u_j|^3 - \frac{\beta_r + \frac{1}{2}}{\beta} |u_j| \right)^2 - |u_j|^4 \\ & \quad + \left( \frac{\beta_r + \frac{1}{2}}{\beta} + 4\chi \right) |u_j|^2 - 2\chi |u_j|^2 \\ &\leq -(|u_j|^2 - P)^2 + P^2 - 2\chi |u_j|^2 \\ &\leq P^2 - 2\chi |u_j|^2, \end{aligned}$$

其中

$$P = 2\chi + \frac{\left(\beta_r + \frac{1}{2}\right)^2}{2\beta},$$

从(14.19)可得

$$\frac{d}{dt} \|u\|^2 + 2\chi \|u\|^2 + \alpha \|u_x\|^2 \leq P^2. \quad (14.20)$$

由 Gronwall 不等式, 可得(14.14). 从(14.20) 和(14.14) 可得(14.15). 这就证明了离散系统(14.6), (14.8), (14.9) 整体解存在性.

**推论 14.4** 在引理 14.3 下,  $\|u_0\| \leq R, R > 0$ , 则存在离散系统(14.6), (14.8), (14.9) 的整体解的存在性.

**引理 14.5** 在引理 14.3 条件下, 存在不等式

$$\frac{d}{dt} \|u_x\|^2 + \gamma_r \|u_{x\bar{x}}\|^2 \leq E_1 (1 + \|u_x\|^2)^2, \quad (14.21)$$

其中常数  $E_1$  与离散函数  $u_h$  和步长  $h$  无关.

**证** 作(14.6) 和  $u_{x\bar{x}}$  的内积取实部, 利用分部积分公式可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_x\|^2 + \gamma_r \|u_{x\bar{x}}\|^2 &= \chi \|u_x\|^2 + \operatorname{Re} \left\{ (\beta_r + i\beta_i) \sum_{j=1}^J \times |u_j|^2 u_j \bar{u}_{j\bar{x}} h \right\} \\ & \quad + \operatorname{Re} \left\{ (\delta_r + i\delta_i) \sum_{j=1}^J |u_j|^4 u_j \bar{u}_{j\bar{x}} h \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \operatorname{Re} \left\{ (\lambda_r + i\lambda_i) \sum_{j=1}^J P(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}) \cdot \bar{u}_{jx} h \right\} \\
& + \operatorname{Re} \left\{ (\mu_r + i\mu_i) \sum_{j=1}^J Q(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}) \bar{u}_{jx} h \right\}.
\end{aligned}
\tag{14.22}$$

由引理 14.2, 我们有

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^J |u_j|^2 u_j \bar{u}_{jxx} = - \sum_{j=1}^J (|u_j|^2 u_j)_{,x} \bar{u}_{jx} \\
& = - \sum_{j=1}^J |u_j|^2 |u_{jx}|^2 h - \sum_{j=1}^J |u_{j+1}|^2 |u_{jx}|^2 h - \sum_{j=1}^J u_j u_{j+1} \bar{u}_{jx}^2, \\
& \sum_{j=1}^J |u_j|^4 u_j \bar{u}_{jxx} h = - \sum_{j=1}^J (|u_j|^4 u_j)_{,x} \bar{u}_{jx} h \\
& = - \sum_{j=1}^J |u_j|^4 |u_{jx}|^2 h - \sum_{j=1}^J u_{j+1} (|u_{j+1}|^4 - |u_j|^4) \bar{u}_{jx} h \\
& = - \sum_{j=1}^J |u_j|^4 |u_{jx}|^2 h - \sum_{j=1}^J (|u_{j+1}|^2 + |u_j|^2) u_{j+1} \bar{u}_{jx} \\
& \quad \times (|u_{j+1}|^2 - |u_j|^2) h \\
& = - \sum_{j=1}^J (|u_{j+1}|^4 + |u_{j+1}|^2 |u_j|^2 + |u_j|^4) |u_{jx}|^2 \\
& \quad - \sum_{j=1}^J (|u_{j+1}|^2 + |u_j|^2) u_{j+1} \bar{u}_{jx}^2 h,
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_x\|^2 + \gamma_r \|u_{xx}\|^2 \leq \chi \|u_x\|^2 - \beta_r \sum_{j=1}^J \\
& \quad \times (|u_{j+1}|^2 + |u_j|^2) \cdot |u_{jx}|^2 h \\
& \quad + \sqrt{\beta_r^2 + \beta_i^2} \sum_{j=1}^J |u_{j+1}| |u_j| |u_{jx}|^2 h \\
& \quad - \delta_r \sum_{j=1}^J (|u_{j+1}|^4 + |u_{j+1}|^2 |u_j|^2 + |u_j|^4 |u_{jx}|^2) h \\
& \quad + \sqrt{\delta_r^2 + \delta_i^2} \sum_{j=1}^J (|u_{j+1}|^2 + |u_j|^2) |u_{j+1}| |u_j| |u_{jx}|^2 h
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \sqrt{(\lambda_r - \mu_r)^2 + (\lambda_i - \mu_i)^2} \sum_{j=1}^J (|u_{j+1}| + |u_{j-1}|) |u_{jx}| |u_{jx\bar{x}}| h \\
& + \frac{1}{2} \sqrt{\mu_r^2 + \mu_i^2} \sum_{j=1}^J |u_j| (|u_{j+1}| + |u_{j-1}|) |u_{jx}| |u_{jx\bar{x}}| h.
\end{aligned} \tag{14.23}$$

应用引理 14.1,

$$\|u\|_{\infty} \leq K_1 \|u\|^{\frac{1}{2}} (\|u\| + \|u_x\|)^{\frac{1}{2}},$$

可得

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^J (|u_{j+1}|^2 + |u_j|^2) |u_{jx}|^2 h \leq 2 \|u\|_{\infty}^2 \|u_x\|^2 \\
& \leq 2K_1 \|u\| (\|u\| + \|u_x\|) \|u_x\|^2 \\
& \leq C(\|u_x\|^2 + \|u_x\|^3) \leq C(\|u_x\|^2 + \|u_x\|^4).
\end{aligned} \tag{14.24}$$

类似地

$$\sum_{j=1}^J |u_{j+1}| |u_j| |u_{jx}|^2 h \leq C(\|u_x\|^2 + \|u_x\|^4), \tag{14.25}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^J (|u_{j+1}|^4 + |u_{j+1}|^2 |u_j|^2 + |u_j|^4) |u_{jx}|^2 h \\
& \leq \|u\|_{\infty}^4 \|u_x\|^2 \leq C(\|u_x\|^2 + \|u_x\|^4),
\end{aligned} \tag{14.26}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^J (|u_{j+1}|^2 + |u_j|^2) |u_{j+1}| |u_j| |u_{jx}|^2 h \\
& \leq C(\|u_x\|^2 + \|u_x\|^4),
\end{aligned} \tag{14.27}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^J |u_j| (|u_{j+1}| + |u_{j-1}|) |u_{jx}| |u_{jx\bar{x}}| h \\
& \leq \frac{\gamma_r}{2} \|u_{x\bar{x}}\|^2 + \frac{1}{2\gamma_r} \sum_{j=1}^J |u_j|^2 (|u_{j+1}| + |u_{j-1}|)^2 |u_{jx}|^2 h \\
& \leq \frac{\gamma_r}{2} \|u_{x\bar{x}}\|^2 + C(\|u_x\|^2 + \|u_x\|^4).
\end{aligned} \tag{14.28}$$

将(14.24)–(14.28)代入(14.23)可得(14.21):



$$\frac{d}{dt} \|u_x\|^2 + \gamma_r \|u_{x\bar{x}}\|^2 \leq E_1(1 + \|u_x\|^2)^2.$$

**引理 14.6** (一致 Gronwall 引理[2]) 设  $g, h, y$  为三个正的局部可积函数于  $[t_0, \infty)$ , 使得  $y'$  在  $[t_0, \infty)$  局部可积, 它满足

$$\frac{dy}{dt} \leq gy + h, t \geq t_0,$$

$$\int_t^{t+r} g(s)ds \leq a_1, \int_t^{t+r} h(s)ds \leq a_2, \int_t^{t+r} y(s)ds \leq a_3, t \geq t_0,$$

其中  $r, a_1, a_2, a_3$  为正常数, 则有

$$y(t+r) \leq \left(\frac{a_3}{r} + a_2\right) \exp(a_1), \forall t \geq t_0. \quad (14.29)$$

**引理 14.7** 在引理 14.3 条件下, 设  $\|u_{0x}\|^2 \leq R, R > 0$ , 则对离散方程组(14.6), (14.8), (14.9) 的解有

$$\|u(t)\|^2 + \|u_x(t)\|^2 \leq E_2, \quad (14.30)$$

$$\int_t^{t+r} \|u_{x\bar{x}}(t)\|^2 dt \leq E'_2, \forall r > 0, \quad (14.31)$$

其中常数  $E_2, E'_2$  不依赖离散函数  $u$  和步长  $h$ .

**证** 由引理 14.4 和(14.21) 我们有

$$\frac{d}{dt} \|u_x\|^2 \leq E_1(1 + \|u_x\|^2)^2 \leq 2E_1(1 + \|u_x\|^4). \quad (14.32)$$

由不等式(14.15),  $\int_t^{t+1} \|u_x\|^2 dt \leq a_1, \forall t \geq 1$ . 应用引理 14.5,

令  $g = y = 2E_1 \|u_x\|^2, h = c$ , 因此

$$\|u_x(t+1)\|^2 \leq (a_1 + c) \exp a_1, t \geq 1. \quad (14.33)$$

当  $0 < t < 1$  时, 由(14.31) 和一致 Gronwall 引理, 我们有

$$\|u_x(t)\|^2 \leq ce^{\int_0^t \|u_x(s)\|^2 ds} \leq c_1, 0 \leq t \leq 2. \quad (14.34)$$

因此, 从(14.32), (14.33) 和引理 14.3 可得(14.30), 推出(14.31).

**引理 14.8** 在引理 14.7 条件下, 设  $\|u_{0x\bar{x}}\|^2 \leq R, R > 0$ , 则离散方程组(14.6), (14.8), (14.9) 的解有

$$\|u(t)\|^2 + \|u_x(t)\|^2 + \|u_{xx}(t)\|^2 \leq E_3, \quad (14.35)$$

其中常数  $E_3$  与离散函数  $u$  和步长  $h$  无关.

证 首先建立不等式

$$\frac{d}{dt} \|u_{x\bar{x}}(t)\|^2 + \gamma_r \|u_{x\bar{x}x}\|^2 \leq C(1 + \|u_{x\bar{x}}(t)\|^4), \quad (14.36)$$

事实上, 作(14.6) 和  $u_{x\bar{x}x}$  的内积, 利用分部积分再取实部得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_{x\bar{x}}\|^2 + \gamma_r \|u_{x\bar{x}x}\|^2 = \chi \|u_{x\bar{x}}\|^2 \\ & - \operatorname{Re} \left[ (\beta_r + i\beta_i) \sum_{j=1}^J |u_j|^2 u_j \bar{u}_{jx\bar{x}x} h \right] \\ & - \operatorname{Re} \left[ (\delta_r + i\delta_i) \sum_{j=1}^J |u_j|^4 u_j \bar{u}_{jx\bar{x}x} h \right] \\ & - \operatorname{Re} \left[ (\mu_r + i\mu_i) \sum_{j=1}^J Q(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}) \bar{u}_{jx\bar{x}x} h \right]. \quad (14.37) \end{aligned}$$

由引理 14.2, 可得

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^J |u_j|^2 u_j \bar{u}_{jx\bar{x}x} h = \sum_{j=1}^J (|u_j|^2 u_j)_{x\bar{x}} \bar{u}_{jx\bar{x}} h \\ & = \sum_{j=1}^J [|u_j|^2 u_{j+1} + (u_j)^2 u_{jx}]_x \bar{u}_{jx\bar{x}} h \\ & = \sum_{j=1}^J [(|u_j|^2 u_j)_{x\bar{x}} + u_{j\bar{x}} (|u_j|^2)_x \\ & + (|u_j|^2)_{x\bar{x}} u_{jx} + |u_j|^2 u_{jx\bar{x}}] \cdot \bar{u}_{jx\bar{x}} h. \end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^J |u_j|^4 u_j \bar{u}_{jx\bar{x}x} h = \sum_{j=1}^J [(|u_j|^4)_{x\bar{x}} u_j + u_{j\bar{x}} (|u_j|^4)_x \\ & + (|u_j|^4)_{x\bar{x}} u_{jx} + |u_j|^4 u_{jx\bar{x}}] \bar{u}_{jx\bar{x}} h, \\ & \left| \sum_{j=1}^J P(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}) \bar{u}_{jx\bar{x}x} h \right| \leq \frac{1}{2} \left| \sum_{j=1}^J (\bar{u}_j (u_j^2)_{\hat{x}})_x \bar{u}_{jx\bar{x}} h \right| \\ & \leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J |u_{j+1} (u_j^2)_{\hat{x}x} + \bar{u}_{jx} (u_j^2)_{\hat{x}}| |\bar{u}_{jx\bar{x}}| h \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\gamma_r}{3} \|u_{jx\bar{x}\bar{x}}\|^2 + c \|u_{jx\bar{x}}\|^2, \quad (14.38)$$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^J Q(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}) \bar{u}_{jx\bar{x}\bar{x}} h \right| &\leq \left| \sum_{j=1}^J \left[ u_j (|u_j|^2)_{\hat{x}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \bar{u}_j (u_j^2)_{\hat{x}} \right] \cdot u_{jx\bar{x}} h \right| \leq \frac{\gamma_r}{3} \|u_{jx\bar{x}}\|^2 + c \|u_{jx\bar{x}}\|^2, \end{aligned} \quad (14.39)$$

这里  $\|u_{x\bar{x}}\| = \|u_{\bar{x}x}\| = \|u_{xx}\|$  (周期情况). 因此从(14.37), (14.38), (14.39) 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_{xx}\|^2 + \gamma_r \|u_{x\bar{x}}\|^2 &\leq \chi \|u_{x\bar{x}}\|^2 + c \sum_{j=1}^J [(|u_j|^2)_{x\bar{x}} u_j \\ &\quad + u_{j\bar{x}} (|u_j|^2)_x + (|u_j|^2)_{\bar{x}} + |u_j|^2 u_{jx\bar{x}}] \bar{u}_{jx\bar{x}} h \\ &\quad + c \sum_{j=1}^J [(|u_j|^4)_{x\bar{x}} u_j + u_{j\bar{x}} (|u_j|^4)_x + (|u_j|^4)_{\bar{x}} u_{jx} \\ &\quad + |u_j|^4 u_{jx\bar{x}}] \cdot u_{jx\bar{x}} h + \frac{2}{3} \gamma_r \|u_{x\bar{x}}\|^2 + c \|u_{x\bar{x}}\|^2. \end{aligned} \quad (14.40)$$

$$\begin{aligned} \text{由引理 14.1, } \|u_x\|_\infty &\leq c (\|u_x\|^2 + \|u_{xx}\|^2)^{\frac{1}{2}} \|u_x\|^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c (1 + \|u_{xx}\|^2)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

且  $\|u\|_\infty \leq c$ , 我们有

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^J [(|u_j|^2)_{x\bar{x}} u_j + u_{j\bar{x}} (|u_j|^2)_x \\ &\quad + (|u_j|^2)_x u_{j\bar{x}} + |u_j|^2 |u_{jx\bar{x}}|] \bar{u}_{jx\bar{x}} h \\ &\leq c \sum_{j=1}^J [|u_{jx\bar{x}}| (|u_j|^2 + |u_j| |u_{j-1}| + |u_j| |u_{j+1}|) \\ &\quad + (|u_{jx}|^2 + |u_{j\bar{x}}|^2 + |u_{jx}| |u_{j\bar{x}}|) |u_j|] |u_{jx\bar{x}}| h \\ &\leq c (1 + \|u_{x\bar{x}}\|^2 + \|u_{x\bar{x}}\|^4), \quad (14.41) \\ &\sum_{j=1}^J [(|u_j|^4)_{x\bar{x}} u_j + u_{j\bar{x}} (|u_j|^4)_x \\ &\quad + (|u_j|^4)_x u_{j\bar{x}} + |u_j|^4 u_{jx\bar{x}}] \bar{u}_{jx\bar{x}} h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq c \sum_{j=1}^J [ \|u_{j,\bar{x}}\| + (\|u_j\| + \|u_{j+1}\| \\
&\quad + \|u_{j-1}\|)^4 + \|u_j\|^3 (\|u_{j,\bar{x}}\| + \|u_{j,\bar{x}}\|)^2 + \|u_{j,\bar{x}}\| h \\
&\leq c(1 + \|u_{1,\bar{x}}\| + \|u_{J,\bar{x}}\|)^4. \quad (14.42)
\end{aligned}$$

将(14.41), (14.42) 代入(14.40) 可得(14.36)

$$\frac{d}{dt} \|u_{,\bar{x}}\|^2 + \gamma_r \|u_{,\bar{x}r}\|^2 \leq E_2(1 + \|u_{,\bar{x}}\|^4), \quad (14.43)$$

其中  $E_2$  为绝对常数, 则从引理 14.6, 不等式(14.31) 和一致 Gronwall 引理, 可得(14.35).

现证离散整体吸引子的存在性及作其维数估计.

**定理 14.9** 设  $\gamma_r > 0, \delta_r > 0, \chi > 0$  和  $4\gamma_r\delta_r > (\lambda_i - \mu_i)^2$ ,

则对任何初值在  $C^J$  中,  $C^J = C \times \overbrace{C \times \cdots \times C}^{J \text{ 次}}$ ,  $C$  为复系数集合, 离散方程组(14.6), (14.8), (14.9) 的解整体存在. 进一步, 如初值  $u_0$  满足

$$\|u_0\| \leq R_0, R_0 > 0, \quad (14.44)$$

则对  $\Gamma'_0 > \Gamma_0 = \frac{P^2}{2\chi}$ , (14.6) 的解  $u(t)$  具  $u(0) = u_0$  满足

$$\|u(t)\| \leq \Gamma'_0, \forall t \geq T_0 = \frac{1}{2\chi} \log \frac{R_0^2}{(\Gamma'_0)^2 - \Gamma_0^2}. \quad (14.45)$$

证 不等式(14.14) 推出(14.15).

**定理 14.10** 在定理 14.9 条件下, 存在半流(4.6) 关于模  $\|\cdot\|$  的整体吸引子. 这个吸引子位于  $B(0, \Gamma_0) \subset C^J$  中, 其中  $B(0, \Gamma_0)$  表示以  $O \in C^J$  为中心,  $\Gamma_0$  为半径的球.

**定理 14.11** 设定理 14.9 的条件下, 初值  $u_0$  满足

$$\|u_0\|_{H^1} \leq R_0, \quad R_0 > 0, \quad (14.46)$$

则对  $\Gamma'_1 > \Gamma_1 = (a_1 + 2E_1)^{\frac{1}{2}}(\exp a_1)^{\frac{1}{2}}, a_1 = \frac{1}{2}[P^2 + (2\chi + 1)\Gamma_0^2]$  离散方程组(14.6), (14.8), (14.9) 的解  $u = u(t)$  满足

$$\|u(t)\|_{H^1} \leq \Gamma'_1, \forall t \geq \Gamma_1 = \max \Gamma_0, 2\}. \quad (14.47)$$

半流(14.6) 在模  $\|\cdot\|_{H^1}$  下具有整体吸引子, 这个吸引子位于

$B(0, \Gamma_1) \in C^J$  中, 其中  $B(0, \Gamma_1)$  为以  $0 \in C^J$  为中心,  $\Gamma_1$  为半径的球.

证 从不等式(14.20) 有

$$\begin{aligned} & \|u(t+1)\|^2 - \|u(t)\|^2 + 2\chi \int_t^{t+1} \|u(t)\|^2 dt \\ & + \alpha \int_t^{t+1} \|u_x(t)\|^2 dt \leq P^2. \end{aligned} \quad (14.48)$$

由定理 14.9,

$$\|u(t)\| \leq \Gamma_0, \forall t \geq \Gamma_0, \quad (14.49)$$

因此  $\int_t^{t+1} \|u_x(t)\|^2 dt \leq a_1 = \frac{1}{\alpha} [P^2 + (2\chi + 1)\Gamma_0^2]$ . 从(14.33) 有

$$\|u_x(t+1)\| \leq \Gamma_1 = (a + 2E_1)^{\frac{1}{2}} (\exp a_1)^{\frac{1}{2}}, \forall t \geq 1, \quad (14.50)$$

因此不等式(14.47) 成立, 定理得证.

类似地, 从(14.21), (14.43) 和一致 Gronwall 不等式可得

**定理 14.12** 设定理 14.9 条件满足, 且初值  $u_0$  满足

$$\|u_0\|_{H^2} \leq R_0, \quad R_0 > 0, \quad (14.51)$$

则对  $\Gamma'_0 > \Gamma_2 = (a_2 + 2E_2) \ln a_n, a_2 = \frac{\Gamma_1^2 + 2E_1(1 + \Gamma_1^4)}{\gamma_r}$ , 离散方程组(14.6), (14.8), (14.9) 的解  $u(t)$  满足

$$\|u(t)\|_{H^2} \leq \Gamma_2, \forall t \geq \Gamma_2 \geq \Gamma_1. \quad (14.52)$$

半流(14.6) 依  $\|\cdot\|_{H^2}$  具有整体吸引子. 这个吸引子位于  $B(0, \Gamma_2) \in C^J$  中, 这里  $B(0, \Gamma_2)$  表示以  $0 \in C^J$  为中心,  $\Gamma_2$  为半径的球.

现来估计整体吸引子的维数.

考虑(14.6) 的线性化方程

$$\begin{aligned} i\partial_t + v\partial_x &= \chi v + (\gamma_r + i\gamma_i)v_{\bar{x}} - (\beta_r + i\beta_i)(3|u|^2v + u^2\bar{v}) \\ &- (\delta_r + i\delta_i)(3|u|^4v + 2|u|^2u^2\bar{v}) \\ &- (\lambda_r + i\lambda_i)\left[\frac{1}{2}\bar{v}(u^2)_{\bar{x}} + \frac{1}{2}v(u^2)_{\bar{x}} + (uv)_{\bar{x}}\bar{u}\right] \end{aligned}$$

$$-(\mu_r + i\mu_i) \left[ \|u\|_x^2 v - \frac{1}{2}(u^2)_x \bar{v} + (v\bar{u} + u\bar{v})_x u - (uv)_x \bar{u} \right], \quad (14.53)$$

$$v(0) = v_0 \in C^J, \quad (14.54)$$

其中  $u = S(t)u_0$  为问题(14.6), (14.8), (14.9) 的解. 令

$$Q(t)v_0 = Q(t; u_0, v_0) = v(t), \quad (14.55)$$

由半流(14.53) 在  $C^J$  所确定.

由标准的方法, 能证  $Q(t)$  实际上为  $S(t)$  在点  $u_0 \in C^J$  上的切映照, 事实上有

**命题 14.13** 对任何  $t \in R$ ,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{\substack{u_0, u_1 \in \mathcal{A} \\ 0 < \|u_0 - u_1\| < \epsilon}} \frac{\|S(t)u_0 - S(t)u_1 - Q(t; u_0)(u_0 - u_1)\|}{\|u_0 - u_1\|} = 0, \quad (14.56)$$

$$\sup_{u_0 \in \mathcal{A}} \|Q(t; u_0)\|_{0p} < \infty. \quad (14.57)$$

对任何  $l \in \mathbb{N}$ , 令  $v^{(j)}(t)$  表示(14.54) 具初值  $v^{(j)}(0) = \xi^{(j)} \in H^0$  的解. 则由已知方法<sup>[2]</sup> 给出

$$\begin{aligned} & \|v^{(1)}(t) \wedge v^{(2)}(t) \wedge \cdots \wedge v^{(l)}(t)\|_{\wedge^l H^1} \\ &= \|\xi^{(1)} \wedge \xi^{(2)} \wedge \cdots \wedge \xi^{(l)}\|_{\wedge^l H^1} \exp\left(\int_0^t \text{ReTr}(F'(u(\tau))Q_l(\tau))d\tau\right), \end{aligned} \quad (14.58)$$

其中我们已写(14.53) 具形式

$$v_t = F'(u)v, \quad (14.59)$$

这里  $Q_h(\tau)$  表示  $H^1$  正交投影于  $v^{(1)}(\tau), v^{(2)}(\tau), \dots, v^{(l)}(\tau)$  所张的子空间.

设  $\varphi^{(k)}(\tau) \in (k \in \mathbb{N})$  为正交基, 是矩阵  $A$ , 即(14.5) 的特征向量. 我们有

$$\begin{aligned} & \text{ReTr} F'(u(\tau)) \cdot Q_l(\tau) \\ &= \text{Re} \sum_{k=1}^{\infty} (F'(u(\tau)) \cdot Q_l(\tau) \varphi^{(k)}, \varphi^{(k)})_{H^1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{K=1}^l \operatorname{Re}(F'(u) \varphi^{(k)}, \varphi^{(k)})_{H^1} \\
&= \sum_{K=1}^l (\operatorname{Re}(F'(u) \varphi^{(k)}, \varphi^{(k)}) + \operatorname{Re}((F'(u) \varphi^{(k)})_x, \varphi_x^{(k)})),
\end{aligned} \tag{14.60}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(F'(u) \varphi^{(k)}, \varphi^{(k)}) &= \chi \| \varphi^{(k)} \|^2 - \gamma_r \| \varphi^{(k)} \|^2 \\
&\quad - \operatorname{Re}(\beta_r + i\beta_i)(2 \| u \|^2 \varphi^{(k)} + u^2 \overline{\varphi^{(k)}}), \varphi^{(k)}) - \operatorname{Re}(\delta_r + i\delta_i) \\
&\quad \cdot (3 \| u \|^4 \varphi^{(k)} + 2 \| u \|^2 \cdot u^2 \overline{\varphi^{(k)}}), \overline{\varphi^{(k)}}) \\
&\quad - \operatorname{Re}(\mu_r + i\mu_i)(\| u \|^2_x \varphi^{(k)} - \frac{1}{2}(u^2)_x \overline{\varphi^{(k)}} + (\varphi^{(k)} \overline{u} + u \overline{\varphi^{(k)}})_x u \\
&\quad - (u \varphi^{(k)})_x \overline{u}, \varphi^{(k)}) \leq \chi \| \varphi^{(k)} \|^2 - \gamma_r \| \varphi_x^{(k)} \|^2 \\
&\quad - 2\beta_r \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^J \| u_j \|^2 \| \varphi_j^{(k)} \|^2 h + \sqrt{\beta_r^2 + \beta_i^2} \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^J \| u_j \|^2 \\
&\quad \cdot \| \varphi_j^{(k)} \|^2 h + (2\sqrt{\delta_r^2 + \delta_i^2} - 3\delta_i) \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^J \| u_j \|^4 \| \varphi_j^{(k)} \|^2 h \\
&\quad - \operatorname{Re}(\lambda_r + i\lambda_i) \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^J [(u_{j+1} u_{j\hat{x}} (\overline{\varphi_j^{(k)}})^2 + u_{j+1} \varphi_{j\hat{x}}^{(k)} \overline{u_j} \overline{\varphi_j^{(k)}} \\
&\quad + u_{j\hat{x}} \varphi_{j-1}^{(k)} \overline{u_j} \overline{\varphi_j^{(k)}})] h - \operatorname{Re}(\mu_r + i\mu_i) \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^J [2u_{j+1} u_{j\hat{x}} \| \varphi_j^{(k)} \|^2 \\
&\quad - u_{j+1} u_{j\hat{x}} (\overline{\varphi_j^{(k)}})^2 + (\overline{u_{j+1}} \varphi_{j\hat{x}}^{(k)} + \overline{u_{j\hat{x}}} \varphi_{j-1}^{(k)}) \overline{\varphi_j^{(k)}} u_j + (u_{j+1} \overline{\varphi_{j\hat{x}}^{(k)}} \\
&\quad + u_{j\hat{x}} \overline{\varphi_{j-1}^{(k)}}) \overline{\varphi_j^{(k)}} u_j - (u_{j+1} \varphi_{j\hat{x}}^{(k)} + u_{j\hat{x}} \varphi_{j-1}^{(k)}) \overline{u_j} \overline{\varphi_j^{(k)}}] h, \tag{14.61}
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^J \| u_j \|^2 \| \varphi_j^{(k)} \|^2 h \leq \| u \|_\infty^2 \| \varphi^{(k)} \|^2, \\
&\sum_{j=1}^J \| u_j \|^4 \| \varphi_j^{(k)} \|^2 h \leq \| u \|_\infty^4 \| \varphi^{(k)} \|^2, \\
&\sum_{j=1}^J [u_{j+1} u_{j\hat{x}} (\overline{\varphi_j^{(k)}})^2 + u_{j+1} \overline{u_j} \varphi_{j\hat{x}}^{(k)} \overline{\varphi_j^{(k)}} + \overline{u_j} u_{j\hat{x}} \varphi_{j-1}^{(k)} \overline{\varphi_j^{(k)}}] h \\
&\leq 2 \| u \|_\infty \| u_{\hat{x}} \| \| \varphi^{(k)} \|^2_4 \\
&\quad + \| u \|_\infty^2 \left( \epsilon_1 \| \varphi_x^{(k)} \|^2 + \frac{1}{4\epsilon_1} \| \varphi^{(k)} \|^2 \right),
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_1 > 0.$$

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^J u_{j+1} u_{j\hat{x}} | \varphi_j^{(k)} |^2 h \right| + \left| \sum_{j=1}^J u_{j+1} u_{j\hat{x}} (\overline{\varphi_j^{(k)}})^2 h \right| \\ & \leq 2 \|u\|_\infty \|u_{\hat{x}}\| \|\varphi^{(k)}\|_4^2, \\ & \left| \sum_{j=1}^J [(\overline{u_{j+1}} \varphi_{j\hat{x}}^{(k)} + \overline{u_{j\hat{x}}} \varphi_j^{(k)}) \overline{\varphi_j^{(k)}} u_j + (u_{j+1} \overline{\varphi_{j\hat{x}}^{(k)}} + u_{j\hat{x}} \overline{\varphi_{j-1}^{(k)}}) \overline{\varphi_j^{(k)}} u_j \right. \\ & \quad \left. - (u_{j+1} \varphi_{j\hat{x}}^{(k)} + u_{j\hat{x}} \varphi_j^{(k)}) \overline{u_j} \overline{\varphi_j^{(k)}}] h \right| \\ & \leq 3 \left[ \|u\|_\infty^2 \left( \varepsilon_2 \|\varphi_x^{(k)}\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_2} \|\varphi^{(k)}\|^2 \right) \right. \\ & \quad \left. + \|u\|_\infty \|u_{\hat{x}}\| \|\varphi^{(k)}\|_4^2 \right], \varepsilon_2 > 0. \end{aligned}$$

再由引理 14.1,

$$\begin{aligned} \|\varphi^{(k)}\|_4^2 & \leq C_1 (\|\varphi^{(k)}\| + \|\varphi_x^{(k)}\|)^{\frac{1}{2}} \|\varphi^{(k)}\|^{\frac{3}{2}} \\ & \leq C_1 \|\varphi^{(k)}\|^2 + \varepsilon_3 \|\varphi_x^{(k)}\|^2, \quad \varepsilon_3 > 0. \end{aligned}$$

$$\|u\|_\infty \leq C (\|u\| + \|u_x\|)^{\frac{1}{2}} \|u\|^{\frac{1}{2}} \leq C \|u\|^{\frac{1}{2}}_{H^1}.$$

因此从(14.61)有

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(F'(u) \varphi^{(k)}, \varphi^{(k)}) & \leq \chi \|\varphi^{(k)}\|^2 - \gamma_r \|\varphi_x^{(k)}\|^2 \\ & \quad + \sqrt{\beta_r^2 + \beta_i^2} \|u\|_\infty^2 \|\varphi^{(k)}\|^2 + 2\sqrt{\delta_r^2 + \delta_i^2} \\ & \quad - 3\delta_i \|u\|_\infty^4 \|\varphi^{(k)}\|^2 + \sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2} [2\|u\|_\infty \|u_{\hat{x}}\| \\ & \quad \cdot (C_1 \|\varphi^{(k)}\|^2 + \varepsilon_3 \|\varphi^{(k)}\|^2) + \|u\|_\infty^2 (\varepsilon_1 \|\varphi_x^{(k)}\|^2 \\ & \quad + \frac{1}{4\varepsilon_1} \|\varphi^{(k)}\|^2)] + \sqrt{\mu_r^2 + \mu_i^2} [2\|u\|_\infty \|u_{\hat{x}}\| (C_1 \|\varphi^{(k)}\|^2 \\ & \quad + \varepsilon_3 \|\varphi_x^{(k)}\|^2) + 3\|u\|_\infty^2 (\varepsilon_2 \|\varphi_x^{(k)}\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_2} \|\varphi^{(k)}\|^2) \\ & \quad + 3\|u\|_\infty \|u_{\hat{x}}\| (C_1 \|\varphi^{(k)}\|^2 + \varepsilon_3 \|\varphi_x^{(k)}\|^2)] \leq -[\gamma_r \\ & \quad - \sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2} (2\varepsilon_3 \|u\|_\infty \|u_{\hat{x}}\| + \varepsilon_1 \|u\|_\infty^2) - \sqrt{\mu_r^2 + \mu_i^2} \\ & \quad \cdot (2\varepsilon_3 \|u\|_\infty \|u_{\hat{x}}\| + 3\varepsilon_2 \|u\|_\infty^2 + 3\varepsilon_3 \|u\|_\infty \|u_{\hat{x}}\|)] \\ & \quad \cdot \|\varphi_r^{(k)}\|^2 + k_2 (\|u\|_{H^1} + \|u\|_{H^1}^2 + 1) \|\varphi^{(k)}\|^2. \end{aligned}$$

(14.62)



由于  $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$  和  $\varepsilon_3$  充分小, 故可得

$$\operatorname{Re}(F'(u)\varphi^{(k)}, \varphi^{(k)}) \leq -\frac{\gamma_r}{2} \|\varphi^{(k)}\|^2 + k_3(\|u\|_{H^1} + \|u\|_{H^1}^2) \|\varphi^{(k)}\|^2, \quad (14.63)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}((F'(u)\varphi^{(k)})_x, \varphi_x^{(k)}) = & \chi \|\varphi_x^{(k)}\|^2 - \delta \|\varphi_{xx}^{(k)}\|^2 \\ & - \operatorname{Re}(\beta_r + i\beta_i)((3\|u\|^2\varphi^{(k)} + u^2\overline{\varphi^{(k)}})_x, \varphi_x^{(k)}) \\ & - \operatorname{Re}(\delta_r + i\delta_i)((3\|u\|^4\varphi^{(k)} + 2\|u\|u^2\overline{\varphi^{(k)}})_x, \varphi_x^{(k)}) \\ & - \operatorname{Re}(\lambda_r + i\lambda_i)\left(\frac{1}{2}(\overline{\varphi^{(k)}}(u^2)_{\hat{x}})_x + ((u\varphi^{(k)})_{\hat{x}}u)_x, \varphi_x^{(k)}\right) \\ & - \operatorname{Re}(\mu_r + i\mu_i)((\|u\|^2\varphi^{(k)})_{\hat{x}} - \frac{1}{2}((u^2)_{\hat{x}}\overline{\varphi^{(k)}})_x \\ & - ((\varphi^k\overline{u} + u\overline{\varphi^{(k)}})_{\hat{x}}u)_x - ((u\varphi^{(k)})_{\hat{x}}\overline{u})_x, \varphi_x^{(k)}), \quad (14.64) \end{aligned}$$

其中  $(3\|u_j\|^2\varphi_j^{(k)} + u_j^2\overline{\varphi_j^{(k)}})_x = 3\|u_{j+1}\|^2\varphi_{jx}^{(k)} + 3\|u_j\|_{xx}^2\varphi_j^{(k)} + u_{j+1}^2 + \overline{\varphi_{jx}^{(k)}} + (u_j^2)_x\overline{\varphi_j^{(k)}}$ ,

$$\begin{aligned} (3\|u_j\|^4\varphi_j^{(k)} + 2\|u_j\|^2u_j^2\overline{\varphi_j^{(k)}})_x = & 3\|u_{j+1}\|^4\varphi_{jx}^{(k)} \\ & + 3\|u_j\|_{xx}^4\varphi_j^{(k)} + 2\|u_{j+1}\|^2u_{j+1}^2\overline{\varphi_{jx}^{(k)}} + 2(\|u_j\|^2u_j^2)_x\overline{\varphi_j^{(k)}}, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}[(\overline{\varphi_j^{(k)}}u_j^2)_{\hat{x}}]_x = \frac{1}{2}[\overline{\varphi_{j+1}^{(k)}}(u_j^2)_{\hat{x}} + \overline{\varphi_{jx}^{(k)}}(u_j^2)_{\hat{x}}],$$

$$[(u_j\varphi_j^{(k)})_{\hat{x}}\overline{u_j}]_x = (u_{j+1}\varphi_{j+1}^{(k)})_{\hat{x}}\overline{u_{jx}} + (u_j\varphi_j^{(k)})_{\hat{x}x}\overline{u_j},$$

$$[\|u_j\|_{xx}^2\varphi_j^{(k)}]_x = \|u_{j+1}\|_{xx}^2\varphi_{jx}^{(k)} + \|u_j\|_{xx}^2\varphi_j^{(k)},$$

$$\frac{1}{2}[(u_j^2)_{\hat{x}}\overline{\varphi_j^{(k)}}]_x = \frac{1}{2}(u_{j+1}^2)_{\hat{x}}\overline{\varphi_{jx}^{(k)}} + \|u_j\|_{xx}^2\varphi_j^{(k)},$$

$$\begin{aligned} [(\varphi_j^{(k)}\overline{u_j} + u_j\overline{\varphi_j^{(k)}})_{\hat{x}}u_j]_x = & (\varphi_{j+1}^{(k)}\overline{u_{j+1}} + u_{j+1}\overline{\varphi_{j+1}^{(k)}})_{\hat{x}}u_{jx} \\ & + (\varphi_j^{(k)}\overline{u_j} + u_j\overline{\varphi_j^{(k)}})_{\hat{x}x}u_j, \end{aligned}$$

$$[(u_j\varphi_j^{(k)})_{\hat{x}}\overline{u_j}]_x = (u_{j+1}\varphi_{j+1}^{(k)})_{\hat{x}}\overline{u_{jx}} + (u_j\varphi_j^{(k)})_{\hat{x}x}\overline{u_j},$$

$$\|u_j\|_x^4 = (\|u_{j+1}\|^2 + \|u_j\|^2)\|u_j\|_x^2$$

$$= (\|u_{j+1}\|^2 + \|u_j\|^2)(u_{j+1}u_{jx} + u_{jx}\overline{u_j}),$$

$$(u_j\varphi_j^{(k)})_{\hat{x}x} = (u_{j+1}\varphi_{jx}^{(k)} + u_{jx}\varphi_{j-1}^{(k)})_x$$

$$= u_{j+2}\varphi_{jxx}^{(k)} + u_{jx}\varphi_{jxx}^{(k)} + u_{j+1}\varphi_{j-1x}^{(k)} + u_{jxx}\varphi_{j-1}^{(k)},$$

$$|\operatorname{Re}(\beta_r + i\beta_i)((3\|u\|^2\varphi^{(k)} + u^2\overline{\varphi^{(k)}})_x, \varphi_x^{(k)})|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sqrt{\beta_r^2 + \beta_i^2} [4 \|u\|_\infty^2 \|\varphi_x^{(k)}\|^2 + 3 \|u\|_\infty \|u_x\|_\infty (\|\varphi^{(k)}\|^2 + \|\varphi_x^{(k)}\|^2)], \\
&+ |\operatorname{Re}(\delta_r + i\delta_i)((3 \|u\|_\infty^4 \varphi^{(k)} + 2u \|u\|_\infty^2 \varphi^{(k)})_x, \varphi^{(k)})| \\
&\leq \sqrt{\delta_r^2 + \delta_i^2} [5 \|u\|_\infty^4 \|\varphi_x^{(k)}\|^2 + 20 \|u\|_\infty^3 (\|u_x\|^2 + \|\varphi_x^{(k)}\|^2)], \\
&\left| \operatorname{Re}(\lambda_r + i\lambda_i) \left( \left( \frac{1}{2} \varphi^{(k)} (u^2)_{\hat{x}} \right)_x + ((u\varphi^{(k)})_{\hat{x}} \bar{u})_x, \varphi_x^{(k)} \right) \right| \\
&\leq \sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2} [(\|u\|_\infty \|u_{x\hat{x}}\| + \|u\|_\infty^2)(\|\varphi^{(k)}\|^2 + \|\varphi_x^{(k)}\|^2) \\
&\quad + 3 \|u\|_\infty \|u_{\hat{x}}\|_\infty \|\varphi_x^{(k)}\|^2 + \|u\|_\infty^2 \|\varphi_x^{(k)}\| \|\varphi_{xx}^{(k)}\|] \\
&\leq \sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2} [(\|u\|_\infty \|u_{x\hat{x}}\| + 3 \|u\|_\infty \|u_{\hat{x}}\|_\infty + \frac{1}{4\epsilon_4} \|u\|_\infty^2) \\
&\quad \cdot \|\varphi_x^{(k)}\|^2 + \epsilon_4 \|u\|^2 \|\varphi_{xx}^{(k)}\|^2], \epsilon_4 > 0, \\
&+ |\operatorname{Re}(\mu_r + i\mu_i)((\|u\|_\infty^2 \varphi^{(k)})_x - \frac{1}{2}((u^2)_{\hat{x}} \bar{\varphi}^{(k)})_x \\
&\quad - ((\varphi^{(k)} \bar{u} + u \bar{\varphi}^{(k)})_{\hat{x}} u)_x - ((u\varphi^{(k)})_{\hat{x}} \bar{u})_x, \varphi_x^{(k)})| \\
&\leq \sqrt{\mu_r^2 + \mu_i^2} [3 \|u\|_\infty \|u_{\hat{x}}\| \|\varphi_x^{(k)}\|^2 + \frac{3}{2} (\|u\|_\infty \|u_{x\hat{x}}\| + \|u_x\|_\infty^2) \\
&\quad \cdot (\|\varphi^{(k)}\|^2 + \|\varphi_x^{(k)}\|^2) + 2 \|u\|_\infty \|u_x\|_\infty \|\varphi_x^{(k)}\|^2 + \|u_x\|_\infty^2 \\
&\quad \cdot (\|\varphi^{(k)}\|^2 + \|\varphi_x^{(k)}\|^2) + 2 \|u\|_\infty (\epsilon_5 \|\varphi_{xx}^{(k)}\|^2 \\
&\quad + \frac{1}{4\epsilon_5} \|\varphi^{(k)}\|^2) + 4 \|u\|_\infty \cdot \|u_{\hat{x}}\|_\infty \|\varphi_x^{(k)}\|^2 \\
&\quad + \|u\|_\infty \|u_{x\hat{x}}\| (\|\varphi^{(k)}\|^2 + \|\varphi_x^{(k)}\|^2)] \\
&\leq \sqrt{\mu_r^2 + \mu_i^2} \left\{ \left[ 9 \|u\|_\infty \|u_{\hat{x}}\| + \frac{5}{2} (\|u\|_\infty \|u_{x\hat{x}}\| + \|u_x\|_\infty^2) \right] \right. \\
&\quad \cdot \|\varphi_x^{(k)}\|^2 + 2\epsilon_5 \|u\|_\infty \|\varphi_{xx}^{(k)}\|^2 + \left[ \frac{5}{2} (\|u\|_\infty \|u_{x\hat{x}}\|_2 + \|u_x\|_\infty^2) \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2\epsilon_5} \|u\|_\infty^2 \right] \|\varphi^{(k)}\|^2 \right\}, \epsilon_5 > 0.
\end{aligned}$$

从(14.64)可得

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}((F'(u)\varphi^{(k)})_x, \varphi_x^{(k)}) \leq \chi \|\varphi_x^{(k)}\|^2 + \gamma_r \|\varphi_{xx}^{(k)}\|^2 \\
&\quad + \epsilon_4 \sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2} \|u\|_\infty^2 + 2\epsilon_5 \|u\|_\infty^2 \sqrt{\mu_r^2 + \mu_i^2} \|\varphi_{xx}^{(k)}\|^2 \\
&\quad + k_4 (\|u\|_\infty + \|u_x\| + \|u_x\|_\infty + \|u_{x\hat{x}}\|)
\end{aligned}$$

$$\cdot (\|\varphi^{(k)}\|^2 + \|\varphi_x^{(k)}\|^2).$$

于是当  $\varepsilon_4, \varepsilon_5$  充分小时, 有

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}((F'(u)\varphi^{(k)})_x, \varphi_x^{(k)}) &\leq -\frac{\gamma_r}{2} \|\varphi_{xx}^{(k)}\|^2 + k_5 \|u\|_{H^2} \\ &\cdot (\|\varphi^{(k)}\|^2 + \|\varphi_x^{(k)}\|^2). \end{aligned} \quad (14.65)$$

从(14.60), (14.63), (14.65) 可得

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^l \operatorname{Re}(F'(u)\varphi^{(k)}, \varphi^{(k)})_{H^1} \\ &\leq -\frac{\gamma_r}{2} \sum_{k=1}^l \|\varphi_{xx}^{(k)}\|^2 + k_6 \|u\|_{H^2} \sum_{k=1}^l (\|\varphi^{(k)}\|^2 + \|\varphi_x^{(k)}\|^2) \\ &\leq -\frac{\gamma_r}{2} \sum_{k=1}^l \lambda_k^2 + k_6 \|u\|_{H^2} (l + \sum_{k=1}^l \lambda_k), \end{aligned} \quad (14.66)$$

其中  $\lambda_k = J^2 4 \sin^2 \frac{k\pi}{J}$ ,  $k = 1, 2, \dots, [\frac{J}{2}]$  为矩阵  $A = J^2 A_1$  的重特征值. 由于  $\frac{\sin x}{x} \geq \frac{2}{\pi}$ ,  $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ , 由(14.66) 可得

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^l \operatorname{Re}(F'(u)\varphi^{(k)}, \varphi^{(k)})_{H^1} \leq -\frac{\gamma_r}{2} J^4 \left(\frac{2}{\pi}\right)^4 \sum_{k=1}^{[\frac{J}{2}]} \left(\frac{k\pi}{J}\right)^4 \\ &+ k_6 \|u\|_{H^2} \cdot 2l \leq -64\gamma_r \sum_{k=1}^{[\frac{J}{2}]} k^4 + 2lk_6 \sqrt{E_3} \leq -64\gamma_r \\ &\cdot \frac{1}{6} \left(\frac{J}{2} - 1\right)^5 + 2lk_6 \sqrt{E_3} \leq -\frac{\gamma_r}{3} \left(\left(\frac{l}{\theta_2}\right)^5 \right. \\ &\left. - 10\left(\frac{l}{\theta_2}\right)^4 + 40\left(\frac{l}{\theta_2}\right)^3 - 80\left(\frac{l}{\theta_2}\right)^2 + 80\left(\frac{l}{\theta_2}\right) - 32\right), \end{aligned}$$

其中  $\theta_1 J < l < \theta_2 J$ ,  $\theta_1, \theta_2 > 0$ . 因此如选取

$$l = l_0 = \left[ \frac{2k_6 \sqrt{E_3} \theta_2}{\gamma_r} + 12 \right] \theta_2, \quad (14.67)$$

则存在  $J_0 \geq l$ , 使得

$$q_J = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \inf_{u_0 \in \mathcal{J}_J} \frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{Re} \operatorname{Tr} F'(u(\tau)) \cdot \theta_J d\tau \right) < 0.$$

由[T]有

$$d_H(\cdot, \cdot) \leq J_0, d_F(\cdot, \cdot) \leq 2J_0, \quad (14.68)$$

其中  $d_H(\cdot, \cdot), d_F(\cdot, \cdot)$  为吸引子  $A_j$  的 Hausdorff 维数和分形维数, 于是有

**定理 14.14** 在定理 14.12 的条件下, 离散系统 (14.6), (14.8), (14.9) 的整体吸引子  $A_j$  的 Hausdorff 维数和分形维数是有限的, 即 (14.68) 成立.

## § 15 扰动的三次—五次非线性 Schrödinger 方程的稳定性准则

研究如下具扰动三次—五次非线性 Schrödinger 方程

$$iA_t = (1 + i\epsilon a)A_{xx} + i\epsilon bA + (1 + i\epsilon d_1)|A|^2A + (\alpha + i\epsilon d_2)|A|^4A, \quad (15.1)$$

其中  $0 < \epsilon \ll 1$ , 其他参数是实的, 且是  $O(1)$ .

(15.1) 的孤立子解为

$$A(x, t) = A(x)e^{-i\omega t}. \quad (15.2)$$

再寻求如下 ODE 的异宿和同宿解

$$(1 + i\epsilon a)A'' + (-\omega + i\epsilon b)A + (1 + i\epsilon d_1)|A|^2A + (\alpha + i\epsilon d_2)|A|^4A = 0. \quad (15.3)$$

对于 (15.3) 各种形式的解, 包括波前(细节), 光亮孤立波, 黑暗孤立波等已有许多研究, 对于光亮孤立波是存在的, 当 (15.3) 的解对于  $|A| = 0$  是同宿时, 当  $\epsilon = 0, \omega > 0$  时, 这个波可表示为

$$A^2(x) = \frac{4\omega}{1 + \sqrt{1 - \beta} \cosh(2\sqrt{\omega}x)}, \beta = -\frac{16}{3}\alpha\omega, \quad (15.4)$$

这里  $\alpha < 0, 0 \leq \beta < 1$ . 对  $\epsilon > 0$  解的解析表达式也存在. 这一节我们研究对一切  $\epsilon \geq 0$  光亮孤立波的存在性及稳定性.

我们有如下结果:

**定理 15.1** 设  $0 < \epsilon < 1, 0 \leq \beta < 1, d_1 = d_1^*$ .

$$d_1^* = \frac{i}{4}a - \Lambda_{24}b - \Lambda_{d_2}\left(d_2 - \frac{1}{3}aa\right) + O(\epsilon),$$

$$\Lambda_i = \int_{-\infty}^{\infty} A^i(x)dx, \Lambda_{24} = \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}, \Lambda_{d_2} = -\frac{\delta\omega}{\beta}\left(\omega\Lambda_{24} - \frac{3}{4}\right),$$

$$a > 0, d_2 - \frac{1}{3}aa < 0, b^* = -\frac{\partial \omega \Lambda_{d_2}}{\partial \omega \Lambda_{24}} \left( d_2 - \frac{1}{3}aa \right) < 0.$$

如  $0 > b^* > b$ , 则存在一个稳定的实特征值和一个不稳定的实特征值, 它们均为  $O(\epsilon)$ . 如  $0 > b > b^*$ , 则存在二个稳定的实特征值和零不稳定特征值, 它们均为  $O(\epsilon)$ . 更进一步, 除了在零处重特征值外, 别无其他特征值为  $O(\epsilon)$ .

**定理 15.2** 设定理 15.1 的假设满足,  $d_1^* = d_1^*(a, b, d_2, \omega^*)$ ,  $d_1^* = \frac{1}{4}a - \Lambda_{24}b - \Lambda_{d_2} \left( d_2 - \frac{1}{3}aa \right) + O(\epsilon)$ ,  $\Lambda_i = \int_{-\infty}^{\infty} A^i(x) dx$ ,  $\Lambda_{24} = \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}$ ,  $\Lambda_{d_2} = -\frac{8\omega}{\beta} \left( \omega \Lambda_{24} - \frac{3}{4} \right)$ , 对于任何  $N \geq 2$  存在一次无穷序列  $\{\omega_k^N\}$ , 有  $\lim_{k \rightarrow \infty} \omega_k^N = \omega^*$ , 使得当  $\omega = \omega_k^N$  存在 (15.3) 的  $N$  脉冲解, 如  $b < b^*$ ,  $b^* = -\frac{\partial \omega \Lambda_{d_2}}{\partial \omega \Lambda_{24}} \left( d_2 - \frac{1}{3}aa \right) < 0$ , 则  $N$  脉冲解是不稳定的, 存在至少  $N$  个不稳定特征值. 对于固定  $a_1, d_1, d_2$  的稳定性图形如图 15.1.

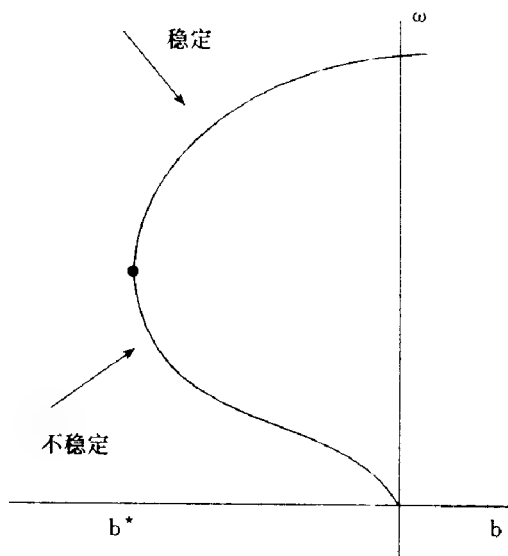


图 15.1

为了证明定理 15.1、定理 15.2, 我们必须做许多准备工作, 首

先分析 Evans 函数的结构.

作变换  $A \rightarrow Ae^{i\omega t}$ , (15.1) 写成行波坐标  $Z = x - ct$  可得

$$iA_t = (1 + i\epsilon a)A_{ZZ} + i\epsilon A_Z + (-\omega + i\epsilon b)A \\ + (1 + i\epsilon d_1)|A|^2A + (\alpha + i\epsilon d_2)|A|^4A, \quad (15.5)$$

其中  $A$  为变元  $(Z, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  的复值函数, 令  $A = A_1 + iA_2$ , 记  $A = (A_1, A_2)$ , (15.4) 变成方程组

$$JA_t = (I + \epsilon aJ)A_{ZZ} + CJA_Z + (-\omega I_2 + \epsilon bJ)A \\ + (I_2 + \epsilon d_1J)|A|^2A + (\alpha I_2 + \epsilon d_2J)|A|^4A, \quad (15.6)$$

这里  $I_2$  为  $2 \times 2$  恒等矩阵,  $J$  为反对称矩阵

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

上述方程组可写为

$$JA_t = BA_{ZZ} + CJA_Z + F(A, \omega, \epsilon), \quad (15.7)$$

其中

$$B = I_2 + \epsilon aJ, F(A, \omega, \epsilon) = (-\omega I_2 + \epsilon bJ)A \\ + (I_2 + \epsilon d_1J)|A|^2A + (\alpha I_2 + \epsilon d_2J)|A|^4A.$$

设  $\tilde{A}$  表示 (15.6) 的光亮孤立子解, 当  $c = 0$ , 已知它是存在的, 当  $\epsilon = 0$  时,  $\tilde{A} = (R_0, 0)^T$ , 这里

$$R_0^2(Z) = \frac{4\omega}{1 + \sqrt{1 - \beta \cosh(2\sqrt{\omega}Z)}}, \beta = -\frac{16}{3}\alpha\omega. \quad (15.8)$$

对波线性化, 可得特征方程

$$BA'' + DF_A(\tilde{A}, \omega, \epsilon)A = \lambda JA, \quad ' = \frac{d}{dZ}, \quad (15.9)$$

即  $-JLA = \lambda A$ , 这里

$$-JL = -J(B\partial_Z^2) + DF_A(\tilde{A}, \omega, \epsilon). \quad (15.10)$$

按惯例计算表明算子  $-JL$  的本质谱为

$$\sigma_e(-JL) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \\ = -\epsilon(a\eta^2 - b) \pm (\eta^2 + \omega)i, \eta \in \mathbb{R}\}. \quad (15.11)$$

因此, 对  $\epsilon > 0$ , 算子  $-JL$  是扇形的 ( $Q > 0$ ), 本质谱位于复平面的

左半平面( $b < 0$ ).

**假设 15.3** 参数  $a, b$  使得  $a > 0, b < 0$ . 令  $Y = (A, A')$ , 特征方程(15.9) 可写为一阶方程组

$$Y' = M(\lambda, Z)Y, \quad (15.12)$$

这里  $M$  为  $4 \times 4$  块矩阵:

$$M(\lambda, Z) = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ B^{-1}(\lambda J - DF_A)(\tilde{A}, \omega, \epsilon) & 0 \end{pmatrix}.$$

对  $\lambda \in \Omega = \mathbb{C} \setminus \sigma_\epsilon(L)$ , 存在复解析函数,  $Y_i^s(\lambda, Z)$  和  $Y_i^u(\lambda, Z)$ ,  $i = 1, 2$ , 它为(15.11) 的解满足

$$(1) \lim_{Z \rightarrow +\infty} \|Y_i^s(\lambda, Z)\| = 0, Y^s(\lambda, Z) = (Y_1^s \wedge Y_2^s)(\lambda, Z) \neq 0,$$

$$(2) \lim_{Z \rightarrow -\infty} \|Y_i^u(\lambda, Z)\| = 0, Y^u(\lambda, Z) = (Y_1^u \wedge Y_2^u)(\lambda, Z) \neq 0,$$

Evans 函数定义为

$$E(\lambda) = (Y_1^u \wedge Y_2^u \wedge Y_1^s \wedge Y_2^s)(\lambda, Z). \quad (15.13)$$

由 Abel 公式知  $E(\lambda)$  与  $Z$  无关. Evans 函数使得对  $\lambda \in \Omega$  它等于零当且仅当  $\lambda$  为一个特征值, 由于(15.1) 方程的不变性, (15.9) 的两个解当  $\lambda = 0$  时为  $A = \tilde{A}'$ ,  $A = J\tilde{A}$ . 置

$$(1) Y_1^s(0, Z) = Y_1^u(0, Z) = \tilde{U}', \quad (15.14)$$

$$(2) Y_2^s(0, Z) = Y_2^u(0, Z) = \tilde{V}_J, \quad (15.15)$$

其中

$$\tilde{U} = (\tilde{A}, \tilde{A}')^T, \tilde{V}_J = (J\tilde{A}, J\tilde{A}')^T. \quad (15.16)$$

如下引理描述 Evans 函数的渐近性质.

**引理 15.4** (15.13) 描述的  $Y_i^u(0, Z)$  和  $Y_i^s(0, Z)$ , 如  $\lambda \in \mathbb{R}$ , 则  $E(\lambda) < 0, \lambda \rightarrow \infty$ .

**证** 无损于一般性, 可设  $\epsilon = 0$ , 即此结果如对  $\epsilon = 0$  是成立的, 则它对  $0 \leq \epsilon \leq 1$  也是成立的. 设  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ , 令  $Y = (P, Q)^T$  在(15.12) 中, 置  $S = \sqrt{\lambda}Z, Q = \sqrt{\lambda}\tilde{Q}$ , 令  $\lambda \rightarrow \infty$ , 则(15.12) 变成自治方程组

$$\begin{pmatrix} P \\ \tilde{Q} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ J & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ \tilde{Q} \end{pmatrix}, \quad ' = \frac{d}{ds}.$$

上述矩阵的特征值为  $\gamma(\pm 1, \pm i)$ ,  $\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ , 因此存在二维不稳定子空间和二维稳定子空间, 二维不稳定子空间由  $\{(\gamma, -\gamma, 1, 0)^T, (\gamma, \gamma, 0, 1)^T\}$  所张成, 二维稳定子空间由  $\{(\gamma, -\gamma, 0, 1)^T, (-\gamma, -\gamma, 0, 1)^T\}$  所张成.

令  $e_i \wedge e_j = e_{ij}$ , 在  $\Lambda^2(R^4)$  不稳定子空间中可由向量

$$\begin{aligned} Y^u(+\infty) &= (\gamma, -\gamma, 1, 0)^T \wedge (\gamma, \gamma, 0, 1)^T \\ &= e_{12} - \gamma e_{13} + \gamma e_{14} - \gamma e_{23} - \gamma e_{24} + e_{34} \end{aligned}$$

所表示, 而稳定子空间可由向量

$$\begin{aligned} Y^s(+\infty) &= (\gamma, -\gamma, -1, 0)^T \wedge (-\gamma, -\gamma, 0, 1)^T \\ &= -e_{12} - \gamma e_{13} + \gamma e_{14} - \gamma e_{23} - \gamma e_{24} - e_{34} \end{aligned}$$

表示, 注意到

$$Y^u(\infty) \wedge Y^s(+\infty) = -2. \quad (15.17)$$

当  $\lambda = 0$  时, 对任何固定  $Z$ , 不稳定子空间和稳定子空间均可由向量  $(R'_0(Z), 0, R''_0(Z), 0)^T$  和  $(0, R_0(Z), 0, R'_0(Z))^T$  所张成, 置  $Y^u(0) = \lim_{Z \rightarrow -\infty} e^{-2\sqrt{\omega}Z} Y^u(0, Z)$ ,  $Y^s(0) = \lim_{Z \rightarrow -\infty} e^{2\sqrt{\omega}Z} Y^s(0, Z)$ .

$$(15.18)$$

利用  $R_0$  的表示可知

$$\begin{aligned} Y^u(0) &= \lim_{Z \rightarrow -\infty} e^{2\sqrt{\omega}Z} (R'_0(Z), 0, R''_0(0), 0)^T \wedge (0, R_0(Z), 0, R'_0(Z))^T \\ &= \mu(\sqrt{\omega}, 0, \omega, 0)^T \wedge (0, 1, 0, \sqrt{\omega})^T \\ &= \mu(\sqrt{\omega}e_{12} + \omega e_{14} - \omega e_{23} + e^{\frac{3}{2}}e_{34}), \end{aligned}$$

$$\text{其中 } \mu = \frac{8}{(1-\beta)^{\frac{1}{2}}} \omega, \beta = -\frac{16}{3} \omega \omega.$$

类似的计算表明

$$\begin{aligned} Y^s(0) &= \lim_{Z \rightarrow -\infty} e^{2\sqrt{\omega}Z} (R'_0(Z), 0, R''_0(0), 0)^T \wedge (0, R_0(Z), 0, R'_0(Z))^T \\ &= \mu(-\sqrt{\omega}e_{12} + \omega e_{14} - \omega e_{23} - \omega^{\frac{3}{2}}e_{34}), \\ Y^u(0) \wedge Y^s(0) &= -4\omega^2 \mu^2. \end{aligned}$$



**推论 15.5** 当  $\epsilon = 0$  时, Evans 函数满足  $E(0) = E'(0) = E''(0) = 0, E^{(4)}(0) < 0$ , 进一步有  $E(\lambda) < 0, \lambda > 0$ .

**证** 直接计算可得.

现考虑  $\epsilon > 0$  时,  $E(\lambda)$  导数的计算,  $E(0) = E'(0) = 0$  是对的, 但  $E''(0) \neq 0$ , (15.7) 与时间无关, 满足 ODE

$$BA'' + CJA'' + F(A, \omega, \epsilon) = 0, \quad ' = \frac{d}{dt}, \quad (15.19)$$

能写成一阶方程组

$$U' = G(U, C, \omega, \epsilon), \quad (15.20)$$

其中  $U = (U_1, U_2) \in R^4$ , 且

$$G(U, C, \omega, \epsilon) = \begin{bmatrix} U_2 \\ B^{-1}C - F(U_1, \omega, \epsilon) - CJ(U_2) \end{bmatrix}.$$

带光亮的孤立波对应于  $U = 0$  的同宿解. 它实际上是二维不稳定流形  $W^u(Z, C, \omega, \epsilon)$  和二维稳定流形  $W^s(Z, C, \omega, \epsilon)$  的相交, 由于方程 (15.1) 具有旋转对称性, 轨线在  $W^u(z, c, \omega, \epsilon) \cap W^s(z, c, \omega, \epsilon)$  不可区分, 但我们可选取轨线使得  $\tilde{A}_2(0) = 0$  可在二维流形中惟一决定一条轨线. 令  $\tilde{U} = (\tilde{A}, \tilde{A}')$ , 因此  $\tilde{U} \subset W^u(z, c, \omega, \epsilon) \cap W^s(z, c, \omega, \epsilon)$  为可识别的一个解. 由 (15.7) 直接可得

**命题 15.6** 非线性下的 Frechet 导数为

$$\partial_\omega F(A, \omega, \epsilon) = -A. \quad (15.21)$$

因  $G$  光滑依赖于参数, 流形也是, 光亮孤立波为  $W^u(z, c, \omega, \epsilon)$  和  $W^s(z, c, \omega, \epsilon)$  不平凡的交. (15.20) 对  $c, \omega$  作微分并取值于  $\tilde{U}$ , 得

$$(\partial_c W^r)' = DG_{\tilde{u}}(\tilde{A}, 0, \omega, \epsilon) \partial_c W^r + (0, -B^{-1}J\tilde{A}')^T, \quad (15.22)$$

$$(\partial_\omega W^r)' = DG_u(\tilde{A}, 0, \omega, \epsilon) \partial_\omega W^r + (0, -B^{-1}\tilde{A})^T. \quad (15.23)$$

在这种方程中  $r \in \{u, s\}$ . 由命题 15.6 的结果可得

$$DG_u(\tilde{A}, 0, \omega, \varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ -B^{-1}DF_\lambda(A, \omega, \varepsilon) & 0 \end{bmatrix}.$$

注意到作为这些方程的推论, 可知  $\partial_v(W^u - W^s)$  和  $\partial_w(W^u - W^s)$  为如下线性方程组的解

$$\delta U' = DG_u(\tilde{A}, 0, \omega, \varepsilon) \delta U. \quad (15.24)$$

如置  $\tilde{V}_J = (J\tilde{A}, J\tilde{A}')$ , 则如下命题是对的.

**命题 15.7** (15.24) 的四个解为  $V', U_J, \partial_v(W^u - W^s), \partial_w(W^u - W^s)$ ; 更进一步, 如

$D_2 = [\partial_v(W^u - W^s) \wedge \partial_w(W^u - W^s) \wedge U' \wedge \tilde{U}_J](Z, 0, \omega, \varepsilon)$  非零, 则这些解是线性无关的.

**证** 易知这四个解也是线性方程组的解, 当  $D_2 \neq 0$  时, 这些解的线性无关性是从  $D_2$  为 Wronskian 得到.

**推论 15.8** 由 Abel 公式, 可知  $D_2$  与  $\varepsilon$  无关.

**引理 15.9** Evans 函数满足  $E''(0) = 2D_2$ , 其中  $D_2$  为命题 15.7 所确定.

**证**  $E(\lambda)$  对  $\lambda$  求导取值  $\lambda = 0$  可得

$$E''(0) = 2(\partial_\lambda(Y_1^u - Y_1^s) \wedge \partial_\lambda(Y_2^u - Y_2^s) \wedge Y_1^s \wedge Y_2^s)(0),$$

$Y_i^u(0) = Y_i^s(0), Y_1^s(0) = \tilde{V}', Y_2^s(0) = \tilde{V}_J$ . 微分(15.11)对  $\lambda$ , 取值  $\lambda = 0$  得  $(\partial_\lambda Y_1^r)' = M(0, Z)\partial_\lambda Y_1^r - (0, -B^{-1}J\tilde{A}')$ ,  
 $(\partial_\lambda Y_1^r)' = M(0, Z)\partial_\lambda Y_2^r - (0, B^{-1}\tilde{A}).$

这里  $r \in \{u, s\}$ . 在上述方程中, 利用了  $J^2 = -I_2$ . 因  $M(0) = DG_u(\tilde{A}, 0, \omega, \varepsilon)$ , 不难看到

$$\partial_\lambda(Y_1^u - Y_1^s) = -\partial_v(W^u - W^s) + \sum_{i=1}^2 c_i Y_i^u,$$

$$\partial_\lambda(U_2^u - Y_2^s) = -\partial_w(W^u - W^s) + \sum_{i=1}^2 d_i Y_i^u.$$

其中  $c_i, d_i$  为常数, 将此式代入  $E''(0)$  的表达式即得引理.

当  $D_2 = 0$  时,  $E''(0) = 0$ , 此时必须考察  $E''(0)$ .

定义三形式  $e_1^* \in \Lambda^3(R^4) \cong R^4$ ,

$$e_1^* = -\partial_c(W^u - W^s) \wedge \tilde{U}' \tilde{U}_J, \quad (15.25)$$

可知  $e_1^*$  为共轭方程  $Z' = -M^T(0, Z)Z$  的有界指数衰减解, 进一步  $e_1^*$  为共轭方程  $(-JL)^* A = 0$  的有界衰减解.

设  $D_2 = 0$ , 因  $\partial_w W^u = \partial_w W^s, e_1^* \neq 0$ , 它等价于存在

$$(-JL)A = JA$$

的有界解, 而不存在

$$(-JL)A = \tilde{A}$$

的解. 由此推之,  $\|\partial_w W^u\| \rightarrow 0$  指数快地趋于零,  $\|Z\| \rightarrow \infty$ . 以下设  $\Pi: R^4 \rightarrow R^2$  为第一、第二分量的投影算子.

**引理 15.10** 设  $E''(0), e_1^* \neq 0$ .  $e_1^*$  为 (15.25) 所定义, 则

$$E'''(0) = 6 \int_{-\infty}^{\infty} H(s) \wedge e_1^*(s) ds,$$

其中  $H = (0, B^{-1}J\Pi(\partial_w W^u))^T$ .

**证** 见 [17].

以下考虑导数的不同表示, 为方便引入极坐标, 即

$$A = (r \cos \theta, r \sin \theta),$$

$$U = T(r, \theta, s, \phi),$$

这里

$$T(r, \theta, s, \phi) = \begin{bmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ rs \cos \theta - r\phi \sin \theta \\ rs \sin \theta + r\phi \cos \theta \end{bmatrix},$$

其中  $s = r'/r, \phi = \theta'$ . 常规计算表明

$$DT(r, \theta, s, \phi) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 & 0 \\ s \cos \theta - \phi \sin \theta & -r(s \sin \theta + \phi \cos \theta) & r \cos \theta & -r \sin \theta \\ s \sin \theta - \phi \cos \theta & r(s \cos \theta - \phi \sin \theta) & r \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (15.26)$$

且  $|DT(r, \theta, s, \phi)| = r^3$ . 因此变换是非奇的, 除原点外.

在极坐标中, 以  $W_p^u$  和  $W_p^s$  表示流形. 在这些坐标下, 按常规计算可得

$$\begin{cases} \partial_c(W^u - W^s) = DT \partial_c(W_p^u - W_p^s), \\ \partial_w(W^u - W^s) = DT \partial_w(W_p^u - W_p^s), \\ \dot{U}' = D\Gamma \partial_z W_p^u, \dot{V}_I = D\Gamma \partial_\theta W_p^u. \end{cases} \quad (15.27)$$

当  $s = 0$  时, 流形能参数化为

$$\begin{aligned} W_p^u &= (r^u(\theta, \beta), \theta, 0, \phi^u(\theta, \beta))^T, \\ W_p^s &= (r^s(\theta, \beta), \theta, 0, \phi^s(\theta, \beta))^T, \end{aligned} \quad (15.28)$$

其中  $\beta = (C, W, \epsilon)$ . 波可表为

$$A(Z) = (R(Z)\cos\theta(Z), R(Z)\sin\theta(Z)).$$

由于波是偶的, 可设

$$R'(\theta) = \theta'(0) = 0.$$

由于方程(15.1)的旋转对称性, 有

$$\theta(0) = 0.$$

在这些假设下, 当  $Z = 0$  时, 即当  $S' = R'/R = 0$  时,

$$\begin{cases} \partial_c(W_p^u - W_p^s) = \partial_c((r^u - r^s), 0, 0, (\phi^u - \phi^s))^T, \\ \partial_w(W_p^u - W_p^s) = \partial_w((r^u - r^s), 0, 0, (\phi^u - \phi^s))^T, \\ \partial_z W_p^u = (0, 0, S'(0), \Phi(0)), \partial_\theta W_p^u = (0, 1, 0, 0)^T. \end{cases} \quad (15.29)$$

联系这些和(12.25)可证如下引理.

**引理 15.11** Evans 函数满足

$$E''(0) = -\delta R^2(0)R'(0)\partial_c r^u(0, 0, \omega, \epsilon)\partial_w \phi^u(0, 0, \omega, \epsilon).$$

**证** 首先注意到由引理 15.9, 得

$$\begin{aligned} E''(0) &= 2(|DT| \partial_c(W_p^u - W_p^s) \wedge \partial_w(W^u - W^s) \\ &\quad \wedge \partial_z W_p^u \wedge \partial_\theta W_p^u)(0, 0, \omega, \epsilon). \end{aligned}$$

由(12.29)和对  $|DT|$  的计算可得

$$E''(0) = -2R^3(0)S'(0) \begin{vmatrix} \partial_c(r^u - r^s) & \partial_w(r^u - r^s) \\ \partial_c(\phi^u - \phi^s) & \partial_w(\phi^u - \phi^s) \end{vmatrix}.$$

在极坐标下的定态方程由方程(15.18)给出,作为命题 15.4 的推论.

$$\begin{aligned}r^u(0, c, \omega, \epsilon) &= r^s(0, -c, \omega, \epsilon), \\ \phi^u(0, c, \omega, \epsilon) &= -\phi^s(0, -c, \omega, \epsilon).\end{aligned}$$

于是推出

$$\begin{aligned}\partial_w(r^u - r^s)(0, 0, \omega, \epsilon) &= \partial_c(\phi^u - \phi^s)(0, 0, \omega, \epsilon) = 0, \\ \text{而 } \partial_c(r^u - r^s)(0, 0, \omega, \epsilon) &= 2\partial_c r^u(0, 0, \omega, \epsilon), \\ \partial_w(\phi^u - \phi^s)(0, 0, \omega, \epsilon) &= 2\partial_w \phi^u(0, 0, \omega, \epsilon).\end{aligned}$$

因  $S'(0) = R''(0)/R(0)$ , 由此推得

$$E''(0) = -\delta R^2(0)R''(0)\partial_c r^u(0, 0, \omega, \epsilon)\partial_w \phi^u(0, 0, \omega, E).$$

这就完成了证明.

$E''(0)$  表达式已知, 现必须有  $E''(0)$  的表达式, 由引理 15.10, 我们必须更好地了解共轭解.

$$e_1^* = -\partial_c(W^u - W^s) \wedge \dot{U}' \wedge \dot{U} \in \Lambda^3(R^4).$$

由(15.25), 上述量可写为

$$\begin{aligned}e_1^* &= -(DT\partial_c(W_p^u - W_p^s) \wedge (DT\partial_z W_p^u) \wedge (DT\partial_\theta W_p^u)) \\ &= -DT^{(3)}(\partial_c(W_p^u - W_p^s) \wedge \partial_z W_p^u \wedge \partial_\theta W_p^u),\end{aligned}$$

其中  $DT^{(3)}$  为  $4 \times 4$  矩阵. 由  $DT$  它映照  $\Lambda^3(R^4)$  为它自己, 矩阵  $DT^{(3)}$  形式上取  $DT$  的所有  $3 \times 3$  子式, 即有

$$DT^{(3)} = r^2 \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & -(s\cos\theta + \phi\sin\theta) & -(s\sin\theta - \phi\cos\theta) \\ -\sin\theta & \cos\theta & s\sin\theta - \phi\cos\theta & -(s\cos\theta + \phi\sin\theta) \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

于是为了完成  $e_1^*$  的计算, 必须决定

$$(e_1^*)_p = \partial_c(W_p^u - W_p^s) \wedge \partial_z W_p^u \wedge \partial_\theta W_p^u.$$

令

$$\begin{cases} \xi_1 = \partial_z W_p^u = (R', \theta', S', \Phi')^T, \\ \xi_2^- = \partial_c W_p^u, \xi_2^+ = \partial_c W_p^s, \\ \xi_3 = \partial_\theta W_p^u = (0, 1, 0, 0). \end{cases} \quad (15.30)$$

设向量  $e_i, i = 1, 2, \dots, 4$ , 为  $R^4$  中的锥向量, 定义

$$e_{ijk} = e_i \wedge e_j \wedge e_k.$$

向量  $\{e_{123}, e_{124}, e_{134}, e_{234}\}$  组成  $\Lambda^3(R^4)$  中的基, 因此  $(e_1^*)_p$  可用这些向量表示, 现定义

$$P_{ij}^* = \begin{vmatrix} (\xi_1)_i & (\xi_2^*)_i \\ (\xi_1)_j & (\xi_2^*)_j \end{vmatrix}. \quad (15.31)$$

置  $\dot{P}_{ij} = P_{ij} - P_{ij}^*$ . 由 (15.30), 标准计算表明

$$(e_1^*)_p = \dot{P}_{13}e_{123} + \dot{P}_{14}e_{124} - \dot{P}_{34}e_{234}.$$

作为上面的讨论的推论有如下引理

**引理 15.12** 设  $M > 0$  给定,  $\dot{P}_{ij} = O(\epsilon)$ ,  $|Z| \leq M$ , 则

$$e_1^* = \begin{cases} -R^2(\dot{P}_{13}e_{123} + (\dot{P}_{14} + S\dot{P}_{34})e_{124} - R\dot{P}_{34}e_{234}) + O(\epsilon^2), & |Z| \leq M, \\ O(e^{-\mu|Z|}\epsilon), & |Z| \geq M, \end{cases}$$

其中  $\mu > 0$ .

**证** 令  $\eta_1 > 0$  使得  $R^2(Z) = O(e^{-\eta_1|Z|})$ , 即  $\eta_1 = 2\sqrt{\omega} + O(\epsilon)$ , 因  $\Phi = O(\epsilon)$ , 推出  $\theta = O(\epsilon)Z$ , 易见  $|Z| \leq M$  时

$$DT^{(3)} = R \begin{bmatrix} 1 & 0 & -S & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -S \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R \end{bmatrix} + O(\epsilon).$$

而  $\|DT^{(3)}\| = O(e^{-\eta_1|Z|})$ ,  $|Z| \leq M$ . 因此由关于函数  $\tilde{P}_{ij}$  的假设, 对  $|Z| \leq M$  有

$$\begin{aligned} e_1^* &= DT^{(3)}(e_1^*)_p \\ &= \dot{P}_{13}e_{123} + (\dot{P}_{14} + S\dot{P}_{34})e_{124} - \dot{P}_{34}e_{234} + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

因  $\tilde{P}_{ij} = O(\epsilon)$ ,  $|Z| \leq M$ . 对  $|Z| \leq M$ , 必须  $\tilde{P}_{ij} = O(e^{\eta_2|Z|})\epsilon$ .

然后推出  $(e_1^*)_p = O(e^{\eta_2|Z|})\epsilon$ , 于是, 对  $|Z| \geq M$ , 我们看到

$$\begin{aligned} |e_1^*| &\leq \|DT^{(3)}\| \|(e_1^*)_p\| = O(e^{-\eta_1|Z|})O(e^{\eta_2|Z|})\epsilon \\ &= O(e^{(\eta_2 - \eta_1) \cdot |Z|})\epsilon. \end{aligned}$$

置  $\mu = \eta_1 - \eta_2$ . 事实上由于  $e_1^*$  指数趋于零, 保证  $\mu > 0$ .

因  $B = I_2 + \varepsilon aJ$ , 简单计算表明  $B^{-1}J = J + O(\varepsilon)$ . 因此利用  $\theta = O(\varepsilon)$  对  $|Z| \leq M$ , 不难看到当  $\delta U_2 = 0$  时

$$B^{-1}J\pi(\partial_w W^u) = \begin{cases} (O, \partial_w R_0)^T + O(\varepsilon), & |Z| \leq M, \\ O(e^{-\eta_3|Z|}), & |Z| \geq M, \eta_3 > 0. \end{cases} \quad (15.32)$$

**引理 15.13** 设  $M > 0$  给定, 且  $\tilde{P}_u = O(\varepsilon)$ ,  $|Z| \leq M$ . 当  $E''(0) = 0$  时, Evans 函数的三阶导数满足

$$E'''(0) = 6 \int_{-\infty}^{\infty} R_0^2(s) \partial_w R_0(s) P_{13}(s) ds + O(e^{-\eta_4 M})\varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

$$\eta_4 > 0.$$

**证**  $E'''(0)$  为  $H \wedge e_1^*$  所给定, 这里

$$H = (0, B^{-1}J\pi(\partial_w W^u))^T.$$

由 (15.32) 和引理 15.12, 可知对  $|Z| \leq M$ ,

$$H \wedge e_1^* = -R_0^2 \partial_w R_0 \tilde{P}_{13} e_{4123} + O(\varepsilon^2) = R_0^2 \partial_w R_0 \tilde{P}_{13} + O(\varepsilon^2).$$

而对  $|Z| \geq M$ ,

$$H \times e_1^* = O(e^{-\eta_4 M |Z|})\varepsilon.$$

在上面计算中, 我们利用了  $e_{4123} = e_4 \wedge e_{123} = -1$ .

以下考虑渐近性.

$E''(0)$  的表达式已经得到, 为了决定靠近 0 附近特征值的位置, 必须计算表达式  $\partial_x \phi^u$  和  $\partial_w \phi^u$ . 为决定  $E''(0)$ , 必须决定  $\tilde{P}_{ij}$ , 且表明这个量是

$O(\varepsilon)$ ,  $|Z| \leq M$ . 令

$$A(Z) = (r(Z)\cos\theta(Z), r(Z)\sin\theta(Z)),$$

孤立波表为  $(R, \theta, S, \phi)$ , 注意到

$$S = R'/R = \frac{d}{dt} \ln R, \quad (15.33)$$

当  $\varepsilon = 0$  时, 波的解析表达式为 (15.7) 所给出, 即

$$R_0^2 = \frac{4\omega}{1 + \sqrt{1 - \beta \alpha \cosh(2\sqrt{\omega}Z)}}, \beta = -\frac{16}{3}\alpha\omega, \theta_0(Z) = 0. \quad (15.34)$$

这个波能表以  $(R_0, 0, S_0, 0)^T$  定义

$$\Delta = 1 + \varepsilon^2 a^2.$$

定态 ODE 为

$$\begin{cases} r' = rs, \theta' = \phi, \\ \Delta S' = -\Delta S^2 + \Delta \phi^2 - C(\varepsilon as - \phi) - (-\omega + \varepsilon^2 ab) - (H\varepsilon^2 ad_1)\gamma^2 \\ \quad - (\alpha + \varepsilon^2 ad_2)\gamma^4, \\ \Delta \phi' = -2\Delta S\phi - C(S + \varepsilon a\phi) - \varepsilon[(b + a\omega) + (d_1 - a)\gamma^2 \\ \quad + (d_2 - a\alpha)\gamma^4]. \end{cases} \quad (15.35)$$

显然  $\theta$  的方程是多余的, 通常被忽略掉, 这里为了完备性仍留在这里, 忽略  $O(\varepsilon^2)$  项后, 变分方程为

$$\begin{cases} \delta\gamma' = S\delta r + R\delta S, \delta\theta' = \delta\phi, \\ \delta S' = -2R(1 + 2aR^2)\delta r - 2S\delta s + 2\Phi\delta\phi + \delta\omega + (\varepsilon as - \Phi)\delta c \\ \quad - 2\varepsilon a[(b + a\omega) + (d_1 - a)R^2 + (d_2 - a\alpha)R^4]\delta\varepsilon, \\ \delta\phi' = -2\varepsilon R[(d_1 - a) + 2(d_2 - a\alpha)R^2]\delta r - 2\Phi\delta s - 2S\delta\phi \\ \quad - \varepsilon a\delta\omega - (\varepsilon a\Phi + S)\delta c - [(b + a\omega) + (d_1 - a)R^2 \\ \quad + (d_2 - a\alpha)R^4]\delta\varepsilon, \\ \delta\omega' = 0, \delta C' = 0, \delta\varepsilon' = 0. \end{cases} \quad (15.36)$$

由观察易得

**命题 15.14** 方程(15.36) 在变换

$(Z, C, \omega, r, \theta, S, \phi) \rightarrow (-Z, -C, \omega, r, \theta, -S, -\phi)$  下是不变的.

表达式  $\partial_\omega \phi''(0)$  将首先被决定. 令

$$\phi_\varepsilon(Z) = \delta\phi(\partial_\varepsilon W_p''(Z, C, \omega)), \quad (15.37)$$

因



$$\delta C(\partial_\epsilon W_p^u(Z, C, \omega)) = \delta \omega(\partial_\epsilon W_p^u(Z, C, \omega)) = 0,$$

由(15.36), 当  $\epsilon = 0$  时, 得

$$\phi_\epsilon^1 = -2S_0\phi_\epsilon - [(b + a\omega) + (d_1 - a)R_0^2 + (d_2 - a\alpha)R_0^4]. \quad (15.38)$$

由定义知,  $\phi_\epsilon$  当  $Z \rightarrow -\infty$  时是一致有界的, 因此由(15.33), (15.38) 的解能写为

$$\begin{aligned} R_0^2(Z)\phi_\epsilon(Z) = & - \left[ (b + a\omega) \int_{-\infty}^Z R_0^2(s)ds + (d_1 - a) \right. \\ & \left. \cdot \int_{-\infty}^Z R_0^4(s)ds + (d_2 - a\alpha) \int_{-\infty}^Z R_0^6(s)ds \right]. \end{aligned} \quad (15.39)$$

由定义知, 函数  $\phi_\epsilon$  描述直至  $O(\epsilon)$ ,  $W_p^u(Z, C, \omega)$  的  $\phi$  分量位置, 有

$$\phi^u(0) = \epsilon\phi_\epsilon(0) + O(\epsilon^2). \quad (15.40)$$

由(15.39) 和  $R(Z)$  的表示可求出  $\phi_\epsilon(0)$ , 再求  $\phi^u(0)$  对  $\omega$  的变分,  $\epsilon$  充分小, 令

$$\Lambda_m = \int_{-\infty}^{\infty} R_0^m(s)ds, \Lambda'_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (R'_0)^2(s)ds. \quad (15.41)$$

**引理 15.15** 函数  $\phi^u(0)$  为

$$\phi^u(0) = \epsilon\phi_\epsilon(0) + O(\epsilon^2)$$

所给定. 这里

$$2R_0^2(0)\phi_\epsilon(0) = \Lambda'_2 a - \Lambda_2 b - \Lambda_4 d_1 - \Lambda_6 d_2.$$

**证** 因  $R_0$  为偶函数

$$\int_{-\infty}^0 R_0^m(s)ds = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} R_0^m(s)ds, \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

因此, 当(15.39) 取值于  $Z = 0$  时有

$$\begin{aligned} 2R_0^2(0)\phi_\epsilon(0) = & (-\omega\Lambda_2 + \Lambda_4 + \alpha\Lambda_6)a \\ & - \Lambda_2 b - \Lambda_4 d_1 - \Lambda_6 d_2. \end{aligned}$$

函数  $R_0$  满足

$$R_0'' - \omega R_0 + R_0^3 + \alpha\gamma_0^5 = 0.$$

上述方程乘以  $R_0$ , 再部分积分得

$$\Lambda_2' = -\omega\Lambda_2 + \Lambda_4 + \alpha\Lambda_6.$$

由此即得引理. 以下需要一些常数进行计算.

**命题 15.16** 设  $\beta = -\frac{16}{3}\alpha\omega$ , 则  $\Lambda_2$  和  $\Lambda_4$  满足

$$(1) \Lambda_2 = 4\sqrt{\omega} \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tanh^{-1}(\sqrt{\beta}),$$

$$(2) \Lambda_4 = -16\omega \frac{1}{\beta} \left( \sqrt{\omega} - \frac{1}{4}\Lambda_2 \right).$$

证 (1)、(2) 可从直接积分得到.

**推论 15.17** 函数  $\Lambda_2$  和  $\Lambda_4$  满足

$$(1) \partial_w \Lambda_2 = \frac{2}{1-\beta} \omega^{-\frac{1}{2}},$$

$$(2) \partial_w \Lambda_4 = 4\omega \partial_w \Lambda_2.$$

利用

$$\text{Tanh}^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

Taylor 级数, 可得到如下的量

**推论 15.18** 当  $0 \leq \beta < 1$ , 有 Taylor 展开

$$(1) \Lambda_2 = 4\omega^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{2n+1},$$

$$(2) \Lambda_4 = 16\omega^{\frac{3}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{2n+3},$$

$$(3) \Lambda_{24} = \frac{3}{4\omega} \left( 1 - \frac{2^2}{3 \cdot 5} \beta - \frac{2^2 \cdot 3^2}{3 \cdot 5^2 \cdot 7} \beta^2 - \frac{2^2 \cdot 3^3}{3 \cdot 5^3 \cdot 7} \beta^3 + O(\beta^4) \right),$$

$$(4) \Lambda_{42} = \frac{8}{5} \omega \left( 1 + \frac{3^2}{5 \cdot 7} \beta + \frac{2^3}{5^2 \cdot 7} \beta^2 + \frac{3 \times 1879}{5^4 \cdot 7^2 \cdot 11} \beta^3 + O(\beta^4) \right),$$

$$(5) \partial_w \Lambda_{42} = \frac{8}{5} \left( 1 + 2 \frac{3^2}{5 \cdot 7} \beta + 3 \frac{2^3}{5^2 \cdot 7} \beta^2 + 4 \frac{3 \times 1879}{5^4 \cdot 7^2 \cdot 11} \beta^3 + O(\beta^4) \right),$$

$$(6) \partial_w \Lambda_{24} = -\frac{3}{4\omega^2} \left( 1 - 2 \frac{2^2}{3 \cdot 5} \beta + \frac{2^2 \cdot 3^2}{3 \cdot 5^2 \cdot 7} \beta^2 - 4 \frac{2^2 \cdot 3^3}{3 \cdot 5^3 \cdot 7} \beta^3 + O(\beta^4) \right),$$

$$(7) \frac{\partial_w \Lambda_{42}}{\partial_w \Lambda_{24}} = -\frac{32}{15} \omega^2 \left( 1 + \frac{2 \cdot 11}{3 \cdot 7} \beta + \frac{73}{3^2 \cdot 7} \beta^2 + \frac{2^2 \cdot 59 \cdot 2017}{3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11} \beta^3 + O(\beta^4) \right).$$

**命题 15.19** 关系

$$(1) \Lambda_6 = \frac{3}{2\alpha} \left( \omega \Lambda_2 - \frac{3}{4} \Lambda_4 \right),$$

$$(2) \Lambda_2' = \frac{1}{2} \omega \Lambda - \frac{1}{8} \Lambda_4$$

成立.

**证** 由引理 15.15 的证明, 函数  $R_0$  满足 ODE,

$$R_0'' - \omega R_0 + R_0^3 + \alpha R_0^5 = 0,$$

乘  $R_0$  分部积分, 得

$$-\Lambda_2' - \omega \Lambda_2 + \Lambda_4 + \alpha \Lambda_6 = 0,$$

乘  $R_0'$  积分, 得

$$\Lambda_2' - \omega \Lambda_2 + \frac{1}{2} \Lambda_4 + \frac{1}{3} \alpha \Lambda_6 = 0.$$

上述两方程相减可得

$$\omega \Lambda_2 - \frac{3}{4} \Lambda_4 - \frac{2}{3} \alpha \Lambda_6 = 0,$$

由此即得(2).

**命题 15.20** 置  $\beta = -\frac{16}{3} \alpha \omega$ , 当  $0 \leq \beta < 1$  时,

$$\partial_\omega \Lambda_{24} < 0, \partial_\omega \Lambda_{d_2} > 0.$$

因此

$$\frac{\partial_\omega \Lambda_{d_2}}{\partial_\omega \Lambda_{24}} < 0.$$

**证** 由  $\Lambda_{24}$  的定义和推论 15.17, 有

$$\partial_\omega \Lambda_{24} = \frac{(\Lambda_4 - 4\omega \Lambda_2) \partial_\omega \Lambda_2}{\Lambda_4^2}.$$

利用推论 15.18 中的 Taylor 展开, 可得

$$\Lambda_4 - 4\omega \Lambda_2 = -16\omega^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{(2n+1)(2n+3)}.$$

它显然是负的, 因推论 15.17 说当  $0 \leq \beta < 1$  时,  $\partial_\omega \Lambda_2 > 0$ ,  $\partial_\omega \Lambda_{24} < 0$  是显然的.

因

$$\partial_{\omega} \beta = \frac{\beta}{\omega}, \quad \partial_{\omega} \Lambda_{d2} = -\frac{8\omega}{\beta} \partial_{\omega} (\omega \Lambda_{24}),$$

在推论 15.18 中作 Taylor 展开得

$$\partial_{\omega} (\omega \Lambda_{24}) = C \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) \beta^n,$$

其中

$$C = \left( 4\omega \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+3} \beta^n \right)^2 \right)^{-1} > 0,$$

$$a_n = \sum_{j=0}^n \frac{j}{2j+1} \frac{1}{2(n-j)+3},$$

$$b_n = \sum_{j=0}^n \frac{j}{2j+3} \frac{1}{2(n-j)+1}.$$

按证明命题的断言  $\partial_{\omega} \Lambda_{d2} > 0$ , 只需证明

$$a_n - b_n < 0.$$

事实上, 因

$$a_n - b_n = 4 \sum_{j=0}^n \frac{n-2j}{f(j, n)},$$

其中

$$f(j, n) = (2j+1)(2(n-j)+1)(2j+3)(2(n-j)+3),$$

可用积分估计

$$a_n - b_n < 4 \int_0^n x g(x, n) dx,$$

其中

$$g(x, n) = \frac{n-2x}{f(x, n)}.$$

令  $y = x - \frac{1}{2}n$ , 则

$$g(y, n) = -2 \frac{y}{f(y, n)},$$

$$f(y, n) = \frac{1}{2} (4y^2 - (n+1)^2) (4y^2 - (n+3)^2).$$

因此  $g(y, n)$  为奇函数,  $yg(y, n) < 0$ , 于是

$$\begin{aligned}\int_0^n xg(x, n)dx &= \int_{-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} \left(y + \frac{1}{2}n\right)g(y, n)dy \\ &= \int_{-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} yg(y, n)dy < 0.\end{aligned}$$

因此  $a_n - b_n < 0$ , 命题得证.

**引理 15.21** 具亮度孤立波解存在的必要条件是

$$\Lambda_2' a - \Lambda_2 b - \Lambda_4 d_1 - \Lambda_6 d_2 = 0.$$

**证** (15.39) 中令  $Z \rightarrow \infty, R_0(Z) \rightarrow 0$ , 可得

$$\begin{aligned}0 &= (-\omega\Lambda_2 + \Lambda_4 + a\Lambda_6)a - \Lambda_2 b - \Lambda_4 d_1 - \Lambda_6 d_2 \\ &= \Lambda_2' a - \Lambda_2 b - \Lambda_4 d_1 - \Lambda_6 d_2.\end{aligned}$$

**附注 15.22** 从引理 15.21 和  $\Lambda_2, \Lambda_4$  的表达式中可看出波存在的必要条件, 推出

$$\phi_\epsilon(0) = 0,$$

注意到  $\beta = -\frac{16}{3}\alpha\omega$ , 推出  $\Lambda_6$  可写为

$$\Lambda_6 = -\frac{8\omega}{\beta} \left( \omega\Lambda_2 - \frac{3}{4}\Lambda_4 \right).$$

由此定义

$$\Lambda_{24} = \frac{\Lambda_2}{\Lambda_4}, \Lambda_{d2} = -\frac{8\omega}{\beta} \left( \omega\Lambda_{24} - \frac{3}{4} \right). \quad (15.42)$$

它是命题 15.19 的推论,  $\Lambda_{d2} = \Lambda_6/\Lambda_4$ .

**推论 15.23** 为使波存在, 参数  $d_1$  必须等于  $d_1^*$  直到  $O(\epsilon)$ .

$$d_1^* = \frac{1}{4}a - \Lambda_{24}b - \Lambda_{d2} \left( d_2 - \frac{1}{3}aa \right).$$

**证** 由引理 15.21, 波存在必须

$$d_1 = \frac{\Lambda_1'}{\Lambda_4} a - \frac{\Lambda_2}{\Lambda_4} b - \frac{\Lambda_6}{\Lambda_4} d_2,$$

因当  $d = d_1^*$  时,  $\phi_\epsilon(0) = 0$ , 由隐函数定理可得

$$\partial_\omega \phi_\epsilon(0) + \partial_{d_1} \phi_\epsilon(0) \partial_\omega d_1^* = 0. \quad (15.43)$$

量  $\partial_{d_1}\phi_\epsilon(0), \partial_\omega d_1^*$  易知,故必须计算  $\partial_\omega\phi_\epsilon(0)$ .

**引理 15.24** 当  $d_1 = d_1^*$  时,

$$\partial_\omega\phi_\epsilon(0) = -\frac{\Lambda_4}{2R_0^2(0)}\left(\partial_\omega\Lambda_{24}b + \partial_\omega\Lambda_2\left(d_2 - \frac{1}{3}aa\right)\right).$$

**证** 由引理 15.15 可得

$$\partial_{d_1}\phi_\epsilon(0) = -\frac{\Lambda_4}{2R_0^2(0)}.$$

在推论 15.23 中对  $d_1^*$  微分并利用(15.43) 可得引理.

联系以上结果可得如下推论.

**推论 15.25** 设  $d = d_1^*$ , 置

$$b^* = -\frac{\partial_\omega\Lambda_{d_2}}{\partial_\omega\Lambda_{24}}\left(d_2 - \frac{1}{3}aa\right).$$

对  $\epsilon > 0$  充分小, 如  $b > b^*$ , 则  $\partial_\omega\phi^\mu(0) > 0$ ; 否则

$$\partial_\omega\phi^\mu(0) < 0.$$

更进一步, 对  $0 \leq \beta < 1$ , 有

$$\frac{\partial_\omega\Lambda_{d_2}}{\partial_\omega\Lambda_{24}} < 0.$$

**证** 因  $\frac{\Lambda_4}{R_0^2(0)} > 0, \partial_\omega\Lambda_{24} < 0$ . 由引理 15.24 和命题 15.20 即得推论.

现  $\partial_\omega\phi^\mu(0)$  已知, 必须计算  $\partial_{r^u}(0)$  和  $\bar{P}_{ij}$ , 如同(15.30), 置

$$\xi_1 = \partial_z W_p^u, \xi_2^- = \partial_c W_p^u, \xi^+ = W_p^u,$$

$P_{x_i x_j} = \delta x_i \Lambda \delta x_j$ , 如同(15.31) 置

$$P_{r3}^+ = P_{rs}(\xi_1, \xi_2^+), P_{r\varphi}^\pm = P_{r\varphi}(\xi_1, \xi_2^\pm), P_{s\varphi}^\pm = P_{s\varphi}(\xi_1, \xi_2^\pm).$$

为计算  $E^\omega(0)$ , 要求  $P_{rs}^- - P_{rs}^+$  是已知的.

**引理 15.26** 置

$$\phi_c^\pm = \delta_\phi(\xi_2^\pm),$$

则当  $\epsilon = 0$  时,  $\phi_c^\pm = -\frac{1}{2}$ .

证 易从变分方程(15.36) 当  $\varepsilon = 0$  时有

$$(\phi_c^\pm)' = -2S_0\phi_c^\pm - S_0.$$

这个方程易于求解,有

$$R_0^2(Z)\phi_c^\pm(Z) = -\int_0^Z R_0^2(s)S_0(s)ds = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^Z \partial_s(R_0^2(s))ds,$$

由此即得结论.

引理 15.27 当  $\varepsilon = 0$  时,

$$P_{r\varphi}^+ = -\frac{1}{2}R_0', P_{sq}^- = -\frac{1}{2}S_0'.$$

证 因  $\phi' = 0(\varepsilon = 0)$ , 简单观察得

$$P_{r\varphi}^\pm = R_0'\phi_c^\pm, P_{sq}^\pm = S_0'\phi_c^\pm.$$

易从上面引理得到结论.

推论 15.28 对  $|Z| \leq M$ ,

$$|P_{r\varphi}^+ - P_{r\varphi}^-| = O(\varepsilon), |P_{sq}^+ - P_{sq}^-| = O(\varepsilon).$$

由定义  $P_{14} = P_{r\varphi}^+ - P_{r\varphi}^-$ ,  $P_{34} = P_{sq}^+ - P_{sq}^-$ . 现计算  $P_{rs}^\pm$ . 首先注意到

$$P_{re}(\xi_1, \xi_2^\pm) = P_{r\omega}(\xi_1, \xi_2^\pm) = 0, \\ P_{re}(\xi_1, \xi_2) = RS.$$

因

$$P_{rs}' = -sP_{rs} + 2\Phi P_{r\varphi} + P_{r\omega} - (\varepsilon a - \Phi)P_{re} \\ - 2\varepsilon a[(b + a\omega) + (d_1 - a)R^2 + (d_2 - a\alpha)R^4]P_{re}, \quad (15.44)$$

由此可得

$$(P_{rs}^\pm)' = -sP_{rs}^\pm + 2\Phi P_{r\varphi}^\pm - (\varepsilon as - \Phi)RS.$$

这个方程的解为

$$R(Z)P_{rs}^\pm(Z) = -\varepsilon C_1 \int_{-\infty}^Z R^2(s)S^2(s)ds + \int_{-\infty}^Z R(Z)\Phi(s) \\ \cdot (R(s)S(s) + 2P_{r\varphi}^\pm(s))ds. \quad (15.45)$$

由引理 15.28 和  $R' = RS$ , 对有界的  $Z$  有

$$R(Z)S(Z) + 2P_{r\varphi}^\pm(Z) = O(\varepsilon).$$

因  $\Phi = O(\epsilon)$ , 由此推出(15.45)的第二个积分为  $O(\epsilon^2)$ .

**引理 15.29** 设  $M > 0$  为给定, 则有

$$R_0(Z)P_{rs}^-(Z) = -\epsilon a \int_{-\infty}^Z (R'_0)^2(s) ds + O(\epsilon^2), Z \in (-\infty, M),$$

$$R_0(Z)P_{rs}^+(Z) = \epsilon a \int_{-\infty}^{\infty} (R'_0)^2(s) ds + O(\epsilon), Z \in (-M, \infty).$$

**证** 结论由(15.45),  $R, S$  的渐近展开和  $R' = RS$  得到.

**引理 15.30** 设  $M > 0$  给定, 则对  $|Z| \leq M$  有

$$R_0(Z)\tilde{P}_{rs}(Z) = -\Lambda'_2 a \epsilon + O(\epsilon^2),$$

其中

$$\tilde{P}_{rs} = P_{rs}^- - P_{rs}^+.$$

**推论 15.31**  $\partial_c r^u(0)$  具有渐近展开

$$\partial_c r^u(0) = Na\epsilon + O(\epsilon^2),$$

这里  $N < 0, N = \frac{\Lambda'_2}{2R_0''(0)}$ .

**证** 由引理 15.29 的结果以及

$$P_{rs}^-(0) = -S'(0)\partial_c r^u(0), \quad S'(0) = \frac{R''(0)}{R(0)}$$

得到.

**推论 15.32** 设  $E''(0) = 0$ , 则

$$E'''(0) = -(\tilde{N}a + O(e^{-\eta_4 M}))\epsilon + O(\epsilon^2),$$

其中  $\tilde{N} > 0, \tilde{N} = 3\Lambda'_2 \partial_\omega \Lambda_2$ .

**证** 将  $\tilde{P}_{rs}$  的表达式代入  $E'''(0)$  得

$$\begin{aligned} E'''(0) &= -6\epsilon a \Lambda'_2 \int_{-\infty}^{\infty} R_0(s) \partial_\omega R_0(s) ds + O(e^{-\eta_4 M})\epsilon + O(\epsilon^2) \\ &= -(3\Lambda'_2 \partial_\omega \Lambda_2 a + O(e^{-\eta_4 M}))\epsilon + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

常数  $\tilde{N} > 0$  是从推论 15.17 得到.

由引理 15.11、引理 15.24 和推论 15.31 有

$$E''(0) = c_1 a \left( b - c_2 \left( d_2 - \frac{1}{3} a a \right) \right) \epsilon^2 + O(\epsilon^3),$$



其中

$$c_1 = 2\Lambda_2' \Lambda_2 \partial_\omega \Lambda_{24} < 0, \quad c_2 = -\frac{\partial_\omega \Lambda_{d_2}}{\partial_\omega \Lambda_{24}} > 0.$$

进一步,当  $E'''(0) = 0$  时,由推论 15.32

$$E'''(0) = -\epsilon_3 \alpha \epsilon + O(\epsilon^2), \quad \epsilon_3 > 0.$$

定理 15.1 的证明实质上已完成,因  $E^{(4)} < 0$  (推论 15.5) 和  $E(0) = E'(0) = 0$ . 当  $E''(0) > 0$  时,则在靠近  $\lambda = 0$  处有  $E(\lambda)$  的二个实零点,其一是正的,另一是负的. 因  $E''(0) < 0$  ( $E''(0) = 0$ ),能推出当  $E''(0)$  改变符号,正零点运动通过原点. 因此  $E''(0) < 0$  存在二个小的实负零点. 特征值为  $O(\epsilon)$  直接从  $E''(0) = O(\epsilon^2)$  和  $E'''(0) = O(\epsilon)$  推出.

为了利用定理 15.2 的结果推出多重脉冲轨道的存在性,必须证明  $\partial_\omega \phi^n(0) \neq 0$ . 这个条件正是推论 15.26 的推论. 对  $b < b^*$  多重脉冲解不稳定来自 [4] 中原来的脉冲是不稳的 ( $b < b^*$ ).

## § 16 广义 Ginzburg-Landau 方程平面波的非线性不稳定性

考虑如下广义 Ginzburg - Landau 方程

$$W_t = \alpha_1 W_{xx} + (\lambda(|W|) + i\omega(|W|))W + \alpha_2 |W|^2 W + \alpha_3 |W|^2 W_x + \alpha_4 W^2 \bar{W}_x, x \in R, t > 0, \quad (16.1)$$

具周期初值条件

$$\begin{cases} W(x, 0) = W_0(x), x \in R, \\ W(x - D, t) = W(x + D, t), D > 0, x \in R, t > 0, \end{cases} \quad (16.2)$$

其中  $W(x, t)$  为复值函数,  $\alpha_j = a_j + ib_j$ ,

$$\begin{cases} \lambda(r) = c_1 + c_2 r^2 + c_3 r^4, \\ \omega(r) = d_1 r^2 + d_2 r^4, \end{cases} \quad (16.3)$$

其中  $c_j, d_j \in R$ , 为方便计, 设  $\alpha_1 = 1$ , GL 方程 (16.1) 的平衡态解

为如下的平面波

$$W_1(x, t) = r_0 e^{i\theta_0 x}, \quad (16.4)$$

其中

$$\begin{cases} \lambda(r_0) = \theta_0^2 - (b_3 - b_4)\gamma_0^2\theta_0, \\ \omega(r_0) = (a_3 - a_4)\gamma_0^2\theta_0. \end{cases} \quad (16.5)$$

T. Kapitula 曾证明

$$\frac{2^{\frac{3}{4}} + \max \left\{ 1, \left( \frac{2}{\Gamma_3} \right)^{\frac{3}{4}} \right\}}{\Gamma_3} \cdot |r_0(B - r_0^2 - 2\theta_0)| < 1$$

和初始能量充分小时, 这里波是非线性稳定的, 其中

$$B = b_3 - b_4, \Gamma_3 = r_0 \lambda'(r_0) + 2B - r_0^2 \theta_0 < 0.$$

这一节, 我们将证明在方程系数的有关条件下, 平面波是非线性不稳定的. 主要定理有

**定理 16.1** 设  $\Gamma_3 > 0$  和  $\inf \{ \operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma_+(\mathcal{L}) \} > 0$ , 则方程 (16.1) 的平面波解是非线性不稳定的, 其中算子  $\mathcal{L}$  将在下面表示. 令

$$W(x, t) = \gamma(x, t) e^{i\theta(x, t)}, \quad (16.6)$$

则方程 (16.1) 可写为

$$\begin{cases} r_t = r_{xx} + r\lambda(r) - r\theta_x^2 + A_+ r^2 r_x + B_- r^3 \theta_x, \\ \theta_t = \theta_{xx} - \omega(r) + \frac{2r_x}{r} \theta_x - B_+ r r_x + A_- r^2 \theta_x, \end{cases} \quad (16.7)$$

其中  $A_{\pm} = a_3 \pm a_4, B_{\pm} = b_3 \pm b_4$ .

为了证明定理 16.1, 我们先对其线性化方程作谱分析, 然后证明非线性不稳定性. 令

$$\begin{cases} r = r_0 + \rho, \\ \theta = \theta_0 + \phi, \end{cases} \quad (16.8)$$

则 (16.7) 变为

$$\left\{ \begin{aligned} \rho_t &= \rho_{xx} + (r_0 + \rho) \left[ \lambda(r_0) + \lambda'(r_0)\rho + \frac{\lambda''(r_0)}{2}\rho^2 + \frac{\lambda'''(r_0)}{6}\rho^3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda^{(4)}(r_0)}{24}\rho^4 \right] - (r_0 + \rho)(\theta_0^2 + 2\theta_0\phi_x + \phi_x^2) + A_+(r_0^2 \\ &\quad + 2r_0\rho + \rho^2)\rho_x + B_-(r_0^3 + 3r_0^2\rho + 3r_0\rho^2 + \rho^3)(\theta_0 + \phi_x), \\ \phi_t &= \phi_{xx} - \left[ \omega(r_0) + \omega'(r_0)\rho + \frac{\omega''(r_0)}{2}\rho^2 + \frac{\omega'''(r_0)}{6}\rho^3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega^{(4)}(r_0)}{24}\rho^4 \right] + \frac{2\rho_x}{r_0 + \rho}(\theta_0 + \phi_x) - B_+(r_0 + \rho)\rho_x \\ &\quad + A_-(r_0^2 + 2r_0\rho + \rho^2)(\theta_0 + \phi_x). \end{aligned} \right.$$

(16.9)

注意到(16.5)有

$$\left\{ \begin{aligned} \rho_t &= \rho_{xx} + [r_0\lambda'(r_0) + \lambda(r_0) - \theta_0^2 + 3B_-r_0^2\theta_0\rho + A_+r_0^2\rho_x \\ &\quad + (B_-r_0^3 - 2r_0\theta_0)\phi_x + (3B_-r_0^2 - 2\theta_0)\rho\phi_x + 2A_+r_0\rho\rho_x \\ &\quad - r_0\phi_x^2 + [3B_-r_0\theta_0 + \lambda'(r_0) + \frac{r_0}{2}\lambda''(r_0)]\rho^2 + [\frac{\lambda''(r_0)}{2} \\ &\quad + \frac{r_0\lambda'''(r_0)}{6} + B_- \theta_0]\rho^3 - \rho\phi_x^2 + A_+\rho^2\rho_x + 3B_-r_0\rho^2\phi_x \\ &\quad + [\frac{\lambda'''(r_0)}{6} + \frac{r_0\lambda^{(4)}(r_0)}{24}]\rho^4 + B_-\rho^3\phi_x + \frac{\lambda^{(4)}(r_0)}{24}\rho^5, \\ \phi_t &= \phi_{xx} + [2A_-r_0\theta_0 - \omega'(r_0)]\rho - \left( B_+r_0 - \frac{2\theta_0}{r_0} \right)\rho_x \\ &\quad + A_-r_0^2\phi_x - B_+\rho\rho_x + \left[ A_- \theta_0 - \frac{\omega''(r_0)}{2} \right]\rho^2 + 2A_-r_0\rho\phi_x \\ &\quad + A_-\rho^2\phi_x - \frac{\omega'''(r_0)}{6}\rho^3 - \frac{\omega^{(4)}(r_0)}{24}\rho^4 + \frac{2\theta_0\rho_x + 2\rho_x\phi_x}{r_0 + \rho}. \end{aligned} \right.$$

(16.10)

由(16.10)可得如下线性化方程

$$U_t = U_{xx} + NU_x + MU, \quad (16.11)$$

其中  $U = \begin{pmatrix} \rho \\ \phi \end{pmatrix}$ ,

$$N = \begin{pmatrix} A_+ r_0^2 & B_- r_0^3 - 2r_0\theta_0 \\ \frac{2\theta_0}{r_0} - B_+ r_0 & A_- r_0^2 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} r_0 r'(\gamma_0) + \lambda(r_0) - \theta_0^3 + 3B_- r_0^2\theta_0 & 0 \\ 2A_- r_0\theta_0 - \omega'(r_0) & 0 \end{pmatrix}.$$

令

$$\mathcal{L} \equiv I_2 \partial_x^2 + N_{\partial_x} + M,$$

$\mathcal{L}$  的定义域为

$$D(\mathcal{L}) = \{y \in L^2(-D, D) \times L^2(-D, D) \mid g(-D) = g(D),$$

$$\mathcal{L}(g) \in L^2(-D, D) \times L^2(-D, D)\},$$

则算子  $\mathcal{L}$  在任何  $L^p$  空间上 ( $1 \leq p \leq \infty$ ) 有界于以下曲线

$$C_s = \{r : |-k^2 I_2 + iNk + (M - rI_2)| = 0, k \in R\}.$$

(16.12)

对  $r \in C_s$  有

$$r(k) = -k^2 + \frac{\Gamma_3}{2} + ia_3 r_0^2 k + \left( \frac{\Gamma_3^2}{4} + \Gamma_1 k^2 + i\Gamma_2 k \right)^{\frac{1}{2}},$$

(16.13)

其中

$$\begin{cases} \Gamma_1 = 4\theta_0^2 - 4b_3 r_0^2 \theta_0 + (B_+ B_- - a_4^2) r_0^4, \\ \Gamma_2 = 2r_0 \theta_0 \omega'(r_0) + a_4 \Gamma_3 r_0^2 + 2A_- B_- r_0^4 \theta_0 \\ \quad - 4A_- r_0^2 \theta_0^2 - B_- r_0^3 \omega'(r_0), \\ \Gamma_3 = r_0 \lambda'(r_0) + 2B_- r_0^2 \theta_0. \end{cases} \quad (16.14)$$

因此

$$\text{Re} r(k) = -k^2 + \frac{\Gamma_3}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\Lambda + \Omega)^{\frac{1}{2}}, \quad (16.15)$$

其中

$$\begin{cases} \Lambda = \frac{\Gamma_3^2}{9} + \Gamma_1 k^2, \\ \Omega = (\Lambda^2 + \Gamma_2^2 k^2)^{\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (16.16)$$

从  $\text{Re}r(k)$  的表达式(2.15) 易得

**引理 16.2** 设  $\Gamma_3 > 0$  且  $k$  充分小, 则  $\text{Re}\gamma(k) > 0$ . 由此可知, GL 方程的平衡解是线性不稳定的.

现考虑非线性不稳定性.

令

$$Q(U) = \begin{pmatrix} h_1(\rho, \rho_x, \phi_x) \\ h_2(\rho_1, \rho_x, \phi_x) \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{cases} h_1(\rho, \rho_x, \phi_x) = (3B_- r_0^2 - 2\theta_0)\rho\phi_x + 2A_+ r_0\rho\rho_x \\ - r_0\phi_x^2 + [3B_- r_0\theta_0 + \lambda'(r_0) + \frac{r_0}{2}\lambda''(r_0)]\rho^2 + \left[\frac{\lambda''(r_0)}{2} \right. \\ \left. + \frac{r_0\lambda'''(r_0)}{6} + B_- \theta_0\right]\rho^3 - \rho\phi_x^2 + A_+ \rho^2\rho_x + 3B_- r_0\rho^2\phi_x \\ \left. + \left[\frac{\lambda'''(r_0)}{6} + \frac{r_0\lambda^{(4)}(r_0)}{24}\right]\rho^4 + B_- \rho^3\phi_x + \frac{\lambda^{(4)}(r_0)}{24}\rho^5, \right. \\ h_2(\rho, \rho_x, \phi_x) = -B_+ \rho\rho_x + \left[A_- \theta_0 - \frac{\omega''(r_0)}{2}\right]\rho^2 + 2A_- r_0\rho\phi_x \\ \left. + A_- \rho^2\phi_x - \frac{\omega'''(r_0)}{6}\rho^3 - \frac{\omega^{(4)}(r_0)}{24}\rho^4 + \frac{2\theta_0\rho_x + 2\rho_x\phi_x}{r_0 + \rho}, \right. \end{cases}$$

则方程(16.10) 可写成

$$U_t = \mathcal{L}U + Q(U). \quad (16.17)$$

显然如果方程(16.17) 的零解是不稳定的, 则(16.17) 的平衡解  $\begin{pmatrix} r_0 \\ \theta_{0x} \end{pmatrix}$  也是不稳定的, 为此我们仅需证明方程(16.17) 零解的不稳定性, 我们用文献[18] 中的定理 9.13 来证明. 为此来证明几个引理.

**引理 16.3** 算子  $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}) \subset L^2(-D, D) \times L^2(-D, D) \rightarrow$

$L^2(-D, D) \times L^2(-D, D)$  是扇形的,  $\mathcal{L}$  的图模等价于  $D(\mathcal{L})$  的模.

证 因 Laplace 算子是扇形的, 算子  $\mathcal{L}$  是 Laplace 算子的低阶扰动, 由  $\mathcal{L}$  算子的定义可知  $\mathcal{L}$  的图模等价于  $D(\mathcal{L})$  的模.

由引理 16.2 可得

**引理 16.4** 设  $\Gamma_3 > 0$ , 则存在正数  $\omega_0$  使得

$$\sigma_+(\mathcal{L}) = \sigma(\mathcal{L}) \cap \{x \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} x > 0\} \neq \emptyset. \quad (16.18)$$

**引理 16.5** 设  $O$  为  $D(\mathcal{L})$  中原点的邻域, 则  $Q: O \rightarrow L^2(-D, D) \times L^2(-D, D)$  为  $C^1$  函数, 具有局部 Lipschitz 连续导数, 且满足

$$Q(0) = 0, Q'(0) = 0. \quad (16.19)$$

其中  $Q'(0)$  表示  $Q(U)$  在原点的 Fréchet 导数.

证 由  $h_1(\rho, \rho_x, \phi_x)$  和  $h_2(\rho, \rho_x, \phi_x)$  的定义,  $Q(0) = 0$ , 令  $D_1, D_2$  分别表示对于  $\rho, \phi$  的 Fréchet 导数, 则有

$$\begin{aligned} D_1 h_1 = & (3B_- r_0^2 - 2Q_0)\phi_x + 2A_+ \left( r_0 \rho_x + r_0 \rho \frac{\partial}{\partial x} + \rho \rho_x + \frac{1}{2} \rho^2 \frac{\partial}{\partial x} \right) \\ & + 2 \left[ 3B_- r_0(\theta_0 + \phi_x) + \lambda'(r_0) + \frac{r_0}{2} \lambda''(r_0) + 3B_- r_0 \rho \phi_x \right] \rho \\ & + 3 \left[ \frac{\lambda''(r_0)}{2} + \frac{r_0 \lambda''(r_0)}{6} + B_- \theta_0 \right] \rho^2 + 4 \left[ \frac{\lambda'''(r_0)}{6} \right. \\ & \left. + \frac{r_0 \lambda^{(4)}(r_0)}{24} \right] \rho^3 + 5 \frac{\lambda^{(4)}(r_0)}{24} \rho^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 h_1 = & [(3B_- r_0^2 - 2\theta_0) - 2\phi_x + 3B_- r_0 \rho + B_- \rho^2] \rho \frac{\partial}{\partial x} \\ & - 2r_0 \phi_x \frac{\partial}{\partial x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_1 h_2 = & [-B_+ \rho_x - 2A_- r_0 \phi_x] + \rho \left[ -B_- \frac{\partial}{\partial x} + 2A_- \theta_0 - \omega''(r_0) \right. \\ & \left. + 2A_- \phi_x \right] - \frac{\omega''(r_0)}{2} \rho^2 - \frac{\omega^{(4)}(r_0)}{6} \rho^3 \\ & + \frac{2\theta_0 + 2\phi_x}{r_0 + \rho} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{2\theta_0 \rho_x + 2\rho_x \phi_x}{(r_0 + \rho)^2}, \end{aligned}$$

$$D_2 h = \left( 2A_- r_0 \rho + A_- \rho^2 + \frac{2\rho_x}{r_0 + \rho} \right) \frac{\partial}{\partial x}.$$

因此

$$Q'(U) \Big|_{U=0} = \begin{bmatrix} D_1 h_1 & D_2 h_1 \\ D_1 h_2 & D_2 h_2 \end{bmatrix} \Big|_{U=0} = 0,$$

且  $Q: O \rightarrow L^2(-D, D) \times L^2(-D, D)$  为  $C^1$  函数, 令

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & (3B_- r_0^2 - 2\theta_0) \phi_x + 2 \left[ 3B_- r_0 (\theta_0 + \phi_x) + \lambda'(r_0) \right. \\ & \left. + \frac{r_0}{2} \lambda''(r_0) + 3B_- r_0 \rho \phi_x \right] \rho + 2A_+ (r_0 \rho_x + \rho \rho_x) + 3 \left[ \frac{\lambda''(r_0)}{2} \right. \\ & \left. + \frac{r_0 \lambda'''(r_0)}{6} + B_- \theta_0 \right] \rho^2 + 4 \left[ \frac{\lambda'''(r_0)}{6} + \frac{r_0 \lambda^{(4)}(r_0)}{24} \right] \rho^3 + 5 \frac{r^{(4)}(r_0)}{24} \rho^4, \end{aligned}$$

$$\Phi_1 = 2A_+ \left( r_0 \rho + \frac{1}{2} \rho^2 \right),$$

$$\Phi_2 = -2r_0 \phi_x + [(3B_- r_0^2 - 2\theta_0) - 2\phi_x + 3B_- r_0 \rho + B_- \rho^2] \rho,$$

$$\begin{aligned} \Psi_2 = & -2A_- r_0 \phi_x + [2A_- \theta_0 - \omega''(r_0) + 2A_- \phi_x] \rho - B_+ \rho_x \\ & - \frac{\omega'''(r_0)}{2} \rho^2 - \frac{\omega^{(4)}(r_0)}{6} \rho^3 - \frac{2\theta_0 \rho_x + 2\rho_x \phi_x}{(r_0 + \rho)^2}, \end{aligned}$$

$$\Phi_3 = -B_+ \rho + \frac{2\theta_0 + 2\phi_x}{r_0 + \rho},$$

$$\Phi_4 = 2A_- r_0 \rho + A_- \rho^2 + \frac{2\rho_x}{r_0 + \rho}.$$

$$\text{令 } R_1(U) = \begin{bmatrix} \Psi_1 & O \\ \Psi_2 & O \end{bmatrix}, R_2(U) = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_3 & \Phi_4 \end{bmatrix}, \text{ 则有}$$

$$Q'(U) = R_1(U) + R_2(U) \frac{\partial}{\partial x}.$$

现证  $Q(U)$  具有局部 Lip 连续导数, 对任何  $U, V \in O$ ,

$$U = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \phi_1 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} \rho_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix}, \forall H = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in O,$$

有

$$\| [Q'(U) - Q'(V)]H \| \leq \| [R_1(U) - R_1(V)]H \|$$

$$\begin{aligned}
& + \| [R_2(U) - R_2(V)]H_x \| \leq \| \Psi_1(U)f - \Psi_1(V)f \| \\
& + \| \Psi_2(U)f - \Psi_2(V)f \| + \| \Phi_1(U)f_x - \Phi_1(V)f_x \| \\
& + \| \Phi_2(U)g_x - \Phi_2(V)g_x \| + \| \Phi_3(U)f_x - \Phi_3(V)f_x \| \\
& + \| \Phi_4(U)g_x - \Phi_4(V)g_x \|.
\end{aligned}$$

注意到  $H'(-D, D) \hookrightarrow L^\infty(-D, D)$ , 我们有

$$\begin{aligned}
& \| \Psi_1(U)f - \Psi_1(V)f \| \leq [13B_- r_0^2 - 2\theta_0] \| \phi_{1x} - \phi_{2x} \| \\
& + 2[3B_- r_0\theta_0 + \lambda'(r_0) + \frac{r_0}{2}\lambda''(r_0)] \| \rho_1 - \rho_2 \| + 6[\beta_- r_0\theta_0] \\
& (\| \phi_{1x} \| \| \rho_1 - \rho_2 \|_\infty + \| \rho_2 \|_\infty \| \phi_{1x} - \phi_{2x} \|) + 3[B_- r_0] \\
& \cdot (\| \rho_1 \|_\infty^2 \| \phi_{1x} - \phi_{2x} \| + \| \phi_{2x} \| (\| \rho_1 \|_\infty + \| \rho_2 \|_\infty) \| \rho_1 \\
& - \rho_2 \|_\infty) + 2[A_+ r_0] \| \rho_{1x} - \rho_{2x} \| + 2[A_+] (\| \rho_{1x} \| \| \rho_1 \\
& - \rho_2 \|_\infty + \| \rho_2 \|_\infty \| \rho_{1x} - \rho_{2x} \|) + 3 \left| \frac{\lambda''(0)}{2} + \frac{r_0\lambda'''(r_0)}{6} + B_- \theta_0 \right| \\
& \cdot (\| \rho_1 \|_\infty + \| \rho_2 \|_\infty) \| \rho_1 - \rho_2 \| + 4 \left| \frac{\lambda'''(r_0)}{6} + \frac{r_0\lambda^{(4)}(r_0)}{24} \right| (\| \rho_1 \|_\infty^2 \\
& + \| \rho_1 \|_\infty \| \rho_2 \|_\infty + \| \rho_2 \|_\infty^2) \| \rho_1 - \rho_2 \| + 5 \left| \frac{\lambda^{(4)}(r_0)}{24} \right| (\| \rho_1 \|_\infty^3 \\
& + \| \rho_1 \|_\infty^2 \| \rho_2 \|_\infty + \| \rho_1 \|_\infty \| \rho_2 \|_\infty^2 + \| \rho_2 \|_\infty^3) \| \rho_1 - \rho_2 \| \| f \| \\
& \leq C(\| U \|_{H^1}, \| V \|_{H^1}) \| U - V \|_{H^1} \| f \|.
\end{aligned}$$

类似地有

$$\begin{aligned}
& \| \Psi_2(U)f - \Psi_2(V)f \| \leq C(\| U \|_{H^1}, \| V \|_{H^1}) \| U - V \|_{H^1} \| f \|, \\
& \| \Phi_1(U)f_x - \Phi_1(V)f_x \| \leq C(\| U \|_{H^1}, \| V \|_{H^1}) \| U - V \|_{H^1} \| f_x \|, \\
& \| \Phi_2(U)g_x - \Phi_2(V)g_x \| \leq C(\| U \|_{H^1}, \| V \|_{H^1}) \| U - V \|_{H^1} \| g_x \|, \\
& \| \Phi_3(U)f_x - \Phi_3(V)f_x \| \leq C(\| U \|_{H^1}, \| V \|_{H^1}) \| U - V \|_{H^1} \| f_x \|, \\
& \| \Phi_4(U)g_x - \Phi_4(V)g_x \| \leq C(\| U \|_{H^1}, \| V \|_{H^1}) \| U - V \|_{H^1} \| g_x \|.
\end{aligned}$$

因此存在常数  $\tilde{C}$  使得

$$\| Q'(U) - Q'(V) \| \leq \tilde{C}(\| U \|_{H^1}, \| V \|_{H^1}) \| U - V \|_{H^1}.$$

这就完成了引理的证明.

利用引理 16.3—16.5 和文献[18]中的定理 9.1.3, 当  $\Gamma_3 > 0$



和  $\inf\{\operatorname{Re}\lambda : \alpha \in \sigma_4(\mathcal{L})\} > 0$  时, 方程(16.17) 的零解是不稳定的, 因此定理 16.1 得证.

## 参 考 文 献

- [1] Guo Boling, Gao Hongjun, Finite dimensional behavior for a generalized Ginzburg-Landau equation, *Prog. Nat. Sci.*, 1995, 659—610.
- [2] R. Temam. *Infinite Dimensional Dynamical systems in mechanics and Physics*, 1988.
- [3] J. Duan and P. Holmes, Fronts, Domain walls and pulses for a generalized Ginzburg-Landau equation, *Proc. Edinburgh math. Soc.* 38, 1994, 77—79.
- [4] A. Doelman, R. A. Gardner, C. K. R. T. Jones, Instability of quasi periodic solution of the solutions of The Ginzburg-Landau equation, *Proc. Rog. Soc. Edinburgh*, 125A, 1995, 501—517.
- [5] T. Kapitule, On the nonlinear stability of plane waves for the Ginzburg-Landau equation, *Comm. Pure. Appl. Math.* 47, 1994, 831—841.
- [6] 高洪俊, 郭柏灵, 一维广义 Ginzburg-Landau 方程的有线维惯性形式, *中国科学*, 25 (12), 1995, 1233—1247.
- [7] Gao Hongjun, Exponential attractors for a generalized Ginzburg-Landau equation, *Appl. Math. (Chinese)*, Vol. 16, No. 9, 1995, 877—882.
- [8] P. Constantin, A Construction of inertial manifolds *Contemporary Math.* Vol. 99, 1989, 27—62.
- [9] J. Duan, E. S. Titi, P. holmes, Regularity, approximation and asymptotic dynamics for a generalized Ginzburg-Landau equation, *Nonlinearity*, 6, 1993, 915—933.
- [10] Gao Hongjun and Guo Boling, On the Nunber of determining nodes for the generalized Ginzburg-Landau equation, *J. Part. Diff, Eqs.*, 10, 1997, 97—106.
- [11] Guo Boling, Lu Bainian, Spatiatem polar Complexity of the cubic Ginzburg-Landau equation, *Comm. In Nonlinear Sci. Number, Simal.*, 1:4, 1996, 12—17.
- [12] Guo Boling, Jing Zhujuan, Lu Bainian, Slow time-periodic Solutions of cubicquintic Ginzbury-Landau equation( I ), Equilibria problem, *Prog. Nat. Sci.*, Vol. 8, No. 4, 1998, 403—415.
- [13] Guo Boling, Jing Zhujun, Lubaiman, Slow time-periodic Solutions of cubicquintic Ginzbury-Landau equation( II ), Equilibria problem, *Prog. Nat. Sci.*, Vo8., No. 5, 1998, 539—547.
- [14] Guo Boling, Lu Bainian, Stability of travelling wave solutions of the derivative Ginzburg-Landau, equations, to appear.
- [15] I. Kukavica, An upper bound for the winding number for solutions of the [17]

- Ginzburg-Landau equations, *Indiana Uni. Math. J.*, Vol. 41, No. 3, 825—836.
- [16] Guo Boling, Chang Qianshun, Attractors and dimensions for discretizations of a generalized Ginzburg-Landau equation, *J. DDE*, 9(4), 1996, 365—383.
  - [17] T. Kapitula, Stability criterion for bright solitary waves of the perturbed cubic quintic Schrödinger equation, *Phys. D*, 116, 1998, 95—120.
  - [18] Guo Boling, Jiang Murong, Time-Periodic Solutions to the Ginzburg-Landau BBM equations, *J. Part. Diff. Eqs.*, 14, 2001, 97—104.
  - [19] Guo Boling, Yun Rong, Almost periodic solution of generalized Ginzburg-Landau equation, *Prog. Natural. Sci.*, Vol. 11, No 7, 2001, 503—515.
  - [20] Yongsheng Li, Boling Guo, Global existence of solution to derivative 2D Ginzburg-Landau equation, *J. Math. Anal. Appl.*, 249, 412—432.
  - [21] B. Guo and B. Wang, Finite dimensional behavior for the derivative Ginzburg-Landau equation in two spatial dimensions, *Phy. D.*, 89, 1995, 83—90.
  - [22] H. and J. Duan, On the initial value problem for the generalized 2D Ginzburg-Landau equation, *J. Math. Anal. Appl.*, 216, 1997, 536—548.
  - [23] Guo Boling, Wang Bixiang, Gevrey regularity and approximate inertial manifolds for the derivative Ginzburg-Landau equations, *Discrete and Continuous Dynamical system* 2 (40), 1996, 455—466.
  - [24] Guo Boling, Wang Bixiang, Approximation to the global attractor for the Landau-Lifshitz equation of the ferromagnetic chain, *Beijing Math. J.*, 1995, 164—175.
  - [25] Guo Boling, Jiang Murong, attractors for the Ginzburg-Landau-BBM equations in an unbounded domain, *Acta. Math. Sci.*, 20(1), 2000, 122—130.
  - [26] Boling Guo, Bixiang Wang, Exponential attractors for the generalized Ginzburg-Landau equation, *Acta Math. Sinica, English Series*, Vol. 16, No. 3, 2000, 515—526.
  - [27] Henry D., *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Springer-Verlag, New York (1981).

### 第三章 高维 Ginzburg-Landau 方程的整体解及其渐近性质

#### § 1 高维 Ginzburg-Landau 方程的整体解

GL 方程

$$\partial_t u = Ru + (1 + i\nu)\Delta u - (1 + i\mu)|u|^{2\sigma}u, \quad (1.1)$$

对应的 NLS 方程为

$$\partial_t u = i\nu\Delta u - i\mu|u|^{2\sigma}u. \quad (1.2)$$

在零解附近线性化方程(1.1)得

$$\partial_t \tilde{u} = R\tilde{u} + (1 + i\nu)\Delta \tilde{u}. \quad (1.3)$$

小扰动解具  $\tilde{u}(x, t) = \tilde{a}(t)\exp(i\xi x)$ , 其中  $\xi \in 2\pi\mathbb{Z}^d ((2\pi\mathbb{Z})^d)$ ,  $\tilde{a}(t)$  满足方程

$$\partial_t \tilde{a} = R\tilde{a} - (1 + i\nu)|\xi|^{2\sigma}\tilde{a}. \quad (1.4)$$

由此可知小扰动关于零解:

当  $|\xi|^2 < R$  时, 线性不稳定,

当  $|\xi|^2 > R$  时, 线性渐近稳定,

当  $|\xi|^2 = R$  时, 线性中性稳定.

(1.1) 最简单的非平凡空间周期解为旋转波解, 具有形式

$$u(x, t) = a \exp[i(\xi \cdot x - \omega t)], \quad (1.5)$$

其中  $a \in \mathbb{C}$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ ,  $\xi \in 2\pi\mathbb{Z}^d$  满足

$$\omega = \mu R + (\nu - \mu)|\xi|^2, |a|^{2\sigma} = R - |\xi|^2. \quad (1.6)$$

对应于  $\xi = 0$ , 最一般的是空间齐次解, 即 Stoke 解. 对于每个波矢量  $\xi$  使得  $|\xi|^2 < R$ , (1.5), (1.6) 定义具有圆模的旋转波解. 这些解在许多物理应用问题中具有重要作用. 原因之一是, 对于 CGL 方程的初值问题的存在性人们更关心在空间  $L^p(\mathbb{R}^d)$  中比起在空

间  $L^p(\mathbb{R}^d)$  中, 由于旋转波(1.5)的简单形式, 它的线性稳定性更易于精确地分析. 对于 CGL 方程(1.1)关于旋转波解(1.5)的简单线性化, 反而导致具有变系数的方程. 如果我们引入如下形式扰动解:

$$u(x, t) = a \exp[i(\xi \cdot x - \omega t)][1 + \varepsilon u(x, t)], \quad (1.7)$$

则可得到线性化方程

$$\begin{aligned} \partial_t u = & 2(1 + i\nu) i\xi \cdot \Delta u + (1 + i\nu) \Delta \bar{u} \\ & - (1 + i\mu) \sigma |a|^{2\sigma} (\bar{u} + \bar{u}^*), \end{aligned} \quad (1.8)$$

其中  $\bar{u}^*$  表示  $\bar{u}$  的复数共轭, 这时方程(1.8)分为实部和虚部, 均为常系数方程, 可用 F 氏分析.

我们分析(1.8)齐次解的线性稳定性. (1.8)简化为

$$\partial_t u = (1 + i\nu) \Delta \bar{u} - (1 + i\mu) \sigma R (\bar{u} + \bar{u}^*). \quad (1.9)$$

当(1.9)写为  $\bar{u}$  的实部  $\bar{u}_R$  和虚部  $\bar{u}_I$  线性方程时, 可得:

$$\partial_t \begin{bmatrix} \bar{u}_R \\ \bar{u}_I \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta - 2\sigma R & -\nu \Delta \\ \nu \Delta - 2\mu \sigma R & \Delta \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_R \\ \bar{u}_I \end{bmatrix}. \quad (1.10)$$

可以证明, 波矢量  $\xi$  的 F 氏模当

$$(1 + \nu^2) |\xi|^4 + 2\sigma R (1 + \mu\nu) |\xi|^2 > 0 \quad (1.11)$$

时, 具有指数衰减. 易知当  $1 + \mu\nu \geq 0$  时, 对于某些  $\sigma, R$  成立.

更为一般的旋转波解为调和分析解, 具有形式

$$u(x, t) = a(t) \exp(i\xi \cdot x), \quad (1.12)$$

其中复值振幅  $a = a(t)$  满足

$$\frac{da}{dt} = [R - (1 + i\nu) |\xi|^2] a - (1 + i\mu) |a|^{2\sigma} a. \quad (1.13)$$

用  $a^*$  乘方程(1.13), 分开实部和虚部可得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |a|^2 = (R - |\xi|^2) |a|^2 - |a|^{2\sigma+2}, \quad (1.14)$$

$$\frac{1}{2i} \left( a^* \frac{da}{dt} - a \frac{da^*}{dt} \right) = -\nu |\xi|^2 |a|^2 - \mu |a|^{2\sigma+2}. \quad (1.15)$$

容易看到, 当  $R - |\xi|^2 < 0$  时, 这些解是指数衰减于零的, 此时这些解是平凡解稳定流形的部分. 当  $R - |\xi|^2 = 0$  时, 这时解代数地衰减于零, 这反映了零解的 margin 稳定性. 当  $R - |\xi|^2 > 0$  时, 则

对于矢量  $\xi$ , 这些解是指数吸引于旋转波解. 此时这些解位于零解的不稳定流形和旋转波解的稳定流形的交集上.

具行波的旋转波解为

$$u(x, t) = \exp(-iat) v(x - ct), \quad (1.16)$$

其中  $\alpha \in \mathbb{R}$  为相频率,  $c \in \mathbb{R}^d$  为波速,  $v = v(z)$  为复值函数,  $z = x - ct \in \mathbb{R}^d$  满足

$$(R + i\alpha)v + (1 + i\nu)\Delta_Z v - c \cdot \nabla_Z v - (1 + i\mu)|v|^{2\sigma}v = 0. \quad (1.17)$$

当  $c=0$  时, 此类行波解也称为驻波解, 当  $\omega = \alpha + \xi \cdot c$  成立时, 旋转波(1.5)为(1.17)的解.

行波解的稳定性是不容易得到的, 例如, 为研究它们的线性稳定性, 引入扰动形式

$$u(x, t) = \exp(-iat) [v(x - ct) + \varepsilon v(x - ct, t)], \quad (1.18)$$

代入 CGL 方程(1.1), 保留  $\varepsilon$  的一阶项得

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{v} = & (R + i\alpha)\tilde{v} + (1 + i\nu)\Delta_Z \tilde{v} - c \cdot \nabla_Z \tilde{v} - (1 + i\mu)|v|^{2\sigma}\tilde{v} \\ & - \sigma(1 + i\mu)|v|^{2\sigma-2}v(v^* \tilde{v} + \tilde{v} v^*). \end{aligned} \quad (1.19)$$

右端的算子不依赖于  $z$ , 因此线性稳定性分析归结为算子半群的研究, 这是不容易的, 因为算子一般具有复杂依赖于  $z$  的系数.

现考虑 GL 方程特殊情况  $\mu = \nu$ , 引入复值场  $v = v(x, t)$  为

$$u(x, t) = \exp(-iRt)v(x, t), \quad (1.20)$$

其中  $v(x, t)$  满足

$$\partial_t v = -(1 + i\mu) \frac{\delta G}{\delta v^*}, \quad (1.21)$$

这里

$$\frac{\delta G}{\delta v^*} = -\Delta v + |v|^{2\sigma}v - Rv. \quad (1.22)$$

引入 Ginzburg-Landau 泛函  $G$

$$G = \int_{\mathbb{R}^d} \left( |\Delta v|^2 + \frac{1}{\sigma+1} |v|^{2\sigma+2} - R|v|^2 \right) dx. \quad (1.23)$$

通过流(1.21)计算  $G$  的导数得

$$\begin{aligned}\frac{dG}{dt} &= \int_{\mathcal{A}} \left( \frac{\delta G}{\delta v} \partial_t v + \frac{\delta G}{\delta v^*} \partial_t v^* \right) dx \\ &= -2 \int_{\mathcal{A}} \left| \frac{\delta G}{\delta v} \right|^2 dx.\end{aligned}\quad (1.24)$$

这表明  $G$  为单调递减函数. 除非  $\frac{\delta G}{\delta v^*} = 0$ , 这是流 (1.21) 的定常点, 也是 GL 流的驻定波, 符合一种特殊情况——圆的驻定调和波.

$$v(x) = b \exp(i\xi \cdot x), \quad |b|^2 = R - |\xi|^2 > 0, \quad (1.25)$$

其中  $b \in \mathbb{C}$ ,  $\xi \in 2\pi\mathbb{Z}^d$ , 当  $d=1$  时, 定常点满足 ODE:

$$-\partial_{xx}v + |v|^{2\sigma}v - Rv = 0. \quad (1.26)$$

用相平面分析可得它的存在性. 更进一步, 这些解能用椭圆函数的明显表达式表出 ( $\sigma=1, 2$ ), 当  $\sigma>2$  且为整数时, 可用超椭圆函数表出.

一般说来, (1.24) 表明  $G$  可形式上看作流的整体 Lyapunov 函数, 事实上, 待证明它的充分正则性时可严格建立它. 任何定常解  $v$  的稳定性能由泛函  $G$  的 Hessian 算子  $\mathcal{H}(v)$  在点  $v$  的谱决定, 即

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(v) &= \begin{pmatrix} \frac{\delta^2 G}{\delta v^* \delta v} & \frac{\delta^2 G}{\delta v^* \delta v^*} \\ \frac{\delta^2 G}{\delta v \delta v} & \frac{\delta^2 G}{\delta v \delta v^*} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\Delta + (\sigma+1)|v|^{2\sigma} - R & \sigma|v|^{2\sigma-2}v^2 \\ \sigma|v|^{2\sigma-2}v^{*2} & -\Delta + (\sigma+1)|v|^{2\sigma} - R \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (1.27)$$

Hessian 为具实二次型的自共轭线性算子, 它为  $G$  在  $v$  上的二次变分. 零在  $\mathcal{H}(v)$  的谱中永远是至少为 1 的乘子. 因  $(iv, -iv^*)^T$  永远是零向量,  $\mathcal{H}(v)$  的谱的一般分析是困难的, 因它具有非常数系数.

当  $v$  为定态调和波 (1.25) 时, Hessian 算子 (1.27) 具酉相似于常系数自共轭算子

$$\mathcal{H}(v) = \begin{pmatrix} -\Delta - 2i\xi \cdot \nabla + \sigma|b|^{2\sigma} & \sigma|b|^{2\sigma} \\ \sigma|b|^{2\sigma} & -\Delta + 2i\xi \cdot \nabla + \sigma|b|^{2\sigma} \end{pmatrix}, \quad (1.28)$$

它的谱可通过 F 氏分析. 圆定常调和波 (1.25) 的不稳定流形的维数为非零  $\xi \in 2\pi\mathbb{Z}^d$  的数目, 使得

$$|\xi|^4 + 2\sigma|b|^{2\sigma}|\xi|^2 - 4(\xi \cdot \xi)^2 < 0, \quad (1.29)$$

于此设没有  $\xi$  使得方程 (1.29) 左端为零, 特别, 圆定常调和波 (1.25) 是否稳定取决于  $(\sigma+2)|\xi|^2 < \sigma R$ . 当  $d=1, \sigma=1$ , (1.26) 的每个定常点的不稳定流形能通过 Hessian (1.27) 由可积 NLS 方程的技巧进行分析.

现考虑 GL 方程的整体弱解.

为方便计, 令  $r=\sigma+1$ , 考虑广义 GL 方程

$$\partial_t u = Ru + (1+iv)\Delta u - (1+i\mu)|u|^{2(r-1)}u, \quad (1.30)$$

具初始条件

$$u(0, x) = u_0(x). \quad (1.31)$$

设  $R>0, r>1(\sigma>0), \nu, \mu$  为实数, 无损于一般性, 让

$$\int_{\mathbb{T}^d} dx = 1, \quad (1.32)$$

利用记号

$$\langle f \rangle = \int_{\mathbb{T}^d} f dx, \quad (1.33)$$

其中 (1.33) 表示  $f$  在环面上的平均值.

以  $C([0, \infty), w-L^2(\mathbb{T}^d))$  表示从  $[0, \infty)$  到  $w-L^2(\mathbb{T}^d)$  的连续函数空间, 它意味着  $v \in C([0, \infty), w-L^2(\mathbb{T}^d))$ . 即对任意  $\phi \in L^2(\mathbb{T}^d)$ , 函数  $t \mapsto (\phi^* v(t)) \in C([0, \infty))$ .

**定理 1.1** 给定  $u_0(x) \in L^2(\mathbb{T}^d)$ , 则存在函数

$$u(x, t) \in C([0, \infty), w-L^2(\mathbb{T}^d)) \cap L^2_{\text{loc}}([0, \infty), H^1(\mathbb{T}^d)) \cap L^2_{\text{loc}}([0, \infty), L^{2r}(\mathbb{T}^d)), \quad (1.34)$$

满足初始条件 (1.31) 和 GL 方程 (1.1) 的弱形式

$$0 = \langle \phi^* u(t_2) \rangle - \langle \phi^* u(t_1) \rangle - k \int_{t_1}^{t_2} \langle \phi^* u \rangle dt'$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \langle (1 + i\nu) \nabla \phi^* \nabla u \rangle dt' + \int_{t_1}^{t_2} \langle (1 + i\mu) \phi^* \cdot |u|^{2(r-1)} u \rangle dt'. \quad (1.35)$$

对  $\forall [t_1, t_2] \subset [0, +\infty)$ ,  $\forall$  试验函数  $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ , 进一步, 它满足能量不等式

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla u\|_{L^2}^2 dt' + \int_0^t \|u\|_{L^{2r}}^{2r} dt' \\ & \leq \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2}^2 + k \int_0^t \|u\|_{L^2}^2 dt', \quad \forall t \in [0, \infty). \end{aligned} \quad (1.36)$$

**附注 1.2** 上述弱解在两个方面强于依分布意义的弱解. 首先,  $u$  为 GL 方程依分布意义下的弱解, 它形式上可由 (1.30) 乘以试验函数  $w = w(t, x) \in C_c^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R}^d)$  在  $[0, \infty) \times \mathbb{R}^d$  上积分, 分部积分后, 将所有导数转移到试验函数得到. 如  $u$  满足 (1.35), 则它满足 GL 方程的分布形式, 其中取试验函数  $w = \phi(t) \phi^*(x)$ ,  $\phi \in C_c^\infty([0, \infty))$ ,  $\phi^* \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ . 事实上, 在 (1.35) 中让  $t_1 = 0$ , 乘以  $\partial_t \phi(t_2)$  对  $t_2$  在  $[0, \infty)$  积分, 分部积分后置空间导数于  $\phi^*$ , 因试验函数的线性组合在  $C_c^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R}^d)$  中是稠密的, 由此推出由 (1.35) 得到的  $u$  为 GL 方程依分布意义下的弱解. 其次, 对于定理 1.1 中的弱解还要求满足能量不等式 (1.36).

**附注 1.3** 证明的技巧来自 Leray 证明 Navier-Stokes 方程的方法, 对于许多其他方程也采用了这种方法. 因此, 我们给予较详细的证明. 粗略地说, 这种想法是构造逼近方程 (1.35) 的近似解序列, 然后证明这种序列是相对紧的, 它充分强地允许我们对任何收敛子序列对近似方程取极限为 (1.35). 它既照顾到较易建立弱拓扑下的紧性和强拓扑下的收敛性, 惟一性不能靠紧性原理解决, 它通常要求附加解的正则性结果.

**证** 分为四步证明.

第一步, 构造一系列近似解, 使它满足弱解形式和能量不等式. 例如, 用 Fourier-Galerkin 方法. 令  $P_\varepsilon$  表示  $L^2$  正交投影, 它由  $|\xi| \leq \frac{1}{\varepsilon}$  的波矢量的一切 F 氏模所张.



令  $u_{0\epsilon} = P_\epsilon u_0, u_\epsilon = u_\epsilon(t)$  为初值 ODE 初值问题

$$\begin{cases} \partial_t u_\epsilon = R u_\epsilon + (1 + i\nu) \Delta u_\epsilon - (1 + i\mu) P_\epsilon (|u_\epsilon|^{2(r-1)} u_\epsilon), \\ u_\epsilon(0) = u_{0\epsilon} \in P_\epsilon L^2(\mathbb{R}^d) \subset C^\infty(\mathbb{R}^d) \end{cases} \quad (1.37)$$

的惟一解, 正则化初值  $u_{0\epsilon}(x)$  依  $L^2(\mathbb{R}^d)$  模强收敛于  $u_0(x)$  ( $\epsilon \rightarrow 0$ ) 且满足  $\|u_{0\epsilon}\|_{L^2} \leq \|u_0\|_{L^2}$ .

更进一步, 这些解满足弱形式 (1.35) 的正则化形式

$$\begin{aligned} 0 = & \langle \phi^* u_\epsilon(t_2) \rangle - \langle \phi^* u_\epsilon(t_1) \rangle - R \int_{t_1}^{t_2} \langle \phi^* u_\epsilon \rangle dt' \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \langle (1 + i\nu) \nabla \phi^* \nabla u_\epsilon \rangle dt' \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \langle (1 + i\mu) \phi_\epsilon^* |u_\epsilon|^{2(r-1)} u_\epsilon \rangle dt', \end{aligned} \quad (1.38)$$

$\forall [t_1, t_2] \subset [0, \infty), \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ , 其中  $\phi_\epsilon \equiv P_\epsilon \phi$  依  $C^\infty$  模收敛于  $\phi, \epsilon \rightarrow 0$ . 这些解满足能量不等式 (1.36) 的正则化形式, 有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|u_\epsilon(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla u_\epsilon\|_{L^2}^2 dt' + \int_0^t \|u_\epsilon\|_{L^{2r}}^{2r} dt' \\ & = \frac{1}{2} \|u_{0\epsilon}\|_{L^2}^2 + R \int_0^t \|u_\epsilon\|_{L^2}^2 dt', \end{aligned} \quad (1.39)$$

$\forall t \in [0, \infty)$ . 第一步来自标准的 ODE 的 Picard 局部存在性理论应用于 (1.37) 在有限维空间  $P_\epsilon L^2(\mathbb{R}^d)$  上成立, 由 (1.39) 可知近似解在  $L^2$  上整体一致有界. 因而保证方程组 (1.37) 的解是整体的.

第二步, 证明序列  $u_\epsilon$  在空间

$$\begin{aligned} & C([0, \infty), w - L^2(\mathbb{R}^d)) \wedge w - L^2_{\text{loc}}([0, \infty), H^1(\mathbb{R}^d)) \wedge \\ & w - L^2_{\text{loc}}([0, \infty), L^{2r}(\mathbb{R}^d)) \end{aligned} \quad (1.40)$$

中是一个相对紧集 (具有紧闭包).

**附注 1.4** 这里符号  $\wedge$  表示所含映照依弱拓扑下的交集. 它意味着序列在交集上是收敛的, 当且仅当在组成的每个空间上是收敛的, 这些空间收敛的意义分别如下:

$v_n \rightarrow v$  依  $w - L^2_{\text{loc}}([0, \infty), H^1(\cdot^{-d}))$  收敛, 即当  $\forall T > 0, \forall \phi \in L^2_{\text{loc}}([0, \infty), H^1(\cdot^{-d}))$  有

$$\int_0^T \langle \phi^* v_n + \nabla \phi^* \cdot \nabla v_n \rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle \phi^* v + \nabla \phi^* \cdot \nabla v \rangle dt, \quad (1.41)$$

类似地,  $v_n \rightarrow v$  依  $w - L^2_{\text{loc}}([0, \infty), L^{2r}(\cdot^{-d}))$  收敛, 即对  $\forall T > 0, \forall \psi \in L^{(2r)'}_{\text{loc}}([0, \infty), L^{(2r)'}(\cdot^{-d}))$  有

$$\int_0^T \langle \psi^* v_n \rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle \psi^* v \rangle dt, \quad (1.42)$$

其中  $(2r)' = 2r/(2r-1)$ . 最后  $v_n \rightarrow v$  依  $C([0, \infty), w - L^2(\cdot^{-d}))$  收敛, 即对  $\forall \phi \in L^2(\cdot^{-d})$  有

$$\langle \phi^* v_n(t) \rangle \rightarrow \langle \phi^* v(t) \rangle, \quad (1.43)$$

$\forall [0, \infty)$  中紧子集上一致成立.

第二步的证明. 方程(1.39)连同  $\|u_{0\epsilon}\|_{L^2} \leq \|u_0\|_{L^2}$  推出

$$\frac{1}{2} \|u_\epsilon(t)\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2}^2 + R \int_0^t \|u_\epsilon\|_{L^2}^2 dt', \quad (1.44)$$

由 Gronwall 引理得

$$\|u_\epsilon(t)\|_{L^2}^2 \leq \|u_0\|_{L^2}^2 e^{2Rt}, \quad (1.45)$$

将它代入(1.39)右端可得关于  $\epsilon$  一致的界:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|u_\epsilon(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla u_\epsilon\|_{L^2}^2 dt' + \int_0^t \|u_\epsilon\|_{L^{2r}}^{2r} dt' \\ & \leq \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2}^2 e^{2Rt}. \end{aligned} \quad (1.46).$$

这个界建立了序列  $\{u_\epsilon\}$  被包含在  $w - L^2_{\text{loc}}([0, \infty), H^1(\cdot^{-d}))$  和  $w - L^2_{\text{loc}}([0, \infty), L^{2r}(\cdot^{-d}))$  的紧集中, 因模的有界集依弱\*拓扑是相对紧的, 它对于这些自反空间的弱拓扑也是紧的. 因此一致界(1.45)也表明  $\{u_\epsilon(t)\}$  在  $w - L^2(\cdot^{-d}) (\forall t \geq 0)$  也是相对紧的.

为了完成第二步的证明, 必须证明  $\{u_\epsilon\}$  在  $C([0, \infty), w - L^2(\cdot^{-d}))$  也是相对紧的, 紧性要求高于已有的有界性, 因为这里要求对  $t$  强拓扑. 我们应用 Arzela-Ascoli 定理, 它断言  $\{u_\epsilon\}$  在  $C([0,$

$\infty$ ),  $w - L^2(\cdot^d)$  是相对紧的, 当且仅当

(i)  $\{u_\epsilon(t)\}$  依  $w - L^2(\cdot^d)$  ( $\forall t \geq 0$ ) 是相对紧的,

(ii)  $\{u_\epsilon\}$  在  $C([0, \infty), w - L^2(\cdot^d))$  是等度连续的.

如我们所指出的, 条件 (i) 已满足, 为了建立 (ii), 我们必须证明对任何  $\phi \in L^2(\cdot^d)$  有

(ii')  $\{\langle \phi^*, u_\epsilon \rangle\}$  在  $C([0, \infty))$  中等度连续.

这从 CGL 方程的正则化弱形式 (1.38) 对  $\phi \in C^\infty$  建立 (ii'), 再利用稠性原理拓展对一切  $\phi \in L^2(\cdot^d)$  均成立.

第三步, 证明序列  $\{u_\epsilon\}$  在  $L^2_{\text{loc}}([0, \infty), L^2(\cdot^d))$  和  $L^{2r-1}_{\text{loc}}([0, \infty), L^{2r-1}(\cdot^d))$  中相对紧, 考虑它们的通常强拓扑.

**附注 1.5** 这一步是必要的. 因第二步仅断言  $\{u_\epsilon\}$  子序列弱收敛的存在性, 例如其极限为  $u$ , 由此仅推得

$$\int_0^T \|u\|_{L^2}^2 dt \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^T \|u_\epsilon\|_{L^2}^2 dt. \quad (1.47)$$

无论如何, 从 (1.39) 推出 (1.36) 需要

$$\int_0^T \|u\|_{L^2}^2 dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^T \|u_\epsilon\|_{L^2}^2 dt, \quad (1.48)$$

这就要求  $L^2$  强收敛. 类似地, 从 (1.38) 推出 (1.35) 要求依  $L^{2r-1}$  模强收敛.

第三步的证明关键在于利用第二步的结果以及下述的嵌入引理. 这实质上是属于 Leray 的.

**引理 1.6** 映射  $C([0, \infty), w - L^2(\cdot^d)) \wedge w - L^2_{\text{loc}}([0, \infty), H^1(\cdot^d)) \hookrightarrow L^2_{\text{loc}}([0, \infty), L^2(\cdot^d))$  是连续的.

这个引理要证明的, 即若在  $C([0, \infty), w - L^2(\cdot^d))$  和  $w - L^2_{\text{loc}}([0, \infty), H^1(\cdot^d))$  同时收敛于零, 推出在  $L^2_{\text{loc}}([0, \infty), L^2(\cdot^d))$  中也收敛于零. 证明的关键在于利用 Rellich 定理, 即  $H^1 \hookrightarrow L^2$  是紧的.

由此引理, 从第二步推出第三步. 事实上, 第二步说明  $\{u_\epsilon\}$  在  $C([0, \infty), w - L^2(\cdot^d))$  和  $w - L^2_{\text{loc}}([0, \infty), H^1(\cdot^d))$  中是相对紧的, 且由于紧集的连续映照也是紧的, 因此  $\{u_\epsilon\}$  在  $L^2_{\text{loc}}([0, \infty),$

$L^2(\cdot^{-d})$ )中也是相对紧的.进而 $\{u_\epsilon\}$ 的任何子序列在  $C([0, \infty), w - L^2(\cdot^{-d}))$ ,  $w - L^2_{\text{loc}}([0, \infty), H^1(\cdot^{-d}))$ 中是收敛的,因而在  $L^2_{\text{loc}}([0, \infty), L^2(\cdot^{-d}))$ 中强收敛.至于在  $L^{2r-1}$ 中的强收敛,也从  $L^2$  强收敛中直接推得,我们考虑两种情况:

(i)  $r \leq \frac{3}{2}$  (故  $2r-1 \leq 2$ ), 则映射

$$L^2_{\text{loc}}([0, \infty), L^2(\cdot^{-d})) \hookrightarrow L^{2r-1}_{\text{loc}}([0, \infty), L^{2r-1}(\cdot^{-d})) \quad (1.49)$$

是连续的.因此,由  $L^2([0, \infty), L^2(\cdot^{-d}))$  的强收敛推出在  $L^{2r-1}_{\text{loc}}([0, \infty), L^{2r-1}(\cdot^{-d}))$  中的强收敛.

(ii)  $r > \frac{3}{2}$  (故  $2r-1 > 2$ ), 则由在  $L^2_{\text{loc}}([0, \infty), L^2(\cdot^{-d}))$  的强收敛和在  $L^2_{\text{loc}}([0, \infty), L^{2r}(\cdot^{-d}))$  的弱收敛,利用标准的插值原理推得要求的结果.

第四步,取极限,即在定理 1.1 中的弱解  $u$  为  $\{u_\epsilon\}$  收敛子序列的极限.这个事实即要验证子序列在各种函数空间的收敛极限满足弱形式(1.35)和能量不等式(1.36).

**证** 第二步保证存在  $\{u_\epsilon\}$  的一个子序列,仍证为  $\{u_\epsilon\}$  在下述空间:  $C([0, \infty), w - L^2(\cdot^{-d}))$ ,  $w - L^2_{\text{loc}}([0, \infty), H^1(\cdot^{-d}))$  和  $w - L^2_{\text{loc}}([0, \infty), L^{2r}(\cdot^{-d}))$  同时收敛于极限  $u$ , 因此有

$$u \in C([0, \infty), w - L^2(\cdot^{-d})) \cap L^2_{\text{loc}}([0, \infty), H^1(\cdot^{-d})) \cap L^{2r}_{\text{loc}}([0, \infty), L^{2r}(\cdot^{-d})).$$

由第三步推出  $u_\epsilon$  依  $L^2_{\text{loc}}([0, \infty), L^2(\cdot^{-d}))$  和  $L^{2r-1}_{\text{loc}}([0, \infty), L^{2r-1}(\cdot^{-d}))$  收敛于  $u$ , 因此余下来要证明的是:极限  $u$  满足 CGL 方程的弱形式(1.35)和能量关系(1.36).我们从(1.38)和(1.39)出发.

首先考虑 GL 方程正则化弱形式(1.38), 对  $\forall$  试验函数  $\phi \in C^\infty(\cdot^{-d})$  和区间  $[t_1, t_2] \subset [0, \infty)$  有

$$0 = \langle \phi^* u_\epsilon(t_2) \rangle - \langle \phi^* u_\epsilon(t_1) \rangle - R \int_{t_1}^{t_2} \langle \phi^* u_\epsilon \rangle dt'$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \langle (1 + i\nu) \nabla \psi^* \cdot \Delta u_\epsilon \rangle dt' + \int_{t_1}^{t_2} \langle (1 + i\mu) \psi_\epsilon^* \cdot |u_\epsilon|^{2(r-1)} u_\epsilon \rangle dt', \quad (1.50)$$

$u_\epsilon$  依  $C([0, \infty), \mathcal{W} = L^2(\cdot^d))$  收敛于  $u$  意味着  $\langle \psi^* u_\epsilon(t) \rangle$  一致收敛于  $\langle \psi^* u(t) \rangle, \forall t \in [t_1, t_2]$ , 有

$$\langle \psi^* u_\epsilon(t_1) \rangle \rightarrow \langle \psi^* u(t_1) \rangle, \langle \psi^* u_\epsilon(t_2) \rangle \rightarrow \langle \psi^* u(t_2) \rangle, \quad (1.51)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle \psi^* u_\epsilon \rangle dt' \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \langle \psi^* u \rangle dt'. \quad (1.52)$$

由  $u_\epsilon$  依  $\mathcal{W} = L^2_{\text{loc}}([0, \infty), H^1(\cdot^d))$  的收敛性及(1.52)有

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle (1 + i\nu) \nabla \psi^* \cdot \nabla u_\epsilon \rangle dt' \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \langle (1 + i\nu) \nabla \psi^* \cdot \nabla u \rangle dt'. \quad (1.53)$$

为了证明(1.50)中的非线性项可通过取极限,我们将用到这样的事实:如  $\{v_n\}$  为在 Banach 空间  $X$  中的弱收敛序列,  $\{f_n\}$  为在其对偶空间  $X^*$  的强收敛序列,则序列  $\{f_n(v_n)\}$  在  $\mathbb{C}$  中收敛. 这里,由  $u_\epsilon$  在  $L^2_{\text{loc}}([0, \infty), L^{2r-1}(\cdot^d))$  中的强收敛推出  $|u_\epsilon|^{2(r-1)} u_\epsilon$  在  $L^1_{\text{loc}}([0, \infty), L^1(\cdot^d))$  中的弱收敛,因此, Banach 空间为  $L^1([t_1, t_2] \times \mathbb{R}^d)$ , 再由  $\psi_\epsilon$  在  $\mathbb{R}^d$  一致收敛于  $\psi$  推出它的  $L^\infty([t_1, t_2] \times \mathbb{R}^d)$  中强收敛,  $L^\infty$  为  $L^1$  的对偶,故有

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \langle (1 + i\mu) \psi_\epsilon^* \cdot |u_\epsilon|^{2(r-1)} u_\epsilon \rangle dt' \\ & \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \langle (1 + i\mu) \psi^* \cdot |u|^{2(r-1)} u \rangle dt'. \end{aligned} \quad (1.54)$$

联系(1.52)—(1.54),我们在(1.50)中的第一项取极限推出  $u$  满足 CGL 方程的弱形式(1.38).

为证能量关系(1.36),考虑它的正则化形式(1.39)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|u_\epsilon(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla u_\epsilon\|_{L^2}^2 dt' + \int_0^t \|u_\epsilon\|_{L^{2r}}^{2r} dt' \\ & = \frac{1}{2} \|u_{0\epsilon}\|_{L^2}^2 + R \int_0^t \|u_\epsilon\|_{L^2}^2 dt'. \end{aligned} \quad (1.55)$$

考察上式右端,初值依  $L^2(\mathbb{R}^d)$  中强收敛,推出

$$\|u_{0\epsilon}\|_{L^2}^2 \rightarrow \|u_0\|_{L^2}^2. \quad (1.56)$$

由  $u_\epsilon$  在  $L^2_{\text{loc}}([0, \infty), L^2(\mathbb{R}^d))$  中强收敛推出

$$\int_0^t \|u_\epsilon\|_{L^2}^2 dt' \rightarrow \int_0^t \|u\|_{L^2}^2 dt', \quad (1.57)$$

因此, (1.55) 右端当  $\epsilon \rightarrow 0$  时收敛, 现转向 (1.55) 左边, 由  $u_\epsilon$  在  $C([0, \infty), \mathcal{W} = L^2(\mathbb{R}^d))$  的收敛性连同一个序列弱极限的模小于等于它的模的下界, 有

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \|u_\epsilon\|_{L^2}^2. \quad (1.58)$$

类似地, 依  $\mathcal{W} = L^2_{\text{loc}}([0, \infty), H^1(\mathbb{R}^d))$  和  $\mathcal{W} = L^{2r}_{\text{loc}}([0, \infty), L^{2r}(\mathbb{R}^d))$  推出

$$\int_0^t \|u\|_{H^1}^2 dt' \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^t \|u_\epsilon\|_{H^1}^2 dt', \quad (1.59)$$

$$\int_0^t \|u\|_{L^{2r}}^{2r} dt' \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^t \|u_\epsilon\|_{L^{2r}}^{2r} dt'. \quad (1.60)$$

连同 (1.57) 和 (1.59) 有

$$\int_0^t \|\nabla u\|_{L^2}^2 dt' \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^t \|\nabla u_\epsilon\|_{L^2}^2 dt'. \quad (1.61)$$

联系 (1.58), (1.60) 和 (1.61), 我们得到 (1.55) 的下界, 因此能量不等式 (1.36) 成立, 定理 1.1 证毕.

**附注 1.7** 在定理 1.1 中的能量不等式 (1.36) 能稍微加强一些. 事实上, 由第一步, (1.37) 所确定的近似解满足能量关系:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|u_\epsilon(t_2)\|_{L^2}^2 + \int_{t_1}^{t_2} \|\nabla u_\epsilon\|_{L^2}^2 dt + \int_{t_1}^{t_2} \|u_\epsilon\|_{L^{2r}}^{2r} dt \\ &= \frac{1}{2} \|u_\epsilon(t_1)\|_{L^2}^2 + R \int_{t_1}^{t_2} \|u_\epsilon\|_{L^2}^2 dt, \end{aligned} \quad (1.62)$$

$\forall t \in [t_1, t_2] \subset [0, \infty)$ , 由  $u_\epsilon$  依  $L^2_{\text{loc}}([0, \infty), L^2(\mathbb{R}^d))$  收敛于  $u$  推出  $\|u_\epsilon\|_{L^2}$  依  $L^2_{\text{loc}}([0, \infty))$  收敛于  $\|u\|_{L^2}$ , 再利用对角线选取方法, 可使  $u_\epsilon$  的子序列

$$\|u_\epsilon(t)\|_{L^2} \rightarrow \|u(t)\|_{L^2}, \quad \forall a.e. t \in [0, \infty), \quad (1.63)$$

对此点集证为  $E$ , 当  $t_1 \in E$ , 从 (1.62) 可证  $u$  满足

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2}^2 + \int_{t_1}^{t_2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 dt + \int_{t_1}^{t_2} \|u\|_{L^{2r}}^{2r} dt \\ & \leq \frac{1}{2} \|u(t_1)\|_{L^2}^2 + R \int_{t_1}^{t_2} \|u\|_{L^2}^2 dt. \end{aligned}$$

**附注 1.8** 置换  $d$  为:  $d, C^\infty(\cdot)$  置换为其紧支集试验函数  $C_c^\infty(\cdot)$ , 则定理 1.1 在  $d$  中仍成立. 此时在证明第二步和第四步中仅稍为不同于周期情况, 在第一步中 Fourier - Galerkin 方法在全空间失效, 此时可换为光滑化近似方法. 能构造初值问题.

$$\begin{cases} \partial_t u_\epsilon = Ru_\epsilon + (1 + i\nu)\Delta u_\epsilon - (1 + i\mu)j_\epsilon * (j_\epsilon * u_\epsilon)^{2(r-1)}j_\epsilon * u_\epsilon, \\ u_\epsilon(0, x) = u_{i\epsilon}(x) = j_\epsilon * u_0(x), \end{cases} \quad (1.64)$$

其中正则化是通过光滑、非负 Mollifier  $j_\epsilon$  作卷积来完成的, 最后在第三步能用修正的无界区域的 Rellich 定理来代替.

现考虑局部古典解.

考虑  $u = u(t)$  在 Banach 空间  $X$  满足抽象初值问题:

$$\begin{aligned} \partial_t u &= Lu + N(u), \\ u(0) &= u_0(x) \in X, \end{aligned} \quad (1.65)$$

其中线性算子  $L$  为在  $X$  上强连续半群  $S(t)$  的无穷小生成元 ( $N=0$ , 该线性问题是适定的). 扰动项  $N$  通常为  $X$  上的非线性映照, 上述初值问题的适定性能通过 (1.65) 的如下积分形式利用压缩映照原理得到:

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-t')N(u(t'))dt'. \quad (1.66)$$

为了利用压缩映照原理, 我们设扰动项  $N$  为局部 Lipschitz 的.  $N: X \rightarrow X$  特别有

$$(i) \|N(u)\|_X \leq C_{bd}(\|u\|_X), \quad \forall u \in X,$$

(ii)  $\|N(u_1) - N(u_2)\|_X \leq C_{Lip}(\|u_1\|_X, \|u_2\|_X)\|u_1 - u_2\|_X$ , 其中  $C_{bd}(\cdot)$  和  $C_{Lip}(\cdot)$  为其变元的非减函数. 注意到  $N, L$  选取  $N(0)=0$ , 则从条件 (ii) 可推出条件 (i), 对于给定的这样的扰动项  $N$ , 我们能证明以下基本结果.

**定理 1.9 (基本局部存在性)** 对任何  $p > 0$ , 存在  $T(\rho) > 0$  使得对任何初值  $u_0(x) \in X$  且  $\|u_0\|_X \leq \rho$ , 存在惟一函数  $u(x, t) \in C([0, T], X)$  满足积分方程 (1.66), 而且从  $X \rightarrow C([0, T], X)$  的映照  $u_0 \rightarrow u$  为局部 Lip 函数.

这样的解  $u$  称为问题 (1.65) 中等程度的解, 它是证明古典解的出发点.

**附注 1.10** 如  $u \in C([0, T], X)$  为 (1.65) 的中等解, 则由直接计算表明, 这是 (1.65) 如下意义的弱解:

$$\begin{aligned} & \langle \psi | u(t_2) \rangle_X - \langle \psi | u(t_1) \rangle_X \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \langle L^* \psi | u(t) \rangle_X dt + \int_{t_1}^{t_2} \langle \psi, N(u(t)) \rangle_X dt, \end{aligned} \quad (1.67)$$

其中  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ ,  $\psi \in D(L^*)$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$  表示通常  $X$  和它的对偶空间  $X^*$  之间的双线性对偶,  $L^*$  为通常的  $L$  的对偶, 具有  $D(L^*)$  在  $X^*$  中稠.

现应用这个一般理论到具有空间周期的复 Ginzburg - Landau 方程的初值问题, 此时选取

$$Lu = (1 + i\nu)\Delta u + Ru, N(u) = -(1 + i\mu)|u|^{2\sigma}u, \quad (1.68)$$

半群  $S(t)$  作用于  $u$  上能写成一个卷积,  $S(t)u = G_t * u$ .

$G_t = G_t(x) (t > 0)$  为 Green 函数.

$$G_t(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} g_t(x + n),$$

$$g_t(x) = \frac{1}{[4\pi(1 + i\nu)t]^{\frac{d}{2}}} \exp\left[-\frac{|x|^2}{4(1 + i\nu)t} + Rt\right]. \quad (1.69)$$

积分方程 (1.66) 能写成 Green 函数形式

$$u(t) = G_t * u_0 + \int_0^t G_{t-t'} * N(u(t')) dt'. \quad (1.70)$$

为了应用局部存在性定理, 我们仅需确定空间  $X$ , 并验证条件 (i) (ii) 成立.

对  $t > 0$ , Green 函数 (1.69) 满足  $L^1$  估计

$$\|G_t\|_{L^1} \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |g_t(x + n)| dx$$



$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^d} |g_t(x)| dx \\
&= (1 + \nu^2)^{\frac{d}{4}} e^{Rt}.
\end{aligned} \tag{1.71}$$

由此推出  $S(t)$  在  $L^p(\mathbb{R}^d)$  中有界,  $1 \leq p \leq \infty$ , 并有

$$\begin{aligned}
\|S(t)u\|_{L^p} &= \|G_t * u\|_{L^p} \leq \|G_t\|_{L^1} \|u\|_{L^p} \\
&\leq (1 + \nu^2)^{\frac{d}{4}} e^{Rt} \|u\|_{L^p}.
\end{aligned} \tag{1.72}$$

更进一步可证  $S(t)$  在  $C(\mathbb{R}^d)$  和  $L^p(\mathbb{R}^d)$  ( $1 \leq p < \infty$ ) 上为强连续半群.

**附注 1.11** 有界算子  $S(t): S(0) = I, S(t)u = G_t * u, t > 0$ , 形成  $L^\infty(\mathbb{R}^d)$  上的一个半群, 它对  $t > 0$  为强连续, 但在  $t = 0$  上仅为弱 \* 连续 (一个序列  $\{v_n\}$  称之为弱 \* 依  $L^\infty(\mathbb{R}^d)$  收敛于  $v$ , 如果它乘以任何属于  $L^1(\mathbb{R}^d)$  函数积分成立).

我们首先取  $X = C(\mathbb{R}^d)$ , 扰动项  $N$  由 (1.68) 给定, 可清楚知道它是局部 Lip 连续的:  $C(\mathbb{R}^d) \rightarrow C(\mathbb{R}^d)$ . 由局部存在定理推出存在 CGL 方程在时间区间  $[0, T]$  上唯一的中等解  $u = u(t)$ , 这仅依赖于  $\|u_0\|_{L^\infty}$ , 这个解是 (1.70) 的如下迭代序列  $\{u^{(n)}\}$  的极限,

$$\begin{cases} u^{(0)}(t) = G_t * u_0, \\ u^{(n+1)}(t) = G_t * u_0 + \int_0^t G_{t-t'} * N(u^{(n)}(t')) dt', \end{cases} \tag{1.73}$$

收敛性是在  $C([0, T], C(\mathbb{R}^d))$  中, 某个  $T$  充分小.

为了抬高中等解为古典解, 必须附加正则性的证明. 例如对于空间属于  $L^2$ , 对于时间属于  $C^1$ , 于是出现在方程中的导数是古典的, 这样做是用如下的标准的穿靴原理. 我们用  $G_t$  ( $t > 0$ ) 的正则性作逐次迭代 (1.73) 的梯度依  $L^\infty$  模的估计, 证明序列  $\{u^{(n)}\}$  依  $C([0, T], C^1(\mathbb{R}^d))$  收敛. 可依如下进行: 取积分方程 (1.73) 的梯度.

$$\nabla u^{(n+1)}(t) = \nabla G_t * u_0 + \int_0^t \nabla G_{t-t'} * N(u^{(n)}(t')) dt' \tag{1.74}$$

作估计

$$\begin{aligned} \|\nabla u^{(n+1)}(t)\|_{L^\infty} &\leq \|\nabla G_t\|_{L^1} \|u_0\|_{L^\infty} \\ &+ \int_0^t \|\nabla G_{t-t'}\|_{L^1} \|N(u^{(n)}(t'))\|_{L^\infty} dt', \end{aligned} \quad (1.75)$$

则由  $L^1$  估计

$$\begin{aligned} \|\nabla G_t\|_{L^1} &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla g_t(x+n)| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla g_t(x)| dx = C_d (1+\nu^2)^{\frac{d}{4}} \frac{e^{Rt}}{\sqrt{t}}, \end{aligned} \quad (1.76)$$

其中  $C_d > 0$  为仅依赖维数  $d$  的常数, 于是

$$\begin{aligned} \|\nabla u^{(n+1)}(t)\|_{L^\infty} &\leq C_d (1+\nu^2)^{\frac{d}{4}} \frac{e^{Rt}}{\sqrt{t}} \|u_0\|_{L^\infty} \\ &+ C_d (1+\nu^2)^{\frac{d}{4}} \int_0^t \frac{e^{R(t-t')}}{\sqrt{t-t'}} \|N(u^{(n)}(t'))\|_{L^\infty} dt', \end{aligned} \quad (1.77)$$

这就证明了  $\nabla u^{(n)}$  在  $C([0, T], C^1(\mathbb{R}^d))$  中. 由  $N$  的 Lip 连续性, 类似估计可证明这个序列的  $C([0, T], C^1(\mathbb{R}^d))$  中是 Cauchy 序列, 因此  $u \in C([0, T], C^1(\mathbb{R}^d))$ . 如果  $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^d)$ , 则可写出  $\nabla u$  的积分方程, 其中不带有  $G_t$  的导数. 例如

$$\nabla u(t) = G_t * \nabla u_0 + \int_0^t G_{t-t'} * [DN(u(t')) \nabla u(t')] dt', \quad (1.78)$$

其中  $DN(u)$  表示  $N(u)$  对  $u$  的导数, 当  $N(u)$  由 (1.68) 所给定时, 则有

$$DN(u)w = -(1+i\mu)((\sigma+1)|u|^{2\sigma}w + \sigma|u|^{2\sigma-2}u^2w^*), \quad (1.79)$$

其中  $w$  为任意函数. 类似于 (1.77) 的估计, 此时在  $t=0$  上不再具有奇性. 因此  $u \in C([0, T], C^1(\mathbb{R}^d))$ . 重复上述正则性原理, 从 (1.78) 出发可证  $u \in C([0, T], C^2(\mathbb{R}^d))$ . 由于通过 CGL 方程可知对时间一阶导数的存在性可由它的二阶空间导数推得, 因此  $u \in C^1([0, T], C^1(\mathbb{R}^d))$ . 故只要是 CGL 方程的一个中等解, 必是它的古典解. 综上可得如下结果.

**定理 1.12** ( $C^0$  初值的局部古典解) 对任何  $\rho > 0$ , 存在

$T(\rho) > 0$  使得对初值  $u_0 \in C(\mathbb{R}^d)$ , 且  $\|u_0\|_{L^\infty} \leq \rho$ , 则存在惟一的

$$u \in C([0, T], C(\mathbb{R}^d)) \cap C([0, T], C^2(\mathbb{R}^d)) \cap C^1([0, T], C(\mathbb{R}^d)) \quad (1.80)$$

满足 GL 初值问题. 附之, 映照  $u^0 \mapsto u$  是局部 Lip 函数:  $C(\mathbb{R}^d) \rightarrow C([0, T], C(\mathbb{R}^d))$ . 如果初值  $u_0 \in C^2(\mathbb{R}^d)$ , 则有

$$u \in C([0, T], C^2(\mathbb{R}^d)) \cap C^1([0, T], C(\mathbb{R}^d)).$$

一般说来, 不能期望得到  $C([0, T], C^3(\mathbb{R}^d))$  的解, 因为在微分 (1.79) 中出现  $u$  的零点将导致无界奇性. 无论如何, 在某些情况下能得到附加的正则性. 例如, 当  $\sigma$  为正整数, 非线性项为  $u$ ,  $\bar{u}$  的多项式, 我们能对 (1.79) 自由微分, 而不导致任何奇性, 再连续使用穿靴法, 我们可得到对于任意  $t \in (0, T]$ , 解具有更高的空间导数, 由此反复作用, 可得到解  $u \in C([0, T], C^\infty(\mathbb{R}^d))$ . 另外, 由于方程联系着时间导数和空间导数, 因此解也存在一切时间导数, 这样可得到 GL 方程 (1.1) 的  $C^\infty$  光滑解, 只要它是一个中等解. 更详细地, 有如下结果.

**定理 1.13 (局部光滑解)** 设  $\sigma > 0$  为整数, 则对任何  $\rho > 0$ , 存在  $T(\rho) > 0$ , 使得对任何初值  $u_0 \in C(\mathbb{R}^d)$  且  $\|u_0\|_{L^\infty} \leq \rho$ , 存在 CGL 方程初值问题的惟一解.

$$u \in C([0, T], C(\mathbb{R}^d)) \cap C^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^d). \quad (1.81)$$

**附注 1.14** 当  $r$  不是一个正整数时, 我们仍能用穿靴法得到 (1.79) 的可微性不出现  $u$  的零点引起的无界奇性. 有关  $u, u^*$  出现于  $|u|^{2\sigma}u$  的第  $(n+1)$  次导数的最低阶为  $2\sigma - n$ , 因此当  $\sigma \geq \frac{n}{2}$  可以控制, 此时穿靴原理能用到  $n$  阶导数, 解  $u \in C([0, T], C^{n+2}(\mathbb{R}^d))$ . 这就导致以下定理.

**定理 1.15 (局部  $C^k$  解)** 设  $\sigma \geq \frac{n}{2}$ ,  $n$  为某个正整数, 则对任何  $\rho > 0$ , 存在  $T(\rho) > 0$ , 使得对任何初值  $u_0 \in C(\mathbb{R}^d)$  且  $\|u_0\|_{L^\infty} \leq \rho$ , 存在 CGL 方程初值问题的惟一解

$$u \in C([0, T], C(\mathbb{R}^d)) \cap C([0, T], C^{n+2}(\mathbb{R}^d)) \cap C^1([0, T], C^3(\mathbb{R}^d)). \quad (1.82)$$

再者,如  $u_0 \in C^{m+2}(\mathbb{R}^d)$ , 则有

$$u \in C([0, T], C^{m+2}(\mathbb{R}^d)) \cap C^1([0, T], C^m(\mathbb{R}^d)).$$

**附注 1.16** 当然,我们继续交换二次空间导数为一次时间导数,如  $n=2k$  为偶数,则有  $u \in C^{k+1}([0, T], C(\mathbb{R}^d))$ , 而  $n=2k+1$  为奇数,则有  $u \in C^{k+1}([0, T], C^1(\mathbb{R}^d))$ .

**附注 1.17** 上述结果考虑初始  $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ , 此时半群  $S(t)$  作用在  $L^\infty(\mathbb{R}^d)$  上,一般在  $t=0$  上不具有强连续性,只有弱\*连续,此时上述定理关于  $u$  的  $L^\infty$  形式,例如定理 1.12 的  $L^\infty$  形式能置换(1.79)为

$$\begin{aligned} u \in C([0, T], w^* - L^\infty(\mathbb{R}^d)) \cap C([0, T], \\ C^2(\mathbb{R}^d)) \cap C^1([0, T], C(\mathbb{R}^d)), \end{aligned} \quad (1.83)$$

其中  $w^* - L^\infty(\mathbb{R}^d)$  表示  $L^\infty(\mathbb{R}^d)$  具有弱\*拓扑.

以上基本存在定理能更精细化,使得初值在更广泛的一类空间得到正时间的古典解.(1.66)的中等解形式为

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-t')N(u(t'))dt'. \quad (1.84)$$

对这个式子,显然可考虑三个空间,初值在某个空间  $X$ , 解在更好的空间  $Y$ ,  $t \in [0, T]$ , 一般非线性映照将  $Y$  映照为第三个空间  $Z$ .

适当选取  $X, Y, Z$ , 半群在  $X$  上是强连续的,映照  $X$  和  $Z$  回到好的空间  $Y$ , 在  $t=0$  处有奇性. 在靠近  $t=0$ , 具有非负常数  $\alpha, \beta$ , 使得

$$\|S(t)w\|_Y \leq Ct^{-\alpha} \|w\|_X, \quad \forall w \in X, \quad (1.85)$$

$$\|S(t)w\|_Y \leq Ct^{-\beta} \|w\|_Z, \quad \forall w \in Z. \quad (1.86)$$

再设  $N$  为局部 Lip 的,  $N: Y \rightarrow Z$ . 无损于一般性, 设  $N(0) = 0$ ,  $N$  的 Lip 条件可写为

$$\begin{aligned} & \|N(u_1) - N(u_2)\|_Z \\ & \leq C(\|u_1\|_Y^{2\sigma} + \|u_2\|_Y^{2\sigma}) \|u_1 - u_2\|_Y, \end{aligned} \quad (1.87)$$

对某个  $\sigma > 0$ , 并和 GL 方程非线性项(1.68)的  $\sigma$  相同.

**定理 1.18**(扩展的局部存在性) 设给定估计(1.85), (1.86)

和(1.87), 其中指数  $\alpha, \beta$  和  $\sigma$  满足

$$0 \leq \beta < 1, \quad (1.88)$$

$$0 \leq (2\sigma + 1)\alpha < 1, \quad (1.89)$$

$$\beta + 2\sigma\alpha < 1, \quad (1.90)$$

则对任何  $\rho > 0$ , 存在  $T(\rho) > 0$ , 使得对任何初值  $u_0 \in X$ , 且  $\|u_0\|_X \leq P$ , 存在方程(1.84)的唯一中等解

$$u \in C([0, T], X) \cap C([0, T], Y), \quad (1.91)$$

附之, 映照  $u_0 \rightarrow u$  是一个局部 Lip 函数:  $X \rightarrow C([0, T], X)$ .

证 为了指出如何应用压缩映照原理, 我们首先估计不动点方程(1.84)在  $Y$  中的模:

$$\|u(t)\|_Y \leq Ct^{-\alpha} \|u_0\|_X + C \int_0^t (t-t')^{-\beta} \|u(t')\|_Y^{2\sigma+1} dt', \quad (1.92)$$

或

$$\begin{aligned} t^\alpha \|u(t)\|_Y &\leq C \|u_0\|_X + Ct^\alpha \int_0^t (t-t')^{-\beta} t'^{-(2\sigma+1)\alpha} \\ &\quad \cdot (t'^\alpha \|u(t')\|_Y)^{2\sigma+1} dt' \\ &\leq C \|u_0\|_X + C \sup_{t' \in [0, t]} (t'^\alpha \|u(t')\|_Y)^{2\sigma+1} t^\alpha \\ &\quad \cdot \int_0^t (t-t')^{-\beta} t'^{-(2\sigma+1)\alpha} dt', \end{aligned} \quad (1.93)$$

由此可证明在空间  $E([0, T])$  的可压缩性, 空间正是  $C([0, T], Y)$  依模

$$\|w\|_E = \sup_{t \in [0, T]} t^\alpha \|w(t)\|_Y \quad (1.94)$$

的完备化. 事实上, 由(1.88)–(1.90)可知

$$t^\alpha \int_0^t (t-t')^{-\beta} t'^{-(2\sigma+1)\alpha} dt' \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0. \quad (1.95)$$

因此, 存在某个  $T > 0$ , 使得不动点方程(1.84)右端在  $E$  的模适当大的球内将自身映照为自身. 借助于 Lip 条件(1.87), 我们能在相同假设(1.95)下用类似的方法证明它是压缩的. 则由压缩映照原理可知, 存在不动点问题(1.84)的唯一解

$$u \in E([0, T]) \subset C([0, T], Y).$$

最后,我们能证  $u \in C([0, T], Y)$ , 为此,我们需验证  $u$  在  $t=0$  上的连续性. 首先从(1.84)两端减去  $u_0(x)$ , 直接估计在  $X$  中的模, 利用连续嵌入:  $Z \hookrightarrow X$  得到

$$\begin{aligned} & \|u(t) - u_0\|_X \leq \|S(t)u_0 - u_0\|_X + \\ & C \int_0^t t'^{-(2\sigma+1)\alpha} t'^{\alpha} (\|u(t')\|_Y)^{2\sigma+1} dt' \\ & \leq \|S(t)u_0 - u_0\|_X + C \|u\|_E^{2\sigma+1} \int_0^t t'^{-(2\sigma+1)\alpha} dt'. \quad (1.96) \end{aligned}$$

右端第一项由于线性半群的强连续性, 趋于零. 第二项  $(2\sigma+1)\alpha < 1$ , 因此也趋于零, 该条件被包含在(1.95)中.

**附注 1.19** 严格地说, 我们已证明小空间  $E([0, T])$  的存在性, 如(1.91)所断言的.

现我们应用定理 1.18 于 GL 方程. 如前,  $N, L$  为(1.68), 线性半群为(1.69)所定义. 我们首先考虑初始  $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^d) = X$ . 我们也取  $Z = L^p(\mathbb{R}^d)$ ,  $Y = L^r(\mathbb{R}^d)$ , 其中  $r$  待定, 利用 Hölder 和 Young 不等式以及

$$r \geq (2\sigma+1)p, \quad (1.97)$$

可直接验证 Lip 条件(1.8)成立. 为了计算(1.85)中的指数  $\alpha, \beta$ , 我们对光滑算子作  $L^p - L^r$  估计,

$$\begin{aligned} & \|G_t * w\|_{L^r} \leq \|G_t\|_{L^s} \|w\|_{L^p} \\ & \leq \|G_t\|_{L^1}^{\frac{1}{q}} \|G_t\|_{L^\infty}^{1-\frac{1}{q}} \|w\|_{L^p}, \quad (1.98) \end{aligned}$$

其中

$$1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}. \quad (1.99)$$

利用(1.71)的  $L^1$  估计, 可得  $L^\infty$  估计

$$\|G_t\|_{L^\infty} \leq \frac{(1+\nu^2)^{\frac{d}{2}} 4^{\frac{d}{2}} e^{Rt}}{[4\pi(1+\nu^2)t]^{\frac{d}{2}}} \{a + b[(1+\nu^2)t]^{\frac{d}{2}}\}, \quad (1.100)$$

其中  $a, b > 0$ , 对于小的  $t$  有

$$\|G_t\|_{L^1} = O(t^0), \|G_t\|_{L^\infty} = O(t^{-\frac{d}{2}}), \quad (1.101)$$

由此并利用(1.98)和(1.99)得到

$$\|S(t)w\|_{L^p} \leq C t^{-\frac{d}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \|w\|_{L^p}, \quad (1.102)$$

即  $\alpha = \beta = \frac{d}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{r})$ . 定理 1.18 首先对应于  $r = (2\sigma + 1)p$  情况, 则可断言存在  $T > 0$  和惟一局部解

$$u \in C([0, T], L^p(\mathbb{R}^d)) \cap C([0, T], L^r(\mathbb{R}^d))$$

满足条件  $(2\sigma + 1)\alpha < 1$ , 即  $\sigma d < p$ .

因  $u(t) \in L^r(\mathbb{R}^d) (\forall t > 0)$ , 我们能再应用此原理证明

$$u \in C([0, T], L^{r_m}(\mathbb{R}^d)), r_m = (2\sigma + 1)^m p, \quad (1.103)$$

$\forall m \in \mathbb{N}$ . 最后, 对某  $r_m > (\sigma + \frac{1}{2})d$ , 能取  $X = Z = L^{r_m}(\mathbb{R}^d)$ ,  $Y = C(\mathbb{R}^d)$ , 得到  $u \in C([0, T], C(\mathbb{R}^d))$ . 作为定理 1.12 的应用有

**定理 1.20** (局部古典解对于  $L^p$  初值) 如  $p$  满足

$$1 \leq p < \infty, \sigma d < p, \quad (1.104)$$

则对任何  $\rho > 0$ , 存在  $T(\rho) > 0$ , 使得对任何  $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^d)$ , 且

$\|u_0\|_{L^p} \leq \rho$ , 存在 CGL 方程初值问题惟一解,

$$\begin{aligned} u &\in C([0, T], L^p(\mathbb{R}^d)) \cap C([0, T], \\ &C^2(\mathbb{R}^d)) \cap C^1([0, T], C(\mathbb{R}^d)), \end{aligned} \quad (1.105)$$

附之, 映照  $u_0 \mapsto u$  为 Lip 函数:  $L^p(\mathbb{R}^d) \rightarrow ([0, T], L^p(\mathbb{R}^d))$ .

**附注 1.21** 对于  $p \geq 2$ , 上述古典解的惟一性可拓展为定理 1.1 弱解的惟一性. 换言之, 只要 CGL 方程的弱解为古典的, 则它是惟一的. 对于亚临界情况 ( $\sigma d < 2$ ), 定理 1.20 断言  $L^p$  初值的解的存在性 ( $p < 2$ ), 这种解不属于定理 1.1 中的弱解. 事实上, 我们以后能证明, 对于临界  $\sigma = d = 1$ , 运用相同的技巧, 可建立初值问题的解在分布意义下  $H^q(\mathbb{R}^d) (-\frac{1}{2} < q < 0)$  的存在性.

**附注 1.22** 当  $p = 2\sigma + 2$ , 此时若  $d < 2 + \frac{2}{\sigma}$ , 存在局部古典

解. 这条件和非线性 Schrödinger 方程

$$i\partial_t u = -\nu\Delta u + \mu|u|^{2\sigma}u$$

的  $H^1$  解局部存在惟一性条件一致.

下面我们更一般证明局部解的存在性在  $H^q$  初值条件下. Sobolev 空间  $H^q(\mathbb{R}^d)$  能对一切  $q \in \mathbb{R}$  定义. 令  $\hat{w}(\xi)$  表示函数  $w \in L^2(\mathbb{R}^d)$  的 F 氏系数,

$$w(x) = \sum_{\xi \in 2\pi\mathbb{Z}^d} \hat{w}(\xi) e^{i\xi \cdot x}, \quad \hat{w}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\xi \cdot x} w(x) dx, \quad (1.106)$$

函数  $w$  的  $H^q$  模为

$$\|w\|_{H^q} = \left( \sum_{\xi \in 2\pi\mathbb{Z}^d} (1 + |\xi|^2)^{q/2} |\hat{w}(\xi)|^2 \right)^{1/2}. \quad (1.107)$$

我们仅关心  $q < 0$  的情况, 因为  $q > \frac{d}{2} - \frac{1}{\sigma}$ ,  $q > 0$ , 我们能找到  $p > \sigma d$  使得 Sobolev 嵌入  $H^q \hookrightarrow L_p$  成立. 即  $\frac{1}{p} > \frac{1}{2} - \frac{q}{d}$ , 因此, 此时的古典解由定理 1.18 所保证.

设  $u_0 \in H^q(\mathbb{R}^d) \equiv X$ ,  $q < 0$ , 取二个空间  $Y = L^r(\mathbb{R}^d)$ ,  $Z = L^p(\mathbb{R}^d)$ ,  $\beta = \frac{d}{2} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{r} \right)$ ,  $r \geq (2\sigma + 1)p$ , 可作  $S(t)$  的  $H^q \rightarrow L^r$  估计, 由 (1.102), 对  $r \geq 2$  有

$$\|S(2t)w\|_{L^r} \leq C t^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})} \|S(t)w\|_{L^2}, \quad (1.108)$$

$S(t)w = G_t * w$  同 F 氏变换得到最佳估计

$$\begin{aligned} \|G_t * w\|_{L^2}^2 &= \sum_{\xi \in 2\pi\mathbb{Z}^d} |g(\xi) \hat{w}(\xi)|^2 \\ &\leq \sup_{\xi \in 2\pi\mathbb{Z}^d} \{(1 + |\xi|^2)^{-q} |g(\xi)|^2\} \sum_{\xi \in 2\pi\mathbb{Z}^d} (1 + |\xi|^2)^q |\hat{w}(\xi)|^2, \end{aligned} \quad (1.109)$$

其中  $\hat{w}(\xi)$  表示  $w$  的 F 氏变换,  $G_t$  的 F 氏系数为

$$\hat{g}(\xi) = e^{Rt} e^{-(1+\nu)|\xi|^2 t}. \quad (1.110)$$

在 (1.109) 中的  $\sup$ , 可由对  $|\xi|^2$  的简单最优估计得到

$$\|G_t * w\|_{L^2}^2 \leq \left( \frac{-q}{2et} \right)^q e^{2(R+1)t} \|w\|_{H^q}^2, \quad (1.111)$$



对充分小的  $t$ , 有

$$\|S(t)w\|_{L^r} \leq Ct^{-\frac{d}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})+\frac{q}{2}} \|w\|_{H^q}. \quad (1.112)$$

取 Lip 条件,  $r=(2\sigma+1)p$ , 则定理 3.5 的条件  $\beta+2\sigma\alpha<1$  满足当且仅当

$$q > \frac{d}{2} - \frac{1}{\sigma}. \quad (1.113)$$

我们还要检验定理的其他两个条件, 条件(1.89)要求给予  $r$  的上界, 如

$$r < \frac{2(2\sigma+1)d}{(2\sigma+1)(d-2q)-4}, \quad (1.114)$$

类似地, (1.88) 要求给予  $r$  的一个下界

$$r > \sigma d. \quad (1.115)$$

现首先给出(1.113),  $r$  的上下界同时满足, 为了技术上的理由, 假设  $r$  的两个下界, 在得到(1.112)中, 需设  $r \geq 2$ , 我们要求  $p \geq 1$ , 即  $r \geq 2\sigma+1$ , 这些联系(1.114)为

$$q > -\frac{2}{2\sigma+1} \quad (1.116)$$

和

$$q > \frac{d}{2} - \frac{d+2}{2\sigma+1}. \quad (1.117)$$

最后由定理 1.18 推出对某个  $T>0$ , 有一个惟一中等解  $u \in C([0, T], Y)$ , 进一步, 因  $u(t) \in L^r(\mathbb{R}^d)$ ,  $\forall t \in [0, T]$ . 进一步的光滑性由应用定理 1.20 直接推得. 我们有如下定理:

**定理 1.23**(局部古典解对于  $H^q$  初值) 设  $q$  满足(1.116)(1.117)且

$$q > \frac{d}{2} - \frac{1}{\sigma}, \quad (1.118)$$

则对任何  $\rho>0$ , 存在  $T(\rho)>0$ , 使得对任何初值  $u_0 \in H^q(\mathbb{R}^d)$  且  $\|u_0\|_{H^q} \leq \rho$ , 存在 CGL 方程初值问题惟一解

$$\begin{aligned} u \in C([0, T], H^q(\mathbb{R}^d)) \cap C([0, T], \\ C^2(\mathbb{R}^d)) \cap C^1([0, T], C(\mathbb{R}^d)). \end{aligned} \quad (1.119)$$

**附注 1.24** 我们相信条件(1.116)和(1.117)是技术性的,可用更好的方法加以改进.例如可用 Besov 空间.当(1.118)等式成立也然.注意到当  $\sigma \geq \frac{1}{2}$ ,  $\sigma d \geq 1$ ,  $\sigma$  为整数,条件(1.118)可控,我们可证局部解的存在性.

**附注 1.25** 只要作小的改动,我们能把这些结果推广到  $R^d$ . 现考虑解的解析性.

函数  $w \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  称之为 Gevrey S 类 ( $S > 0$ ),是指存在常数  $\rho > 0$ ,  $M < \infty$  使得对任何  $x \in \mathbb{R}^d$  和  $\alpha \in \mathbb{N}^d$  有

$$|\partial^\alpha w(x)| \leq M \left( \frac{\alpha!}{\rho^{|\alpha|}} \right), \quad (1.120)$$

这里我们利用多重指标符号

$$|\alpha| \equiv \sum_{j=1}^{2\sigma+1} \alpha_j, \alpha! \equiv \prod_{j=1}^{2\sigma+1} \alpha_j!, \partial^\alpha \equiv \prod_{j=1}^d \partial_{x_j}^{\alpha_j}. \quad (1.121)$$

所有 Gevrey S 类的函数集合形成一个向量空间,以  $G^S(\mathbb{R}^d)$  表示.它对乘法和微分是闭的,且二个 Gevrey S 类函数的复合仍是 Gevrey S 类的.

这是古典的,  $G^1(\mathbb{R}^d)$  为实解析函数空间 ( $w \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ ). 对  $0 < s < 1$ ,  $G^s(\mathbb{R}^d)$  类为次解析函数. 而  $1 < s < \infty$ , 它含有解析函数. 事实上,对于  $0 < S_1 < S_2 < \infty$  有

$$G^{S_1}(\mathbb{R}^d) \subset G^{S_2}(\mathbb{R}^d) \subset C^\infty(\mathbb{R}^d). \quad (1.122)$$

但  $G^s(\mathbb{R}^d)$  的并集不属于  $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ , 因为它是拟解析函数,不属于 Gevrey 类.

以下为了方便刻画 Gevrey 类的特征,我们引入分指数 Sobolev 空间  $H^r(\mathbb{R}^d)$  ( $r \in \mathbb{R}$ ,  $r \geq 0$ ).

**引理 1.26** 给定  $s > 0$ ,  $r \geq 0$ , 则  $w \in G^s(\mathbb{R}^d)$ , 当且仅当存在  $\rho, M \in [0, \infty)$  (可能依赖于  $r, s$  和  $w$ ) 使得对任何  $n \in \mathbb{N}$  有

$$\begin{aligned} \|\nabla^n w\|_{H^r} &= \left( \sum_{\xi \in 2\pi\mathbb{Z}^d} (1 + |\xi|^2)^r |\xi|^{2n} |\hat{w}(\xi)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq M \left( \frac{n!}{\rho^n} \right). \end{aligned} \quad (1.123)$$

引理的证明直接利用 Sobolev 嵌入定理即可.

令  $A = \sqrt{-\Delta}$ , 它是非负, 自共轭的, 它的任意次幂可由谱理论定义. 对  $s \in [0, \infty)$  和参数  $\tau$ , 定义赋范空间

$$D(e^{\tau A^{\frac{1}{s}}}; H^r(\cdot^d)) = \{w \in H^r(\cdot^d) : \|e^{\tau A^{\frac{1}{s}}} w\|_H < \infty\},$$

这个空间的函数, 其 Fourier 系数具有快于  $\exp(-\tau |\xi|^{\frac{1}{s}})$  衰减. 我们有定理

**定理 1.27** 对任何  $s > 0, r \geq 0$  有

$$G^s(\cdot^d) = \bigcup_{\tau > 0} D(e^{\tau A^{\frac{1}{s}}}; H^r(\cdot^d)). \quad (1.124)$$

**证** 令  $w \in D(e^{\tau A^{\frac{1}{s}}}; H^r(\cdot^d)), \tau > 0, \rho = \frac{\tau}{s}$ , 则

$$\begin{aligned} \|\nabla^n w\|_{H^r}^2 &= \left(\frac{n!}{\rho^n}\right)^{2s} \sum_{\xi} (1 + |\xi|^2)^r \left(\frac{\rho^n |\xi|^{\frac{n}{s}}}{n!}\right)^{2s} |\hat{w}(\xi)|^2 \\ &\leq \left(\frac{n!}{\rho^n}\right)^{2s} \sum_{\xi} (1 + |\xi|^2)^r e^{2s\rho |\xi|^{\frac{1}{s}}} |\hat{w}(\xi)|^2 \\ &= \left(\frac{n!}{\rho^n}\right)^{2s} \|e^{\tau A^{\frac{1}{s}}} w\|_{H^r}^2. \end{aligned} \quad (1.125)$$

置  $M = \|e^{\tau A^{\frac{1}{s}}} w\|_{H^r}$ , 即得 (1.123),  $\forall w \in G^s(\cdot^d)$ .

另一方面,  $w \in G^s(\cdot^d)$ , 对任何  $\tau > 0$  有

$$\begin{aligned} \|e^{\tau A^{\frac{1}{s}}} w\|_{H^r}^2 &\equiv \sum_{\xi} (1 + |\xi|^2)^r e^{2\tau |\xi|^{\frac{1}{s}}} |\hat{w}(\xi)|^2 \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\partial \tau)^m}{m!} \sum_{\xi} (1 + |\xi|^2)^r |\xi|^{\frac{m}{s}} |\hat{w}(\xi)|^2. \end{aligned} \quad (1.126)$$

令  $\rho$  和  $M$  使得 (1.123) 成立, 插值 (1.123) 对  $n=0$  和任何整数  $n$ ,  $\frac{m}{s} \leq 2n$ , 则 (1.126) 当中的和有界于

$$\sum_{\xi} (1 + |\xi|^2)^r |\xi|^{\frac{m}{s}} |\hat{w}(\xi)|^2 \leq M^2 \frac{(n!)^{\frac{m}{n}}}{\rho^m}. \quad (1.127)$$

如选取  $n = n_m = \left[\frac{m}{(2s)}\right] + 1$ , 则此界是最佳的. 其中  $[\cdot]$  表示最大小于它的整数函数. 由 (1.126) 可得

$$\begin{aligned}\|e^{\tau A^{\frac{1}{s}}} w\|_{H^r}^2 &\leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2\tau)^m}{m!} M^2 \frac{(n_m!)^{\frac{n_m}{m}}}{\rho^m} \\ &\leq M^2 \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{2\tau}{\rho}\right)^m \frac{(n_m!)^{\frac{n_m}{m}}}{m!},\end{aligned}\quad (1.128)$$

则 Stirling 公式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{n} (n!)^{\frac{1}{n}} = 1 \quad (1.129)$$

在(1.128)中最后级数的第  $m$  项的  $m$  次根有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2\tau}{\rho} \frac{(n_m!)^{\frac{1}{m}}}{(m!)^{\frac{1}{m}}} = \frac{2\tau}{\rho} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{n_m}{m} = \frac{2\tau}{\rho} \cdot \frac{1}{2s} = \frac{\tau}{s\rho}.$$

因此由 Hadamard 法则, 在(1.128)中对任何  $\tau < s\rho$ , 级数收敛. 故

$$w \in D(e^{\tau A^{\frac{1}{s}}}; H^r(\mathbb{R}^d)).$$

**定理 1.28** 设  $s \geq 1, \tau \geq 0$  和  $r > \frac{d}{2}$ , 则  $D(e^{\tau A^{\frac{1}{s}}}; H^r(\mathbb{R}^d))$  为 Banach 代数. 它意味着对乘法是封闭的, 则存在有限常数  $C(r, d)$

使得对任何两个函数  $v$  和  $w \in D(e^{\tau A^{\frac{1}{s}}}; H^r(\mathbb{R}^d))$  满足不等式

$$\|e^{\tau A^{\frac{1}{s}}}(vw)\|_{H^r} \leq C(r, d) \|e^{\tau A^{\frac{1}{s}}} v\|_{H^r} \|e^{\tau A^{\frac{1}{s}}} w\|_{H^r}.$$

(1.131)

证明可由  $H^r(\mathbb{R}^d)$  为 Banach 代数  $\left(r > \frac{d}{2}\right)$  的通常办法得到.

以下证明 CGL 方程的解为 Gevrey1 类, 即为实解析的. 为此利用模  $\|w\|_t \equiv \|e^{tA} w\|_{L^2}$ ,  $\|u\|_{L^2}$  可由下一节讨论得到. 充分得到半模  $\|A^r u\|_t$  的界. 直接计算得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|A^r u(t)\|_t^2 &= \operatorname{Re} \left( \int A^{r+1} e^{tA} u A^r e^{tA} u^* dx \right) \\ &\quad + \operatorname{Re} \left( \int A^r e^{tA} \partial_t u A^r e^{tA} u^* dx \right) \\ &= \|A^{r+\frac{1}{2}} u\|_t^2 + R \|A^r u\|_t^2 - \|A^{r+1} u\|_t^2 \\ &\quad - \operatorname{Re} \left[ (1 + i\mu) \int A^r e^{tA} (|u|^{2\sigma} u) A^r e^{tA} u^* dx \right].\end{aligned}\quad (1.132)$$

右端第一项易于估计

$$\begin{aligned}\|A^{\frac{1}{2}}v\|_{L^2}^2 &= (v, Av)_{L^2} \leq \|v\|_{L^2} \|Av\|_{L^2} \\ &\leq \frac{1}{4} \|v\|_{L^2}^2 + \|Av\|_{L^2}^2,\end{aligned}\quad (1.133)$$

其中  $v = A'e^{tA}u$ , 用 Cauchy-Schwarz 不等式于(1.132)最后积分项得

$$\|A^r(u^{\sigma+1}(u^*)^\sigma)\|_t \|A'u^*\|_t \leq C \|A'u\|_t^{2\sigma+2}, \quad (1.134)$$

这里我们用到了  $D(e^{tA}; H^r(\mathbb{R}^d))$  为  $\mathcal{A}$ -代数, 最后得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|A'u(t)\|_t^2 &\leq \left(R + \frac{1}{4}\right) \|A'u(t)\|_t^2 \\ &\quad + C \|A'u(t)\|_t^{2\sigma+2}.\end{aligned}\quad (1.135)$$

这个微分不等式易于积分, 表明  $\|A'u(t)\|_t$  在某区间  $t \in [0, T]$  上保持有限. 给定  $\sigma$  为整数, 可证局部解存在  $u(t) \in H^r(\mathbb{R}^d)$ ,  $\forall r, t > 0$ .

**定理 1.29** 设  $\sigma$  为正整数, 则对任意  $t > 0$ , 只要局部古典解存在, 则此解一定对  $x$  是解析的.

现考虑整体古典解.

为了证明整体解的存在性, 必须作一系列的先验估计. 由直接计算得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int |u|^2 dx &= R \int |u|^2 dx - \int |u|^{2\sigma+2} dx - \int |\nabla u|^2 dx \\ &\leq R \int |u|^2 dx - \left( \int |u|^2 dx \right)^{\sigma+1}.\end{aligned}\quad (1.136)$$

在附录中, 已证对  $\sigma > 0$ , 由微分不等式(1.136)推出

$$\|u(t)\|_{L^2} < \left( \frac{R}{1 - e^{-2\sigma R t}} \right)^{\frac{1}{2\sigma}}. \quad (1.137)$$

这个估计与初值  $u_0$  无关, 当  $t \rightarrow \infty$  时,  $\|u(t)\|_{L^2} \rightarrow R^{\frac{1}{2\sigma}}$ , 因此  $\|u(t)\|_{L^2}$  对初值和时间是一致有界的. 当  $\sigma d < 2$  时, 定理 1.20 推出 CGL 方程对任何初值  $u_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^d)$  具有整体古典解. 但当  $\sigma d > 2$  时, 则必须控制  $\|u(t)\|_{L^2}$ .

直接计算  $L^p$  模得

$$\frac{1}{p} \frac{d}{dt} \int |u|^p dx = R \int |u|^p dx - \int |u|^{2\sigma+p} dx$$

$$+ \operatorname{Re} \left( \int |u|^{p-2} u^* \Delta u dx \right) - \nu \operatorname{Im} \left( \int |u|^{p-2} u^* \Delta u dx \right), \quad (1.138)$$

当  $p \geq 2$ , 且  $\nu$  满足

$$|\nu| \leq \frac{2\sqrt{p-1}}{p-2} \quad (1.139)$$

时, 易证(1.138)右端最后二项为非正的. 于是忽略这二项, 并由 Hölder 不等式可得

$$\frac{1}{P} \frac{d}{dt} \int |u|^p dx \leq R \int |u|^p dx - \left( \int |u|^p dx \right)^{\frac{p+2\sigma}{p}}, \quad (1.140)$$

附录再次给出一致上界

$$\|u(t)\|_{L^p} < \left( \frac{R}{1 - e^{-2\sigma R t}} \right)^{\frac{1}{2\sigma}}. \quad (1.141)$$

整体古典解的存在性, 在亚临界情况( $\sigma d < 2$ ), 取  $p = 2$  由定理 1.20 所保证, 在临界情况( $\sigma d = 2$ ), 仍满足  $\sigma d < p$  且(1.139)同时成立, 选取  $p$  接近于 2. 在超临界时( $\sigma d > 2$ ), 我们能选取  $p$  充分接近于  $\sigma d$ , 使(1.139)成立, 对于可能的  $\nu$ , 我们于是有

**定理 1.30** 对  $\sigma > 0$ , 广义 CGL 方程具有  $C^2$  初值, 如果  $\sigma d \leq 2$ , 或  $\sigma d > 2$  且  $\nu$  满足

$$|\nu| < \frac{2\sqrt{\sigma d - 1}}{\sigma d - 2}, \quad (1.142)$$

则存在惟一的整体古典解.

对于超临界情况, 仅当满足(1.142)时, 存在整体古典解.

**附注 1.31** 当整体古典解存在, 估计(1.141)表明吸引子被限制在  $L^p$  ( $p$  满足(1.139)) 半径为  $R^{\frac{1}{2\sigma}}$  的闭球内. 进一步, 估计(1.142)与初值无关, 这意味着在任意短的时间内, 一切解进入有限半径的某个球内.

进一步估计  $H^1$  模, 设

$$1 \leq p < \begin{cases} \infty, & d = 1 \text{ 或 } 2, \\ \frac{2d}{d-2}, & d \geq 3. \end{cases} \quad (1.143)$$

让  $\sigma d < p, d < 2 + \frac{2}{\sigma}, \sigma \geq \frac{1}{2}$ , 由定理 1.15 保证解的光滑性, 可取梯度. 直接计算得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int |\nabla u|^2 dx &= R \int |\nabla u|^2 dx - \int |\Delta u|^2 dx \\ &\quad + \operatorname{Re} \left( \int |u|^{2\sigma} u^* \Delta u dx \right) + \mu \operatorname{Im} \left( \int |u|^{2\sigma} u^* \Delta u dx \right). \end{aligned} \quad (1.144)$$

上式右端最后二项类似于 (1.138) 右端的二项, 作类似处理可证当

$$|\mu| \leq \frac{\sqrt{2\sigma+1}}{\sigma} \quad (1.145)$$

时为非正. 此时忽略这些项, 利用 Cauchy 不等式可得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int |\nabla u|^2 dx \leq R \int |\nabla u|^2 dx - \frac{\left( \int |\nabla u|^2 dx \right)^2}{\int |u|^2 dx}, \quad (1.146)$$

由于 (1.137),  $\|u\|_{L^2}$  有界, 再利用附录可得

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 < \Phi(\sigma, Rt) \left( \frac{R}{1 - e^{-2\sigma Rt}} \right)^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}, \quad (1.147)$$

其中  $\Phi$  可用超几何函数  $F$  表示

$$\Phi(\sigma, Rt) = \frac{2(1+\sigma)}{F\left(1, 1, 2 + \frac{1}{\sigma}; 1 - e^{-2\sigma Rt}\right)}. \quad (1.148)$$

函数  $\Phi(\sigma, Rt)$  为  $t$  的单调减少函数, 且有  $\Phi(\sigma, 0) = 2(1+\sigma)$ ,  $\Phi(\sigma, \infty) = 2$ . 因而 (1.147) 给出了  $\|\nabla u\|_{L^2}$  一致的界便类似于方程 (1.138) 的  $L^p$  估计.

**定理 1.32** 设  $\sigma \geq \frac{1}{2}, d < 2 + \frac{2}{\sigma}$ , 则具有  $C^2$  初值的广义 GL 方程具有惟一的整体古典解, 如果如下条件满足:

$$-\frac{1+\mu\nu}{\mu-\nu} \leq \frac{\sqrt{2\sigma+1}}{\sigma}, \quad (1.149)$$

其中  $\sigma, \mu, \nu$  满足表 1.1.

表 1.1 GL 方程整体解存在性的限制

	$\sigma = 1$	$\sigma = 2$	$\sigma \geq 3$
$d = 1$	没限制	没限制	$ \nu  < \frac{2\sqrt{\sigma-1}}{\sigma-2}$ 或 $\frac{1+\mu\nu}{ \mu-\nu } \leq \frac{\sqrt{2\sigma+1}}{\sigma}$
$d = 2$	没限制	$ \nu  < \sqrt{3}$ 或 $\frac{1+\mu\nu}{ \mu-\nu } \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\mu\nu}{ \mu-\nu } \leq \frac{\sqrt{2\sigma+1}}{\sigma}$
$d = 3$	$ \nu  < \sqrt{8}$ 或 $\frac{1+\mu\nu}{ \mu-\nu } < \sqrt{3}$	$\nu < \frac{\sqrt{5}}{2}$	$ \nu  < \frac{2\sqrt{3\sigma-1}}{3\sigma-2}$
$d \geq 4$	$ \nu  < \frac{2\sqrt{d-1}}{d-2}$	$ \nu  < \frac{\sqrt{2d-1}}{d-1}$	$ \nu  < \frac{2\sqrt{\sigma d-1}}{\sigma d-2}$

超临界  $d=3, \sigma=1$  的图(见图 1.1). 与图  $2 < \sigma d < 2+2\sigma$  类似.  $1+\mu\nu \geq 0$  时为调制稳定性.

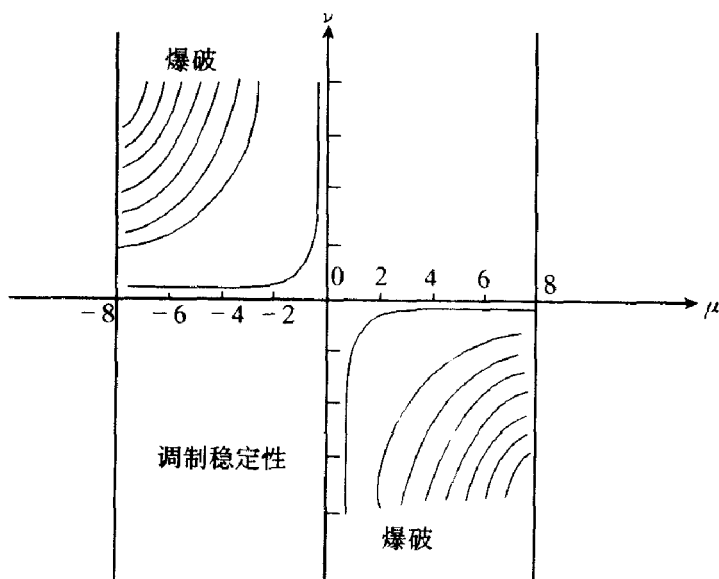


图 1.1 超临界 CGL 参数平面,  $d=3, \sigma=1$

为了证明定理 1.32, 利用如下估计.

**引理 1.33** 对  $p \geq 2, u \in H^2(\cdot, d) \cap L^{2p-2}(\cdot, d)$ , 如下不等



式成立

$$\left(\operatorname{Re}\left(\int |u|^{p-2} u^* \Delta u dx\right)\right) \leq -\frac{2\sqrt{p-2}}{p} \left|\int |u|^{p-2} u^* \Delta u dx\right|, \quad (1.150)$$

$$\left|\operatorname{Im}\left(\int |u|^{p-2} u^* \Delta u dx\right)\right| \leq \frac{p-2}{p} \left|\int |u|^{p-2} u^* \Delta u dx\right|. \quad (1.151)$$

证 通过分部积分可得

$$\begin{aligned} 2 \int |u|^{p-2} u^* \Delta u dx &= -p \int |u|^{p-2} |\nabla u|^2 dx \\ &\quad - (p-2) \int |u|^{p-4} (u^*)^2 \Delta u \cdot \nabla u dx. \end{aligned} \quad (1.152)$$

对于  $u \neq \text{常数}$ , 上式右端第一项为负的, 而第二项其模因子不大于  $\frac{(p-2)}{p}$ , 又

$$\int |u|^{p-2} u^* \Delta u dx = - \left| \int |u|^{p-2} u^* \Delta u dx \right| \exp(i\theta), \quad (1.153)$$

对某  $\theta$ ,  $|\theta| < \frac{F}{2}$  使得  $|\sin\theta| \leq \frac{p-2}{p}$  或  $\cos\theta \geq \frac{2\sqrt{p-2}}{p}$ . 通过  $\theta$  的三角界 (trigonometric bounds), 得到界 (1.150) 和 (1.151).

定理 1.32 的证明. 计算

$$F = \int \left( |\nabla u|^2 + \frac{\beta^2}{\sigma+1} |u|^{2\sigma+2} \right) dx, \quad (1.154)$$

对  $t$  求导数, 可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{dF}{dt} &= R \int (|\nabla \dot{u}|^2 + \beta^2 |u|^{2\sigma+2}) dx \\ &\quad - \int (|\Delta u|^2 + \beta^2 |u|^{4\sigma+2}) dx + (1 + \beta^2) \\ &\quad \cdot \operatorname{Re}\left(\int |u|^{2\sigma} u^* \Delta u dx\right) + (\mu - \beta^2 \nu) \operatorname{Im}\left(\int |u|^{2\sigma} u^* \Delta u dx\right). \end{aligned}$$

由于

$$- \int (|\Delta u|^2 + \beta^2 |u|^{4\sigma+2}) dx \leq -2\beta \left| \int |u|^{2\sigma} u^* \Delta u dx \right|, \quad (1.155)$$

可得微分等式(利用引理 1.33)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{dF}{dt} = & R \int (|\nabla u|^2 + \beta^2 |u|^{2\sigma+2}) dx - (1-k) \\ & \cdot \int (|\Delta u|^2 + \beta^2 |u|^{4\sigma+2}) dx \\ & - \left[ 2k\beta + (1+\beta^2) \frac{\sqrt{2\sigma+1}}{\sigma+1} \right. \\ & \left. - |\mu - \beta^2| \frac{\sigma}{\sigma+1} \right] \int |u|^{2\sigma} u \cdot \Delta u dx, \end{aligned} \quad (1.156)$$

$0 < k < 1$ , 选取  $\beta$  使得上式右端最后一项系数为负. 当  $\mu\nu \geq 0$  时是对的, 当  $\mu\nu < 0$  时, 无损于一般性, 设  $\mu > 0, \nu < 0$ . 取  $k = 1$ , 则条件

$$2\beta + (1+\beta^2) \frac{\sqrt{2\sigma+1}}{\sigma+1} - (\mu - \beta^2) \frac{\sigma}{\sigma+1} \geq 0 \quad (1.157)$$

取最优  $\beta$ , 得到双典参数区域(1.149), 则可得到  $F$  随  $t$  指数增长和整体古典解的存在性.

**附注 1.34** 对于(1.149)作为严格不等式的  $\mu, \nu$ , 我们能取  $k < 1$ , 由以下方式得到  $H^1$  和  $L^{2\sigma+2}$  模的估计,

$$\begin{aligned} F^2 \leq & \left( 1 + \frac{\beta^2}{(\sigma+1)^2} \right) \left( \int |\nabla u|^2 dx \right)^2 + \left( \beta^2 + \frac{\beta^4}{(\sigma+1)^2} \right) \\ & \cdot \left( \int |u|^{2\sigma+2} dx \right)^2 \leq \left( 1 + \frac{\beta^2}{(\sigma+1)^2} \right) \int |u|^2 dx \int (|\Delta u|^2 \\ & + \beta^2 |u|^{4\sigma+2}) dx. \end{aligned} \quad (1.158)$$

在第二步中, 我们已用了分部积分和 Cauchy - Schwarz 不等式于第一项和第二项, 选取  $\beta$  使得(1.157)为严格不等式, 则  $F$  满足微分不等式

$$\frac{1}{2} \frac{dF}{dt} \leq (\sigma+1)RF - (1-k) \frac{(\sigma+1)^2}{(\sigma+1)^2 + \beta^2} \frac{F^2}{\int |u|^2 dx}. \quad (1.159)$$

(1.137)提供  $\|u\|_{L^2}$  的界, 利用附录中的微分不等式, 积分得

$$F < \frac{(\sigma+1)^2 + \beta^2}{(1-k)(\sigma+1)} \left( \frac{R}{1 - e^{-2\sigma R t}} \right)^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}, \quad (1.160)$$

其界随  $R$  增长 ( $t \rightarrow \infty$ ), 如同 (1.147) 中的界.

现考虑整体 Sobolev 界.

记

$$|\nabla^n u|^2 \equiv \nabla^n u \cdot \nabla^n u, \quad (1.161)$$

直接计算

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla^n u\|_{L^2}^2 &= R \|\nabla^n u\|_{L^2}^2 + \|\nabla^{n+1} u\|_{L^2}^2 \\ &\quad - \operatorname{Re}[(1+i\mu) \int \nabla^n(|u|^{2\sigma} u) \cdot \nabla^n u \, dx], \end{aligned} \quad (1.162)$$

右端第二项可由 Sobolev 不等式估计

$$\|\nabla^n u\|_{L^2} \leq \|\nabla^{n+1} u\|_{L^2}^{\frac{n}{n+1}} \|u\|_{L^2}^{\frac{1}{n+1}}, \quad (1.163)$$

$$\begin{aligned} \left| \int \nabla^n(|u|^{2\sigma} u) \cdot \nabla^n u \, dx \right| &\leq \delta \|\nabla^{n+1} u\|_{L^2}^2 \\ &\quad + C(\delta) \|\nabla^n u\|_{L^2}^2 \|u\|_{L^p}^{2\sigma p/p - \alpha d}, \end{aligned} \quad (1.164)$$

(1.164) 将在引理 1.38 中证明. 选取  $\delta > 0$ ,  $p > \alpha d$ , 特别,  $\delta = |1+i\mu|^{-1}$ , 我们能从方程 (1.162) 得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\nabla^n u\|_{L^2}^2 &\leq (2R + C \|u\|_{L^p}^{2\sigma p/p - \alpha d}) \cdot \|\nabla^n u\|_{L^2}^2 \\ &\quad - \frac{\|\nabla^n u\|_{L^2}^{\frac{2(n+1)}{n}}}{\|u\|_{L^2}^{\frac{2}{n}}}. \end{aligned} \quad (1.165)$$

利用 (1.137) 中  $\|u\|_{L^2}$  的估计可控制上式右端最后一项. 当  $p > \alpha d$ , 则可得到整体  $H^n$  解 (任意  $n$ ).

**定理 1.35** 对一切正整数  $d, \sigma$  和  $n$ , 任意  $p > \alpha d$ , 当  $\mu, \nu$  位于参数平面内使得具  $L^p$  初值的 CGL 方程具  $L^p$  一致有界, 则这些解是整体的和光滑的 ( $t > 0$ ), 它们的  $H^n$  模对一切初值一致有界, 当  $t \rightarrow \infty$  时, 满足微分不等式 (1.165).

**附注 1.36** 定理 1.35 表明 GL 方程具有紧的、整体吸引子.  $d=1, 2$ , CGL 方程具有惯性流形, 对于  $d \geq 3$  仍为公开问题.

为证 (1.164), 需要辅助引理.

**引理 1.37** 对一切正整数  $d, \sigma$  和  $n$ , 如下不等式成立,

$$\left| \int \nabla^n (|u|^{2\sigma} u) \cdot \nabla^n u^* dx \right| \leq C(n, q) \|\nabla^n u\|_{L^{2q}}^2 \|u\|_{L^{2\sigma}}^{2\sigma}, \quad (1.166)$$

其中

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1, \quad 1 \leq q, r \leq \infty. \quad (1.167)$$

**证** 将绝对值移入积分内, 对  $\nabla^n (|u|^{2\sigma} u)$  用 Leibniz 展开, 再用三角不等式得

$$\left| \int \nabla^n (|u|^{2\sigma} u) \cdot \nabla^n u^* dx \right| \leq \sum_{\substack{\alpha \in N^{2\sigma+1} \\ |\alpha| = n}} \frac{n!}{\alpha!} \int |\nabla^n u| \prod_{j=1}^{2\sigma+1} |\nabla_j^\alpha u| dx. \quad (1.168)$$

对于给定的多重指标  $\alpha, |\alpha| = n$ , 定义  $\theta_j, q_j$  为

$$\theta_j = \frac{\alpha_j}{n}, \quad \frac{1}{q_j} = \theta_j \frac{1}{2q} + (1 - \theta_j) \frac{1}{2\sigma r}. \quad (1.169)$$

它们满足

$$\sum_{j=1}^{2\sigma+1} \theta_j = \frac{|\alpha|}{n} = 1, \quad \frac{1}{2q} + \sum_{j=1}^{2\sigma+1} \frac{1}{q_j} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1. \quad (1.170)$$

则(1.168)右端相应项可用 Gagliardo - Nirenberg 插值不等式和 Hölder 不等式估计

$$\begin{aligned} \int |\nabla^n u| \prod_{j=1}^{2\sigma+1} |\nabla_j^\alpha u| dx &\leq \|\nabla^n u\|_{L^{2q}} \prod_{j=1}^{2\sigma+1} \|\nabla_j^\alpha u\|_{L^{q_j}} \\ &\leq \|\nabla^n u\|_{L^{2q}} \prod_{j=1}^{2\sigma+1} C_j \|\nabla^n u\|_{L^{2q}}^{\theta_j} \|u\|_{L^{2\sigma}}^{1-\theta_j} \\ &= C \|\nabla^n u\|_{L^{2q}}^2 \|u\|_{L^{2\sigma}}^{2\sigma}. \end{aligned} \quad (1.171)$$

最后代入(1.168), 即得所要结果.

**引理 1.38** 对一切正整数  $d, \sigma$  和  $n$ , 任意  $p > \alpha d$  和  $\delta > 0$ , 有估计

$$\begin{aligned} \left| \int \nabla^n (|u|^{2\sigma} u) \cdot \nabla^n u^* dx \right| \\ \leq \delta \|\nabla^{n+1} u\|_{L^2}^2 + C(\delta) \|\nabla^n u\|_{L^2}^2 \|u\|_{L^p}^{\frac{2\sigma p}{p-\alpha d}}. \end{aligned} \quad (1.172)$$

**证** 用 G - N 不等式估计(1.166)右端, 再用 Young 不等式

$$\begin{aligned} & \left| \int \nabla^n (|u|^{2\sigma} u) \cdot \nabla^n u^* dx \right| \\ & \leq C_1 \|\nabla^{n+1} u\|_{L^2}^{\frac{d}{r}} \|\nabla^n u\|_{L^2}^{2-\frac{d}{r}} \|u\|_{L^{2n}}^{2\sigma} \\ & \leq \delta \|\nabla^{n+1} u\|_{L^2}^2 + C_2(\delta) \|\nabla^n u\|_{L^2}^2 \|u\|_{L^{2n}}^{2\frac{4\sigma}{d/r}}, \quad (1.173) \end{aligned}$$

其中  $2 - \frac{d}{r} > 0$ . 证  $p = 2\sigma r$ , 即得引理结论.

**定理 1.39** 对于正整数  $d, \sigma$ , 任何  $r > \frac{d}{2}, p > \alpha d$ , 其中  $\mu, \nu$  在参数平面区域内使得 CGL 方程具  $L^p$  初值的解具有  $L^p$  一致界. 这些解是整体的, 实解析的 ( $t > 0$ ), 进一步, 存在  $T_{\max}$  使得  $u(t) \in D(e^{TA}; H^{(-d)})$  的模一致有界, 对一切初值,  $T \in [0, T_{\max}]$  和  $t \geq T$ .

### 附录 关于微分不等式的积分

设  $F(t) \geq 0$  满足微分不等式

$$\frac{dF}{dt} \leq a(t)F - b(t)F^{1+s}, \quad (A.1)$$

其中  $s > 0, b(t) > 0$ . 由 Bernonlli, 引入变元  $Y = F^{-s}$ , 由 (A.1) 可得线性微分不等式

$$\frac{dY}{dt} \geq -sa(t)Y + sb(t). \quad (A.2)$$

用  $\exp \int_t^t sa(t'')dt''$  可得

$$\frac{d}{dt} \left( Y \exp \int_t^t sa(t'')dt'' \right) \geq sb(t) \exp \left( \int_t^t sa(t'')dt'' \right), \quad (A.3)$$

积分 (A.3) 从 0 到  $t$  得

$$\begin{aligned} Y(t) & \geq Y(0) \exp \left( - \int_0^t sg(t')dt' \right) \\ & \quad + \int_0^t sb(t') \exp \left( - \int_t^{t'} sa(t'')dt'' \right) dt', \quad (A.4) \end{aligned}$$

忽略含有  $Y(0)$  项可得

$$F(t) < C \int_0^t sb(t') \exp \left( - \int_t^{t'} sa(t'')dt'' \right) dt' \Big|^{-\frac{1}{s}}. \quad (A.5)$$

## §2 局部空间上的 Ginzburg-Landau 方程的 Cauchy 问题

我们考虑在局部空间上 Ginzburg-Landau 方程整体解的存在性和惟一性, 所谓局部空间  $X_{\text{loc}} = X_{\text{loc}}(\cdot^n)$  是指

$$X_{\text{loc}} = \{u: u \in X(B), \text{ 对任何球 } B \in \cdot^n\}, \quad (2.1)$$

其中  $X$  为  $L^r$  或  $H^\mu$  或其他函数空间, 也可定义局部一致空间  $X_{\text{loc}, \text{un}}$  为

$$X_{\text{loc}, \text{un}} = \{u: \|u\|_{X_{\text{loc}, \text{un}}} \equiv \sup_{x \in K^n} \|u\|_{X(B(x, 1))} < \infty\}, \quad (2.2)$$

这里  $B(x, k)$  表示  $\cdot^n$  中以  $x$  为中心, 以  $k$  为半径的球.

考虑一般 GL 方程

$$\partial_t u = \gamma^2 u + (a + i\alpha)\Delta u - (b + i\beta)f(u), \quad (2.3)$$

其中  $u$  为复值函数, 定义在  $n+1$  维时空空间  $\cdot^{n+1}$  上.  $\Delta$  为  $\mathbb{R}^n$  中的 Laplace 算子,  $a, b, \alpha, \beta, \gamma$  均为实参数,  $\gamma \geq 0, a > 0, b > 0$ . 相互作用项  $f(u)$  为  $u$  的非线性函数, 典型的如

$$f(u) = u + |u|^{2\sigma}. \quad (2.4)$$

设  $f(u)$  满足以下条件:

(H<sub>1</sub>)  $f \in C(\cdot, \cdot), f(u)$  具形式  $f(u) = ug(|u|^2), g$  为实的且满足

$$\rho^\sigma \leq g(\rho) \leq C(1 + \rho^\sigma), \quad (2.5)$$

对某  $\sigma (0 < \sigma < \infty)$ , 某  $c \geq 1, \forall \rho \geq 0$ .

(H<sub>2</sub>)  $f \in C'(\cdot, \cdot), f(u) = ug(|u|^2), g$  为实的, 对大的  $\rho$  满足  $g(\rho) - \rho g'(\rho) > 0$  且

$$\limsup_{\rho \rightarrow \infty} \rho + g'(\rho) + [g(\rho) + \rho g'(\rho)]^{-1} = \frac{\sigma'}{\sigma' - 1}, \quad (2.6)$$

对某  $\sigma' > 0$  成立.

(H<sub>3</sub>)  $f \in C'(\cdot, \cdot), f(u) = ug(|u|^2), g$  为实的且满足

$$|g(\rho)| + \rho |g'(\rho)| \leq C(1 + \rho^\sigma), \quad (2.7)$$

对某  $\sigma' > 0$ , 某  $c > 0$  和  $\forall \rho \geq 0$  成立.

现考虑  $L^2$  上的估计和解的存在性.

令

$$G(\rho) = \int_0^\rho g(\rho') d\rho'. \quad (2.8)$$

**引理 2.1** 设  $f$  满足  $(H_1)$  且

$$u \in L^2_{\text{loc}}(I, H^1) \cap L^{2n+2}_{\text{loc}}(I, L^{2n+2}), I \subset \mathbb{R}, \quad (2.9)$$

并满足方程(2.3), 则除了时间上一个零集外,  $u \in C(I, L^2)$  且满足等式

$$\begin{aligned} \|u(t_2)\|_2^2 - \|u(t_1)\|_2^2 &= \int_{t_1}^{t_2} \{2\gamma \|u(t)\|_2^2 - 2a \|\nabla u(t)\|_2^2 - \\ &\quad 2b \int |u|^2 g(|u|^2) dx\} dt, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$\forall t_1, t_2 \in I$ .

**证** (2.10) 写成微分形式为

$$\begin{aligned} \partial_t \|u\|_2^2 &= 2\gamma \|u\|_2^2 - 2a \|\nabla u\|_2^2 \\ &\quad - 2b \int |u|^2 g(|u|^2) dx \end{aligned} \quad (2.11)$$

这在形式上可从计算  $2\text{Re}(u, (2.3))$  得到, 真正的证明如下: 从方程(2.3) 和(2.9) 以及假设  $(H_1)$  有

$$\partial_t u \in L^2_{\text{loc}}(I, H^{-1}) + L^S_{\text{loc}}(I, L^S) \subset L^S_{\text{loc}}(I, H^{-N}), \quad (2.12)$$

对任何  $N > \frac{n}{2}$ ,  $S = (2\sigma + 2)/(2\sigma + 1)$ . 由[11, 引理 1.2, p.249] 推出  $\|u(t)\|_2^2 \in C(I, \mathbb{R}^+)$ , 且(2.10) 成立, 对一切  $t_1, t_2 \in I$ . 特别地,  $u \in C^\infty_{\text{loc}}(I, L^2)$  连同(2.12) 推出  $u \in C(I, H^{-N})$ , 这就得到  $u \in C_w(I, L^2)$  [11, 引理 8.1, p.297], 连同  $L^2$  模的连续性推出  $u \in C(I, L^2)$ .

在假设  $(H_1)$  下, 等式(2.10) 提供了解  $u$  的一个先验估计

$$u \in L^\infty_{\text{loc}}(I, L^2) \cap L^2_{\text{loc}}(I, H^1) \cap L^{2\sigma+2}_{\text{loc}}(I, L^{2\sigma+2}).$$

**命题 2.2** 设  $f$  满足  $(H_1)$ ,  $u_0 \in L^2$ , 则方程 (2.3) 具有一解.  
 $u \in C(\cdot^+, L^2) \cap L^2_{\text{loc}}(\cdot^+, H^1) \cap L^{2\sigma+2}_{\text{loc}}(\cdot^+, L^{2\sigma+2})$ ,  
 (2.13)

且  $u(0) = u_0$ ,  $u$  满足 (2.10),  $\forall t_1 \geq 0, t_2 \geq 0$ .

这是标准的紧性结果, 可用 Galerkin 方法证明之.

**引理 2.3** 设  $f$  满足  $(H_1)$  且

$$u \in L^2_{\text{loc}}(I, H^1_{\text{loc}}) \cap L^{2\sigma+2}_{\text{loc}}(I, L^{2\sigma+2}_{\text{loc}}), I \in \cdot$$

满足 (2.3), 则对任何  $\varphi \in C^1(\cdot^n, \cdot^+)$  具有紧支集,  $u$  满足等式

$$\begin{aligned} \|\varphi u(t_2)\|_2^2 - \|\varphi u(t_1)\|_2^2 &= \int_{t_1}^{t_2} \{2\gamma \|\varphi(u)\|_2^2 - 2a \|\varphi \nabla u\|_2^2 \\ &\quad - 4\text{Re}(a + i\alpha)(u \nabla \varphi, \varphi \nabla u) - 2b \int \varphi^2 |u|^2 g(|u|^2) dx\} dt, \end{aligned}$$

(2.14)

$\forall t_1, t_2 \in I$ .

**证** 等式 (2.14) 可写成微分形式

$$\begin{aligned} \partial_t \|\varphi u\|_2^2 &= 2\gamma \|\varphi u\|_2^2 - 2a \|\varphi \nabla u\|_2^2 \\ &\quad - 4\text{Re}(a + i\alpha)(u \nabla \varphi, \varphi \nabla u) - 2b \int \varphi^2 |u|^2 g(|u|^2) dx, \end{aligned}$$

(2.15)

形式上可由计算  $2\text{Re}(\varphi u, \varphi(2.3))$  得到, 实际证明类似引理 2.1.

引入常数

$$C_1 = \|\varphi\|_2^{2\sigma/(\sigma+1)},$$

$$C_2 = \left\{ \int \varphi^{-2/\sigma} |\nabla \varphi|^{2(\sigma+1)/\sigma} \right\}^{\sigma/(\sigma+1)},$$

$$C_3 = 2[\gamma - a^{-1}(a^2 - \alpha^2)]c_2/c_1,$$

$$C_4 = C_1 \left( \frac{C_1 C_3}{2b} \right)^{1/\sigma} = \|\varphi\|_2^2 \left( \frac{C_3}{2b} \right)^{1/\sigma}.$$

设

$$y(t) = \|\varphi u(t)\|_2^2. \quad (2.16)$$

**引理 2.4** 设  $f$  满足  $(H_1)$ ,  $u$  为 (2.3) 的解且满足 (2.9),  $I = [0, T]$ . 又设  $\varphi \in C^1(\cdot^n, \cdot^+)$  具有紧支集,  $C_i (i = 1, 2, 3, 4)$  和



$y(t)$  定义如前, 则

(1) 如  $y(0) \leq C_4$ , 我们有  $y(t) \leq C_4, \forall t \in I$ ,

(2) 如  $y(0) > C_4$ , 我们有  $y(t) \leq \bar{y}(t), \forall t \in I$ ,

这里

$$\begin{aligned} \bar{y}(t) = & y(0) \{ \exp(-C_3 \sigma t) \\ & + (y(0)/C_4)^\sigma [1 - \exp(-C_3 \sigma t)] \}^{1/\sigma}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

特别地,  $\bar{y}(t)$  指数衰减到  $C_4$  且

$$\bar{y}(t) \leq C_4 [1 - \exp(-C_3 \sigma t)]^{1/\sigma}, \quad \forall t > 0, \quad (2.18)$$

并对  $y(0)$  一致成立.

证 从等式(2.12) 开始, 由 Schwarz 不等式有

$$\begin{aligned} -2a \|\varphi \nabla u\|_2^2 - 4\operatorname{Re}(a + ia)(u \nabla \varphi, \varphi \nabla u) \\ \leq 2a^{-1}(a^2 + \alpha^2) \|u \nabla \varphi\|_2^2. \end{aligned} \quad (2.19)$$

定义

$$z = \left\{ \int \varphi^2 |u|^{2\sigma+2} \right\}^{1/(\sigma+1)}. \quad (2.20)$$

由假设(H<sub>1</sub>), 我们估计

$$-2b \int \varphi^2 |u|^2 g(|u|^2) \leq -2bz^{\sigma+1}, \quad (2.21)$$

由 Hölder 不等式有

$$\|\varphi u\|_2^2 \leq \left\{ \int \varphi^2 \right\}^{\sigma/(\sigma+1)} \left\{ \int \varphi^2 |u|^{2\sigma+2} \right\}^{1/(\sigma+1)}, \quad (2.22)$$

即  $y \leq C_1 z$ , 同理

$$\begin{aligned} \|u \nabla \varphi\|_2^2 &\leq \left\{ \int \varphi^{-2/\sigma} |\nabla \varphi|^{(2\sigma+2)} \right\}^{\sigma/(\sigma+1)} \\ &\cdot \left\{ \int \varphi^2 |u|^{2\sigma+2} \right\}^{1/(\sigma+1)} = C_2 z. \end{aligned} \quad (2.23)$$

联系(2.14), (2.20), (2.22)–(2.24) 可得如下关于  $y$  和  $z$  的不等式

$$y(t) \leq C_1 z(t), \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} y(t_2) - y(t_1) &\leq \int_{t_1}^{t_2} \{ 2\gamma y + 2a^{-1}(a^2 + \alpha^2) C_2 z - 2bz^{\sigma+1} \} dt. \end{aligned} \quad (2.25)$$

引理 2.4 的证明还需要如下的引理 2.5 和 2.6.

**引理 2.5** 设  $\lambda > 0, \mu > 0$ , 则 ODE

$$\partial_t \bar{y} = \lambda \bar{y} - \mu \bar{y}^{\sigma+1} \quad (2.26)$$

具  $\bar{y}(0) = \bar{y}_0 \geq 0$  的解  $\bar{y}(t)$  为

$$\bar{y}(t) = \bar{y}_0 \{ \exp(-\lambda \sigma t) + \eta^{-\sigma} \bar{y}_0^{\sigma} [1 - \exp(-\lambda \sigma t)] \}^{-1/\sigma}, \quad (2.27)$$

其中  $\eta = (\lambda/\mu)^{1/\sigma}$  为使 (2.26) 右端为 0 的  $\bar{y}$  值. 对  $\bar{y}_0 > \eta (< \eta, = \eta)$ , 解满足  $\bar{y}(t) > \eta (< \eta, = \eta), \forall t \geq 0$ . 且  $\bar{y}(t)$  是指数减少  $\rightarrow \eta$  (增加, 常数),  $t \rightarrow \infty$ .

证明由基本计算可得.

**引理 2.6** 设  $0 < \nu \leq \lambda, \mu > 0, I \in [0, T], y \in C[I, \mathbb{R}^+)$  且  $y(0) = y_0, z \in L^{\sigma+1}(I, \mathbb{R}^+)$  满足如下不等式

$$y(t) \leq z(t), \quad (2.28)$$

$$y(t_2) - y(t_1) \leq \int_{t_1}^{t_2} \{ (\lambda - \nu)y + \nu z - \mu z^{\sigma+1} \} dt \quad (2.29)$$

对一切  $t, t_1, t_2 \in I, t_1 \leq t_2$  成立, 则  $y(t) \leq \bar{y}(t), \forall t \in I$ , 其中  $\bar{y}$  为 ODE(2.26) 具初值  $\bar{y}_0 \geq (y_0, \eta_0)$  的解, 这里  $\eta_0 = [\lambda/(\sigma+1)\mu]^{1/\sigma}$  为使 (2.26) 右端取最大值的值 (注意  $\eta_0 < \eta$ ).

**证** 设  $t \in I, t > 0$ , 我们要证  $y(t) \leq \bar{y}(t)$ . 令  $t_0 = \sup \{ t' : t' \leq t, y(t') \leq \bar{y}(t') \}$ . 如  $t_0 = t$ , 则由  $y$  的连续性有  $y(t) \leq \bar{y}(t)$ . 如  $t_0 < t$ , 则  $y(t_0) = \bar{y}(t_0), y(t') > \bar{y}(t'), t_0 < t' \leq t$ . 由 (2.29) 和  $y(t') \leq z(t')$  有

$$\begin{aligned} y(t) - y(t_0) &= \int_{t_0}^t [(\lambda - \nu)y + \nu z - \mu z^{\sigma+1}] dt' \\ &\leq \int_{t_0}^t [\lambda z(t) - \mu z_{(t)}^{\sigma+1}] dt'. \end{aligned}$$

现对一切  $t' \in (t_0, t]$  有

$$z(t') \geq y(t') > \bar{y}(t') \geq \eta_0.$$

最后不等式是由  $\bar{y}_0 \geq \eta_0$  和引理 2.5 得到, 由于

$$y(t) - y(t_0) \leq \int_0^t (\lambda \bar{y} - \mu \bar{y}^{\sigma+1}) dt' = \bar{y}(t) - \bar{y}(t_0),$$

因  $y(t_0) = \bar{y}(t_0)$  有  $y(t) \leq \bar{y}(t)$ . 这是矛盾于  $t_0 < t$  时  $y(t) > \bar{y}(t)$  的, 引理获证.

现在可得引理 2.4 的证明. 充分调整常数  $\lambda, \mu, \nu$  在引理 2.6 中, 使得能应用此引理, 可取  $\lambda = C_3, \eta = C_4$ .

**引理 2.7** 设  $f, u, \varphi$  满足引理 2.4 的假设, 则  $u$  满足估计

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \{a \|\varphi \nabla u\|_2^2 + 2b \int \varphi^2 |u|^2 g(|u|^2) \cdot dt \leq \|\varphi u(t_1)\|_2^2 \\ & - \|\varphi u(t_2)\|_2^2 + \int_{t_1}^{t_2} [2\gamma \|\varphi u(t)\|_2^2 + 4a^{-1}(a^2 + \alpha^2) \|u(t) \nabla \varphi\|_2^2], \end{aligned} \quad (2.30)$$

$\forall t_1, t_2 \in I, t_1 \leq t_2$ .

**证** 这个结论直接来自 (2.10) 和不等式

$$\begin{aligned} & -4\operatorname{Re}(u + ia)(u \nabla \varphi, \varphi \nabla u) \\ & \leq a \|\varphi \nabla u\|_2^2 + 4a^{-1}(a^2 + \alpha^2) \|u \nabla \varphi\|_2^2. \end{aligned}$$

**命题 2.8** 设  $f$  满足  $(H_1)$ ,  $u_0 \in L_{\text{loc}}^2$ , 则方程 (2.3) 具有一解

$$u \in C(\cdot^+, L_{\text{loc}}^2) \cap L_{\text{loc}}^2(\cdot^+, H_{\text{loc}}^1) \cap L_{\text{loc}}^{2\sigma+2}(\cdot^+, L_{\text{loc}}^{2\sigma+2}), \quad (2.31)$$

具初值  $u(0) = u_0$ , 对任何  $\varphi \in C^1(\cdot^-, \dots, \cdot^+)$  具有紧支集,  $C_2 < \infty$ , 并对  $t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, u$  满足等式 (2.10). 进一步  $u$  满足引理 2.4 和 2.7 的局部估计,  $u \in L^\infty([t_0, \infty), L_{\text{loc}, \text{un}}^2), \forall t_0 > 0$ .

**证** 设  $\Lambda_i, 1 \leq i < \infty$ , 为  $R^n$  中“盒子”的增加序列 (例如可取  $\Lambda_i$  为半径为  $2^i$  的球). 令  $u_{0i}$  为  $u_0$  限制在  $\Lambda_i$  上,  $u_i$  为方程 (2.3) 具初值  $u_{0i}$  的命题 2.2 所得到的解. 让

$$\begin{aligned} X_j &= L^\infty([0, 2^j], L^2(\Lambda_j)) \cap L^2([0, 2^j], \\ & H^1(\Lambda_j)) \cap L^{2\sigma+2}([0, 2^j], L^{2\sigma+2}(\Lambda_j)), \end{aligned}$$

则由引理 2.4, 2.7, 和假设  $(H_1)$ , 对固定的  $j, \{u_i\}_{i \geq j}$  在  $X_j$  中有界. 由紧性原理和对角线选取, 从序列  $\{u_i\}$  中选出子序列使之在  $X_j$  中弱 \* 收敛于某个  $u(\forall j)$ ,

$$u \in L_{\text{loc}}^\infty(\cdot^+, L_{\text{loc}}^2) \cap L_{\text{loc}}^2(\cdot^+, H_{\text{loc}}^1) \cap L_{\text{loc}}^{2\sigma+2}(\cdot^+, L_{\text{loc}}^{2\sigma+2}),$$

由标准的原理可知,  $u$  满足(2.3) 及初始条件  $u(0) = u_0$ . 命题的最后提法来自引理 2.4 和引理 2.7.

现来证明在  $L^2_{\text{loc}}$  中解的惟一性.

选取特殊函数  $\varphi_0 \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), 0 \leq \varphi_0(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}^n$ . 当  $|x| \leq 1$  时,  $\varphi_0(x) = 1$ ; 当  $|x| \geq 2$  时,  $\varphi_0(x) = 0$ . 以  $\tau_v$  表示在  $\mathbb{R}^n$  平移  $v, u \in L^2_{\text{loc}}$ .

定义

$$Y_k(u) = \sup_{v \in \mathbb{R}^n, k} \|(\tau_v \varphi_0) u\|_2^2. \quad (2.32)$$

**命题 2.9** 设  $f$  满足  $(H_1)$  和  $(H_2)$ , 令

$$|\beta| < b \sqrt{2\sigma' + 1/\sigma'}, \quad (2.33)$$

让  $u_0 \in L^2_{\text{loc}}$ . 如  $\sigma \leq 1$ , 设

$$Y_k(u_0) \leq A \exp(\exp Bk^2), \sigma = 1, \quad (2.34)$$

$$Y_k(u_0) \leq A \exp(Bk^2), \sigma < 1, \quad (2.35)$$

其中  $A, B$  为正常数, 则方程(2.3) 具初值  $u(0) = u_0$  有惟一解  $u$ ,

$$u \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+, L^2_{\text{loc}}) \cap L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+, H^1_{\text{loc}}) \cap L^{2\sigma+2}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+, L^{2\sigma+2}_{\text{loc}}).$$

**证** 存在性由命题 2.8 和引理 2.3, 2.4 得证. 我们仅需证明惟一性. 设  $u_1$  和  $u_2$  为方程(2.3) 具同一初值  $u_0$  的两个解, 我们将证明  $u_1 - u_2$  的  $L^2$  局部模为零. 设  $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$ , 如同引理 2.3 相同的证明,  $u_1, u_2$  满足等式

$$\begin{aligned} \partial_t \|\varphi(u_1 - u_2)\|_2^2 &= 2\gamma \|\varphi(u_1 - u_2)\|_2^2 \\ &- 2a \|\varphi \nabla(u_1 - u_2)\|_2^2 - 4\text{Re}(a + i\alpha) \langle (u_1 - u_2) \nabla \varphi, \\ &\varphi \nabla(u_1 - u_2) \rangle - 2\text{Re}(b + i\beta) \langle \varphi(u_1 - u_2), \\ &\varphi(f(u_1) - f(u_2)) \rangle. \end{aligned} \quad (2.36)$$

利用 Schwarz 不等式估计(2.36) 右端第二项, 第三项囿于

$$2a^{-1}(a^2 + \alpha^2) \|(u_1 - u_2) \nabla \varphi\|_2^2, \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \text{利用 } f(u_1) - f(u_2) &= \int_0^1 \{(u_1 - u_2)(g(\rho) + g'(\rho)\rho \\ &+ (\bar{u} - \bar{u}_2)u^2 g'(\rho))\} d\lambda, \end{aligned} \quad (2.38)$$

其中  $u = \lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2, \rho = |u|^{-2}$ , 再写(2.36) 最后一项为

$$-2\operatorname{Re}(b+i\beta)\int_{\rho}^1 d\lambda \int \varphi^2 [|u_1 - u_2|^2 (g(\rho) + \rho g'(\rho) + (\bar{u}_1 - \bar{u}_2)^2 u^2 g'(\rho))] . \quad (2.39)$$

让  $g$  和  $\beta$  选取得使该项为负. 事实上, 如  $g(\rho) = \rho^\sigma$ , 在 (2.39) 积分中的幅角  $\theta$  满足

$$|\sin \theta| \leq \sup \rho g'(\rho) [g(\rho) + \rho g'(\rho)]^{-1} = \sigma/(\sigma-1), \quad (2.40)$$

整个表达式是负的, 如果

$$|\arg(b+i\beta)| + \arcsin\left(\frac{\sigma}{\sigma-1}\right) \leq \frac{\pi}{2}. \quad (2.41)$$

这等价于  $|\beta| \leq b\sqrt{2\sigma+1}/\sigma$ .

在更一般的假设  $(H_2)$  下, 定义  $\epsilon$  为

$$|\beta| \leq b\sqrt{2(\sigma'+\epsilon)+1}(\sigma'+\epsilon)^{-1}. \quad (2.42)$$

由 (2.6) 可知  $\epsilon > 0$ , 由  $(H_2)$ , 能分解  $g = g_+ + g_-$ , 其中

$$\begin{aligned} \rho |g'(\rho)| [g_+(\rho) + \rho g'_+(\rho)]^{-1} \\ \leq (\sigma' + \epsilon)(\sigma' + \epsilon + 1)^{-1}, \quad \forall \rho \in \mathbb{R}^+. \end{aligned} \quad (2.43)$$

$g_-$  具有紧支集,  $g_-(\rho) = 0, \rho \geq \rho_0, \rho_0 \in \mathbb{R}^+$ .  $g_+$  的贡献是使 (2.39) 为负. 用以前的原理, 将  $\sigma' + \epsilon$  代替以前的  $\sigma$ , 而  $g_-$  的贡献在于可为  $F$  式

$$2|b+i\beta| \sup \{ |g_-(\rho)| + 2\rho |g'_-(\rho)| \} \|\varphi(u_1 - u_2)\|_2^2 \quad (2.44)$$

所估计. 将 (2.37), (2.44) 代入 (2.36) 可得

$$\begin{aligned} \partial_t \|\varphi(u_1 - u_2)\|_2^2 &\leq 2\gamma_1 \|\varphi(u_1 - u_2)\|_2^2 \\ &\quad + 2a^{-1}(a^2 + \alpha^2) \|(u_1 - u_2) \nabla \varphi\|_2^2, \end{aligned} \quad (2.45)$$

这里常数  $\gamma_1$  仅依赖于方程, 不依赖  $\varphi, u_1, u_2$ . 在球的增加序列中, 我们将用 (2.45) 去控制  $u_1 - u_2$  的  $L^2$  局部模.

设  $R_0 > 0, 0 < r < 1, R_j = R_0 + jr, 0 \leq j \leq k, k$  为某正整数, 令  $R = R_k, \varphi_j (1 \leq j \leq k)$  定义如下:

$$\begin{aligned} \varphi_j(x) &= 1, |x| \leq R_{j-1}, \\ \varphi_j(x) &= \varphi_0[x(r + |x| - R_{j-1})/r|x|], |x| \geq R_{j-1}. \end{aligned}$$

因此当  $|x|$  从  $R_{j-1}$  增加到  $R_j$  时,  $\varphi_j$  从 1 变化到 0, 进一步设

$$\varphi_j(x) = 1, x \in \text{supp} \varphi_{j-1} (1 \leq j \leq k),$$

$$\|\nabla \varphi_j\|_\infty \leq r^{-1} \|\nabla \varphi_1\|_\infty.$$

让  $x_j$  为  $\{x: R_{j-1} \leq |x| \leq R_j\}$  的特征函数, 它含有  $\nabla \varphi_j$  的交集. 定义

$$Q_j(t) = \|\varphi_j(u_1(t) - u_2(t))\|_2^2 \exp(-2r_1 t), \quad (2.46)$$

$$S_j(t) = \|x_j(u_1(t) - u_2(t))\|_2^2 \exp(-2r_1 t). \quad (2.47)$$

从 (2.45) 和前面的定义得

$$\partial_t Q_j(t) \leq C_5 r^{-2} S_j(t) \leq C_5 r^{-2} Q_{j+1}(t), \quad (2.48)$$

其中  $C_5 = 2a^{-1}(a^2 + a^2) \|\nabla \varphi_0\|_\infty$ , 而  $Q_j(0) = 0, \forall j$ . 因为

$u_1 - u_2|_{t=0} = 0$ , (2.48) 对  $t_j$  积分 ( $j = 1, 2, \dots, k$ ) 可得

$$\begin{aligned} Q_1(t) &\leq \int C_5^k r^{-2k} S_k(t_k) dt_1 \cdots dt_k \\ 0 \leq t_k \leq \cdots \leq t_1 \leq t &\leq C_5^k r^{-2k} \frac{t^k}{(k-1)!} \int_0^t \frac{1}{t'} S_k(t') dt'. \end{aligned} \quad (2.49)$$

区域  $R_{k-1} \leq |x| \leq R_k$  能为有限个半径为 1 的球所遮盖. 它的数目界于  $CR^{n-1}(r \leq 1)$ ,  $C$  为绝对常数, 于是

$$Q_1(t) \leq CR^{n-1} C_5^k r^{-2k} \frac{t^k}{(k-1)!} \int_0^t \frac{dt'}{t'} e^{-2t'} Y_R(u_1(t') - u_2(t')). \quad (2.50)$$

对于固定的  $R$  和  $R_0$ , (2.50) 中的积分与  $k$  无关, 我们选取  $k$  使得因子

$$\begin{aligned} \frac{(C_5 r^{-2} t)^k}{(k-1)!} &= \frac{[C_5 (R - R_0)^{-2} t k^2]^k}{(k-1)!} \\ &\leq k [C_5 (R - R_0)^{-2} t k e]^k \\ &\leq k \exp^{(-k)} = \frac{(R - R_0)^2}{C_5 e^2 t} \exp \left[ - \frac{(R - R_0)^2}{C_5 e^2 t} \right] \end{aligned} \quad (2.51)$$

为近似极小,  $k = (R - R_0)^2 / (C_5 t e^2)$ . 运用引理 2.4, 特别是 (2.18) 估计 (2.50) 的积分项, 利用该引理对于平移  $\varphi$  的不变性可

得

$$\begin{aligned} Y_R(u_1(t') - u_2(t')) &\leq 2\{Y_R(u_1(t')) + Y_R(u_2(t'))\} \\ &\leq 4Y_R(u_0)\exp(C_3 t') [1 + (Y_R(u_0)/C_4)^{\sigma} C_3 \sigma t']^{-\frac{1}{\sigma}}, \end{aligned} \quad (2.52)$$

这里常数  $C_3$  和  $C_4$  与  $\varphi_0$  有关.

将(2.51)(2.52)代入(2.50)可得基本估计

$$\begin{aligned} Q_1(t) &\leq CK^{n-1} \frac{(R - R_0)^2}{(C_5 e^2 t)} \exp\left[-\frac{(R - R_0)^2}{C_5 e^2 t}\right] \exp[C_3 t] \\ &\times \int_0^t \frac{dt'}{t'} Y_R(u_0) [1 + (Y_R(u_0)/C_4)^{\sigma} C_3 \sigma t']^{-\frac{1}{\sigma}}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

对  $\sigma > 1$ , (2.53) 右端最后积分可用  $Y_R(u_0)$  一致估计

$$\int_0^t t^{-1} dt' C_4 (C_3 \sigma)^{-\frac{1}{\sigma}} t'^{-\frac{1}{\sigma}} = C_4 (C_3 \sigma)^{-\frac{1}{\sigma}} \sigma (\sigma - 1)^{-1} t^{-\frac{1}{\sigma}},$$

令  $R \rightarrow \infty, R_0$  固定, 可得  $Q_1(t) = 0, \forall t > 0$ , 及一切  $R_0$ , 因此  $u_1 = u_2$ .

对  $\sigma = 1$  积分变成

$$\begin{aligned} &\int_0^t t^{-1} dt' Y_R(u_0) [1 + Y_R(u_0) C_2^{-1} C_3 t']^{-1} \\ &= C_4 C_3^{-1} t^{-1} \log[1 + Y_R(u_0) C_4^{-1} C_3 t]. \end{aligned} \quad (2.54)$$

将(2.54)代入(2.53), 令  $R \rightarrow \infty, R_0$  固定, 对充分小的  $t$ , 有  $Q_1(t) = 0$ . 因此  $u_1(t) = u_2(t)$  对小的  $t$  成立(在假设(2.34)下), 可直接延拓对任意  $t$  成立.

最后  $\sigma < 1$ , 积分可估计为

$$\begin{aligned} &t^{-1} Y_R(u_0) [(Y_R(u_0)/C_4)^{\sigma} C_3 \sigma]^{-1} \int_0^{\infty} ds (1+s)^{-\frac{1}{\sigma}} \\ &= (1-\sigma)^{-1} C_4^{\sigma} C_3^{-1} t^{-1} [Y_R(u_0)]^{1-\sigma}, \end{aligned}$$

在假设(2.35)下, 结果即得.

现考虑在  $L^r (r > 2)$  中解的存在惟一性.

**引理 2.10** 设  $f$  满足  $(H_1)$ ,  $u$  满足

$$u \in L_{\text{loc}}^2(I, H_{\text{loc}}^1) \cap L_{\text{loc}}^{2\sigma+r}(I, L^{2\sigma+r}), \quad \|u\|^k u \in L_{\text{loc}}^2(I, H^1), \quad (2.55)$$

其中  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $u$  满足(2.3), 则  $u \in C(I, L^r)$  且有等式

$$\begin{aligned} \int dx H(\rho(t_2)) - \int dx H(\rho(t_1)) &= \int_{t_1}^{t_2} dt \{ 2\gamma \int dx \rho h(\rho) \\ &\quad - 2b \int dx \rho h(\rho) g(\rho) - 2\operatorname{Re}(a + ia) \int dx [(h(\rho) \\ &\quad + \rho h'(\rho)) |\nabla u|^2 + h'(\rho)(\bar{u} \nabla u)^2] \} (t), \end{aligned} \quad (2.56)$$

这里  $\rho = |u|^2$ ,  $\forall t_1, t_2 \in I$ ,  $H(\rho) = \rho^{k+1}/k+1$ ,  $h(\rho) = H^1(\rho) = \rho^k$ .

证 等式(2.56)的微分形式为

$$\begin{aligned} \partial_t \int dx H(\rho) &= 2\gamma \int dx \rho h(\rho) - 2b \int dx \rho h(\rho) g(\rho) \\ &\quad - 2\operatorname{Re}(a + ia) \int dx [(h(\rho) + \rho h'(\rho)) |\nabla u|^2 \\ &\quad + h'(\rho)(\bar{u} \nabla u)^2], \end{aligned} \quad (2.57)$$

可以由计算  $2\operatorname{Re}(h(\rho)u, (2.3))$  和分部积分得到.

**引理 2.11** 设  $f$  满足  $(H_1)$ ,  $\alpha$  满足

$$|\alpha|/\alpha < \sqrt{2k+1}/k (\equiv 2\sqrt{r-1}/(r-2)). \quad (2.58)$$

若  $u$  为(2.3)的解, 满足(2.55), 则  $u$  具有先验估计对应于空间,

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(I, L^r) \cap L^{2\sigma+r}(I, L^{2\sigma+r}), \quad |u|^k u \in L^2(I, H^1), \\ u(0) &\in L^r. \end{aligned} \quad (2.59)$$

证 首先注意到

$$\begin{aligned} \| |u|^k u : H^1 \|^2 &= \|u\|_r^r + \|\nabla(|u|^k u)\|_2^2 \\ \| |u|^k \nabla u \|_2 &\leq \|\nabla(|u|^k u)\|_2 \\ &\leq (k+1) \| |u|^{k-1} \nabla u \|_2. \end{aligned} \quad (2.60)$$

利用等式(2.56)的微分形式(2.57)有

$$\begin{aligned} (k+1)^{-1} \partial_t \|u\|_r^r &= 2\gamma \|u\|_r^r - 2b \int dx \rho^{k+1} g(\rho) \\ &\quad - 2a\epsilon \| |u|^k \nabla u \|_2^2 - 2\operatorname{Re}(a + ia) \int dx [(k+1 \\ &\quad - \epsilon)\rho^k |\nabla u|^2 + k\rho^{k-1}(\bar{u} \nabla u)^2], \end{aligned} \quad (2.61)$$

其中  $\epsilon > 0$  适当小, 如同命题2.9的证明, (2.60)的最后积分是负, 当



$$\|\alpha\|/\alpha \leq [(1-\epsilon)(2k+1-\epsilon)]^{\frac{1}{2}}/k, \quad (2.62)$$

特别在假设(2.58)下,  $\epsilon$  充分小, (2.61) 右端的第一、二项能用  $L^\infty(L^r)$  模控制, 第三项能为模  $L^{2\sigma+r}(L^{2\sigma+r})$  所控制(在假设  $(H_1)$  下), 第四项能为  $\|u\|^k u$  在  $L^2(H^1)$  的模控制.

通过这个引理, 可得到  $L^r$  解的存在性.

**命题 2.12** 设  $f$  满足  $(H_1)$ ,  $\alpha$  满足(2.58).  $u_0 \in L^r$ , 则方程(2.3)具有一解

$$u \in C(\cdot^+, L^r) \cap L^2_{\text{loc}}(\cdot^+, H^1_{\text{loc}}) \cap L^{2\sigma+r}_{\text{loc}}(\cdot^+, L^{2\sigma+r}), \\ \|u\|^k u \in L^2_{\text{loc}}(\cdot^+, H^1),$$

且  $u(0) = u_0$ ,  $u$  满足(2.56),  $\forall t_1, t_2 \geq 0$ .

**证** 这又是一个紧性的结果, 分两步证明. 设序列  $\{\epsilon_j\} \rightarrow 0$ , 例如  $\epsilon_j = 2^{-j}$ , 考虑正则化方程

$$\partial_t u = \gamma u + (a + i\alpha)\Delta u - (b + i\beta)u g_\epsilon(u), \quad (2.63)$$

这里  $g_\epsilon(\rho) = g\left(\frac{\rho}{1 + \epsilon\rho}\right)$ . 考虑  $\{u_{0j}\}$  在  $L^2 \cap L^\infty$  中收敛于  $u_0$ , 在  $L^r$  中强收敛于  $u_0$ , 如同命题 2.2, 我们证明对每个  $j$ , 方程(2.63)当  $\epsilon = \epsilon_j$ ,  $u(0) = u_0$  具有一解

$$u_j \in C(\cdot^+, L^2) \cap L^2_{\text{loc}}(\cdot^+, H^1). \quad (2.64)$$

由于  $g$  换成  $g_\epsilon$ , 我们未知  $u \in L^{2\sigma+2}_{\text{loc}}(\cdot^+, L^{2\sigma+2})$ . 另一方面, 方程(2.3)可写成积分方程形式

$$u(t) = U(t)u_0 - (b + i\beta) \int_0^t dt' U(t-t') f(u(t')), \quad (2.65)$$

其中  $U(t)$  表示单参数群, 它是线性方程

$$\partial_t u = \gamma u + (a + i\alpha)\Delta u \quad (2.66)$$

的解.  $U(t) = \exp[\gamma t + (a + i\alpha)\Delta]$ .  $U(t)$  的  $L^\infty$  模对  $t$  一致有界, 且  $u_{0j} \in L^\infty$ , 由  $(H_1)$

$$g_\epsilon(\rho) \leq C(1 + \epsilon^{-\sigma}) \quad (2.67)$$

对  $\rho$  一致成立. 由 Gronwall 不等式,  $u_j \in L^\infty_{\text{loc}}(\cdot^+, L^\infty)$ . 连同

(2.64) 推出  $u_j \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^+, L^{2\sigma+r})$ ,  $|u_j|^{1/k} u_j \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^+, H^1)$ . 特别  $u_j$  满足引理 2.10 的假设(2.55),  $g \rightarrow g_\epsilon$ . 我们得到一个先验估计一致对  $j$  成立,  $u_j \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^+, L^r)$ ,  $u_j \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^+, H^1)$  且

$$\tilde{u}_j = u_j(1 + \epsilon_j |u_j|^2)^{-\sigma/(2\sigma+r)} \in L_{\text{loc}}^{2\sigma+r}(\mathbb{R}^+, L^{2\sigma+r}).$$

进一步由  $u_0 \in L^r$  推出  $u_0 \in L_{\text{loc}}^2$ , 因此由引理 2.7 可得先验估计. 对于一致有  $u_j \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^+, H_{\text{loc}}^1)$ . 由标准的紧性原理, 能从  $\{u_j\}$  中选取一子序列(仍记为  $\{u_j\}$ ), 使得依弱\* 意义下收敛于某个  $u \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^+, L^r) \cap L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^+, H_{\text{loc}}^1)$ . 而  $|u_j|^{1/k} u_j$  收敛于某个函数  $v_1 \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^+, H^1)$ ,  $u_j g_{\epsilon_j}(|u_j|^2)$  收敛于某个  $v_2 \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^+, L^s)$ ,  $s = (2\sigma+r)/(2\sigma+1)$ .

进一步  $u$  满足方程

$$\partial_t u = \gamma u + (a + i\alpha)\Delta u - (b + i\beta)v_2,$$

其余的证明是标准的. 特别从第一个收敛性推出  $u_j$  的子序列几乎处处点  $\epsilon$  收敛, 因此  $v_1 = |u|^{1/k} u$ ,  $v_2 = f(u)$  等.

**引理 2.13** 设  $f$  满足  $(H_1)$ ,  $u$  满足方程(2.3), 且

$$u \in L_{\text{loc}}^2(I, H_{\text{loc}}^1) \cap L_{\text{loc}}^{2\sigma+r}(I, L_{\text{loc}}^{2\sigma+r}), \quad |u|^{1/k} u \in L_{\text{loc}}^2(I, H_{\text{loc}}^1), \quad (2.68)$$

则  $u \in C(I, L_{\text{loc}}^r)$ , 且对任意  $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^+)$  具有紧支集,  $u$  满足等式

$$\begin{aligned} \int \varphi^2 H(\rho(t_2)) - \int \varphi^2 H(\rho(t_1)) &= \int_{t_1}^{t_2} dt \{ 2\gamma \int \varphi^2 \rho h(\rho) \\ &\quad - 2b \int \varphi^2 h(\rho) g(\rho) - 2\text{Re}(a + i\alpha) \int \varphi^2 [(h(\rho) \\ &\quad + \rho h'(\rho)) |\nabla u|^2 + h'(\rho)(\bar{u} \nabla u)^2] \\ &\quad - 4\text{Re}(a + i\alpha) \langle u h(\rho) \nabla \varphi, \varphi \nabla u \rangle \} (t), \end{aligned} \quad (2.69)$$

$\forall t_1, t_2 \in I$ .

**证(提要)** 等式(2.69)的微分形式为

$$\begin{aligned} \partial_t \int \varphi^2 H(\rho) &= 2\gamma \int \varphi^2 \rho h(\rho) - 2b \int \varphi^2 \rho h(\rho) g(\rho) \\ &\quad - 2\text{Re}(a + i\alpha) \int \varphi^2 [(h(\rho) + \rho h'(\rho)) |\nabla u|^2 + h'(\rho)(\bar{u} \nabla u)^2] \end{aligned}$$

$$-4\operatorname{Re}(a + ia)\langle uh(\rho)\nabla\varphi, \varphi\nabla u\rangle, \quad (2.70)$$

可由计算  $2\operatorname{Re}\langle\varphi h(\rho)u, \varphi(2.3)\rangle$  得到, 其余证明是类似的.

现利用等式(2.69) 去得到局部模的先验估计, 定义  $\epsilon$  为

$$|\alpha|/\alpha = [(1-\epsilon)(2k+1-\epsilon)]^{\frac{1}{2}}/k, \quad (2.71)$$

$0 < \epsilon < 1$ , 在条件(2.58) 下, 设  $\varphi \in C^1(R^n, R)$  具有紧支集, 令

$$C_1 = \|\varphi\|_2^{2\sigma/(\sigma+k+1)},$$

$$C_2 = \left\{ \int \varphi^{-2(k+1)/\sigma} |\nabla\varphi|^{2(\sigma+k+1)/\sigma} \right\}^{\sigma/(\sigma+k+1)}, \quad (2.72)$$

$$C_3 = 2\{\gamma + (a\epsilon)^{-1}(a^2 + \alpha^2)C_2/C_1\},$$

$$C_4 = C_1 \left( \frac{C_1 C_3}{2b} \right)^{(k+1)/\sigma} = \|\varphi\|_2^2 \left( \frac{C_3}{2b} \right)^{(k+1)/\sigma}. \quad (2.73)$$

如  $\varphi$  在它的零点处具有充分高的光滑性, 则这些常数是有限的, 且对  $\varphi$  的平移是不变的, 令

$$y(t) = \int dx \varphi^2 |u(t)|^2 = \int dx \varphi^2 \rho^{k+1}. \quad (2.74)$$

**引理 2.14** 设  $f$  满足  $(H_1)$ ,  $\alpha$  满足(2.58),  $u$  为方程(2.3) 的解满足(2.68).  $I = [0, T)$ ,  $\varphi, C_i (i = 1, \dots, 4), y(t)$  如前所定义, 则

(1) 如  $y(0) \leq C_4$ , 有  $y(t) \leq C_4, \forall t \in I$ ,

(2) 若  $y(0) > C_4$ , 有  $y(t) \leq \tilde{y}(t), \forall t \in I$ ,

其中

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) = y(0) & \left\{ \exp(-C_3 \sigma t) \right. \\ & \left. - \left( \frac{y(0)}{C_4} \right)^{\sigma/(k+1)} \cdot [1 - \exp(-C_3 \sigma t)] \right\}^{\frac{-(k+1)}{\sigma}}. \end{aligned} \quad (2.75)$$

特别地,  $\tilde{y}(t)$  指数减少到  $C_4$  且

$$\tilde{y}(t) \leq C_4 [1 - \exp(-C_3 \sigma t)]^{-(k+1)/\sigma}, \quad (2.76)$$

$\forall t > 0$ , 且对  $y(0)$  一致成立.

**证** 首先定义

$$z = z(t) = \left\{ \int \varphi^2 \rho^{\sigma+k+1} \right\}^{(k+1)/(\sigma+k+1)}, \quad (2.77)$$

由 Hölder 不等式

$$y(t) \leq C_1 z(t). \quad (2.78)$$

考虑(2.70), 并估计它的右端, 第一项估计为  $2\gamma y(t)$ , 第二项估计为

$$-2b \int \varphi^2 \rho h(\rho) g(\rho) \leq -2bz^{(1+\sigma)/(k+1)}, \quad (2.79)$$

最后一项由 Schwarz 不等式估计为

$$\begin{aligned} -4\operatorname{Re}(a + i\alpha) \langle uh(\rho) \nabla \varphi, \varphi \nabla u \rangle &\leq 2a\epsilon \int \varphi^2 h(\rho) |\nabla u|^2 \\ &+ 2(a\epsilon)^{-1}(a^2 + \alpha^2) \times \int |\nabla \varphi|^2 \rho h(\rho). \end{aligned} \quad (2.80)$$

(2.80) 右端的第一项连同(2.70) 最后一项有

$$\begin{aligned} -2\operatorname{Re}(a + i\alpha) \int \varphi^2 \rho^k [(k+1-\epsilon)\rho^k |\nabla u|^2 \\ + k\rho^{k-1}(\bar{u} \nabla u)^2]. \end{aligned} \quad (2.81)$$

由于(2.71) 式  $\alpha$  的选取, 使它为负, (2.80) 最后积分由 Hölder 不等式可估计为

$$\int |\nabla \varphi|^2 \rho h(\rho) = \int |\nabla \varphi|^2 \rho^{k+1} \leq C_2 z, \quad (2.82)$$

其中  $C_2$  和  $z$  分别由(2.72)(2.77) 所定义, 将(2.79)—(2.81) 代入(2.70) 得

$$\partial_t y \leq \gamma y + (a\epsilon)^{-1}(a^2 + \alpha^2)(C_2 z - bz^{(1+\sigma)/(k+1)}), \quad (2.83)$$

类似于引理 2.4 可得引理结论.

**引理 2.15** 设  $f, \alpha, u$  和  $\varphi$  满足引理 2.14 假设, 则  $u$  满足估计

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} dt \{ a\epsilon \|\varphi |u|^k \nabla u\|_2^2 + 2b \int \varphi^2 |u|^{1+r} g(|u|^2) \} \\ &\leq (k+1)^{-1} \left\{ \int \varphi^2 |u(t_1)|^{1+r} - \int \varphi^2 |u(t_2)|^{1+r} \right\} - \int_{t_1}^{t_2} dt \\ &\quad \left\{ 2\gamma \int \varphi^2 |u(t)|^{1+r} + 4(a\epsilon)^{-1}(a^2 + \alpha^2) \int |\nabla \varphi|^2 |u(t)|^{1+r} \right\}. \\ &\quad \forall t_1, t_2 \in I, t_1 \leq t_2. \end{aligned} \quad (2.84)$$

**证** 证明来自(2.70), Schwarz 不等式(2.80), (2.81) 的负性. (2.84) 右端仅含局部  $L^r$  模, 可由引理 2.14 控制, 其中第二个积分  $u$  的  $L_{\text{loc}}^{2\sigma+r}(I, L_{\text{loc}}^{2\sigma+r})$  模由假设  $(H_1)$  进行控制.

**命题 2.16** 设  $f$  满足  $(H_1)$ ,  $\alpha$  满足(2.71), 设  $u_0 \in L_{\text{loc}}^r$ , 则方程(2.3) 具有一解

$$u \in C(\cdot^+, L_{\text{loc}}^r) \cap L_{\text{loc}}^2(\cdot^+, H_{\text{loc}}^1) \cap L_{\text{loc}}^{2\sigma+r}(\cdot^+, L_{\text{loc}}^{2\sigma+r}), \\ \|u\| + \|u\|^k \in L_{\text{loc}}^2(\cdot^+, H_{\text{loc}}^1), \quad (2.85)$$

$u(0) = u_0$ . 对任何  $\varphi \in C^1(\cdot^-, \cdot)$  具有紧支集且  $C_2 < \infty$ , 对任何  $t_1, t_2 \geq 0$ , 满足(2.70). 进一步,  $u$  满足引理 2.14 和引理 2.15 的局部估计,  $u \in L^\infty([t_0, \infty), L_{\text{loc}, \text{un}}^r), \forall t_0 > 0$ .

**证** 这又是一个紧性的结果, 类似于命题 2.8 的证明, 再设  $\{\Delta_i\}$  为一系列“盒子”增加到  $\cdot^+$ , 设  $u_{0i}$  为  $u_0$  限制到  $\Delta_i$ ,  $u_i$  为方程(2.3) 具初值  $u_{0i}$  的由命题 2.12 得到的解, 由引理 2.7, 引理 2.14 和引理 2.15, 对固定的  $j$ , 序列  $\{u_i\}_{i>j}$  在空间

$$X_j = L^\infty([0, 2^j], L^r(\Delta_j)) \cap L^2([0, 2^j], H^1(\Delta_j)) \\ \cap L^{2\sigma+r}([0, 2^j], L^{2\sigma+r}(\Delta_j))$$

中是有界的, 序列  $\{\|u_i\| + \|u_i\|^k\}_{i>j}$  在  $L^2([0, 2^j], H^1(\Delta_j))$  中是有界的. 由紧性原理和对角线选取, 能从序列  $\{u_i\}$  选取一个子序列(仍记为  $\{u_i\}$ ) 在  $X_j (\forall j)$  弱\*收敛于某个  $u$ , 且

$u \in L_{\text{loc}}^\infty(\cdot^+, L_{\text{loc}}^r) \cap L_{\text{loc}}^2(\cdot^+, H_{\text{loc}}^1) \cap L_{\text{loc}}^{2\sigma+r}(\cdot^+, L_{\text{loc}}^{2\sigma+r})$ , 而子序列  $\{\|u_i\| + \|u_i\|^k\}$  弱收敛于某个  $v \in L_{\text{loc}}^2(\cdot^+, H_{\text{loc}}^1)$ , 由标准的原理,  $u$  满足方程(2.3),  $v = \|u\| + \|u\|^k$ . 这最后的论述来自引理 2.13—引理 2.15.

现在整体空间上作  $H^1$  解的存在性.

**引理 2.17** 设  $f$  满足  $(H_1)$ . 令

$$u \in L_{\text{loc}}^2(I, H^2) \cap L_{\text{loc}}^{4\sigma+2}(I, L^{4\sigma+2}), I \subset \cdot^-, \quad (2.86)$$

$u$  满足方程(2.3), 则  $u \in C(I, H^1 \cap L^{2\sigma+2})$  且满足等式

$$\|\nabla u(t_2)\|_2^2 - \|\nabla u(t_1)\|_2^2$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \{ 2\gamma \| \nabla u \|_2^2 - 2a \| \Delta u \|_2^2 - 2\operatorname{Re}(b + i\beta) \langle f(u), \Delta u \rangle \} (t), \quad (2.87)$$

$$\begin{aligned} & \int dx G(|u(t_2)|^2) - \int dx G(|u(t_1)|^2) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \{ 2\gamma \int dx |u|^2 g(|u|^2) - 2b \| f(u) \|_2^2 \\ & \quad + 2\operatorname{Re}(a + i\alpha) \langle f(u), \Delta u \rangle \}, \forall t_1, t_2 \in I. \end{aligned} \quad (2.88)$$

证 等式(2.87)的微分形式为

$$\begin{aligned} \partial_t \| \nabla u \|_2^2 &= 2\gamma \| \nabla u \|_2^2 - 2a \| \Delta u \|_2^2 \\ & \quad - 2\operatorname{Re}(b + i\beta) \langle f(u), \Delta u \rangle, \end{aligned} \quad (2.89)$$

它是由计算  $2\operatorname{Re}(\nabla u, \nabla(2.3))$  得到的. 类似, 等式(2.88)的微分形式为

$$\begin{aligned} \partial_t \int dx G(|u|^2) &= 2\gamma \int dx |u|^2 g(|u|^2) - 2 \| f(u) \|_2^2 \\ & \quad + 2\operatorname{Re}(a + i\alpha) \langle f(u), \Delta u \rangle, \end{aligned} \quad (2.90)$$

它是由计算  $2\operatorname{Re}(f(u), (2.3))$  得到的, 类似于引理 2.1 的证明可得.

**引理 2.18** 设  $f$  满足  $(H_1)$  和  $(H_2)$ ,  $\alpha, \beta$  满足或者  $\alpha\beta \geq 0$  或者

$$(|\alpha\beta| - ab)(|\alpha| + b + |\beta| + a)^{-1} \leq \sqrt{2\sigma' + 1}/\sigma'. \quad (2.91)$$

设  $u$  为方程(2.3)的解, 满足(2.86), 则  $u$  可先验估计在空间

$$L^\infty(I, H^1 \cap L^{2\sigma+2}) \cap L^2(I, H^2) \cap L^{4\sigma+2}(I, L^{4\sigma+2})$$

中,  $u(0) \in H^1 \cap L^{2\sigma+2}$ .

证 定义

$$K = \| \nabla u \|_2^2, K_1 = \| \Delta u \|_2^2, \quad (2.92)$$

$$P = \int dx G(|u|^2), P_1 = \| f(u) \|_2^2, \quad (2.93)$$

$$z = \langle f(u), \Delta u \rangle. \quad (2.94)$$

由 Schwarz 不等式有

$$|z|^2 \leq K_1 P_1. \quad (2.95)$$

证明基于等式(2.87)和(2.88). 为简单计, 可用微分形式(2.89)和(2.90), 再利用符号(2.92)–(2.94)有

$$\partial_t K = 2\gamma K - 2aK_1 - 2\operatorname{Re}(b + i\beta)z, \quad (2.96)$$

$$\partial_t P = 2\gamma \int \rho g(\rho) - 2bP_1 + 2\operatorname{Re}(a + i\alpha)z, \quad (2.97)$$

其中  $\rho = |u|^2$ , 我们现在寻求(2.96), (2.97) 凸的组合. 利用(2.95)和假设(H<sub>2</sub>)使右端中的  $z$  被吸取到负项中去, 设  $0 < \lambda < 1$ , 则

$$\begin{aligned} \partial_t [\lambda a K + (1 - \lambda)bP] &= 2\gamma [\lambda a K + (1 - \lambda)b \int \rho g(\rho)] \\ &\quad - 2[\lambda a^2 K_1 + (1 - \lambda)b^2 P_1] + 2\operatorname{Re}[ab - i(\lambda\beta a - (1 - \lambda)ab)]z \\ &\leq 2\gamma [\lambda a K + (1 - \lambda)b \int \rho g(\rho)] - 2\epsilon [\lambda a^2 K_1 + (1 - \lambda)b^2 P_1] \\ &\quad - 4(1 - \epsilon)\sqrt{\lambda(1 - \lambda)}ab|z| + 2\operatorname{Re}[ab - i(\lambda\beta a - (1 - \lambda)ab)]z, \end{aligned} \quad (2.98)$$

其中  $\epsilon > 0$  为小参数待定. 我们有(2.95), 由(H<sub>2</sub>)分解  $g$  为  $g = g_+ + g_-$ ,  $\rho \in R^+$ ,  $g_-(\rho) = 0$ ,  $\rho \geq \rho_0$ . 相应分解  $z = z_+ + z_-$ . 在(2.98)中最后二项欲使  $z_-$  的贡献使之为负, 为此再写  $z_-$  如下

$$\begin{aligned} z_- &= \int dx g_-(\rho) \bar{u} \Delta u = - \int dx \{ [g_-(\rho) + \rho g'_-(\rho)] |\nabla u|^2 \\ &\quad + g'_-(\rho) (\bar{u} \nabla u)^2 \}. \end{aligned} \quad (2.99)$$

从(2.43)可知(2.96)积分中的  $\theta$  辐角满足

$$0 \leq |\theta| \leq \zeta \equiv \arcsin(\sigma' + \epsilon)(\sigma' + \epsilon + 1)^{-1}, \quad (2.100)$$

因此由积分可得

$$\pi - \zeta < \arg z_- < \pi + \zeta, \quad (2.101)$$

于是

$$\operatorname{Re} z_- \leq -|z_-| \cos \zeta, \quad |\operatorname{Im} z_-| \leq |z_-| \sin \zeta. \quad (2.102)$$

代入(2.98)最后二项, 由于  $z_-$  的贡献得

$$\begin{aligned} (2.98) \text{ 的左端} &\leq 2|z_-| [-ab \cos \zeta + 2(1 - \epsilon)\sqrt{\lambda(1 - \lambda)} \\ &\quad + \sin \zeta |\lambda\beta a - (1 - \lambda)ab|], \end{aligned} \quad (2.103)$$

我们要使上式最后括号为负.

若  $a\beta \geq 0$ , 则易于做到, 例如取

$$\lambda = \max(|\alpha|b, ab \cotg \zeta) \{ \max(|\alpha|b, ab \cotg \zeta) + \max(|\beta|a, ab \cotg \zeta) \}^{-1}.$$

若  $a\beta < 0$ , 最优的  $\lambda$  的取  $\lambda = \cos^2 \theta, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ . 在(2.103)中的括号变为

$$\begin{aligned} & -ab \cos \zeta - ab(1 - \epsilon) \sin 2\theta + \frac{1}{2} \sin \zeta |\beta a - ab| \\ & = \frac{1}{2} \sin \zeta (\beta a + ab) \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (2.104)$$

最优的办法是取向量  $(\sin 2\theta, \cos 2\theta)$  与  $(ab(1 - \epsilon), \frac{1}{2} \sin \zeta (\beta a + ab))$  共线, (2.104) 为负归结为选取

$$\begin{aligned} & -ab \cos \zeta - \frac{1}{2} \sin \zeta |\beta a - ab| \leq -a^2 b^2 (1 - \epsilon)^2 \\ & + \frac{1}{2} \sin^2 \zeta (\beta a + ab)^2 \}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.105)$$

等价地, 由基本运算得

$$|\alpha\beta| - |\beta a - ab| \cotg \zeta - ab \leq -(2\epsilon - \epsilon^2)ab / \sin^2 \zeta, \quad (2.106)$$

它在(2.91)假设下能得到保证, 此时  $\epsilon$  充分小.

在所有情况下, 适当选取  $\lambda$  和  $\epsilon$ , 我们能得到如下形式的估计

$$\begin{aligned} \partial_t [\lambda a K + (1 - \lambda) b p] & \leq C [\lambda a K + (1 - \lambda) b p] \\ & - 2\epsilon [\lambda a^2 K_1 + (1 - \lambda) b^2 p_1], \end{aligned}$$

连同假设  $(H_1)$  推出要求的积分估计.

**引理 2.19** 设  $f$  满足  $(H_1)$  和  $(H_3)$ ,  $\sigma'(n-2) < 2$ . 如  $n\sigma' > 2$ , 令  $\alpha$  满足

$$|\alpha|/a < 2\sqrt{n\sigma' - 1}/(n\sigma' - 2). \quad (2.107)$$

若  $u$  为方程(2.3)的解且满足(2.86), 则  $u$  具有先验估计于如下空间

$$L^\infty(I, H^1) \cap L^2(I, H^2) \cap L^{4\sigma+2}(I, L^{4\sigma+2}), u(0) \in H^1.$$

**证** 对任何  $r, 2 \leq r \leq \infty$ . 定义  $\delta(r) = \frac{n}{2} - \frac{n}{r}$ ,  $H^1$  亚临界



条件  $\sigma'(n-2) < 2$  等价于

$$(0 \leq) \delta \equiv \delta(2\sigma' + 2) \equiv \frac{n}{2} - \frac{n}{(2\sigma' + 2)} < 1. \quad (2.108)$$

我们首先在  $L^\infty(I, H^1) \cap L^2(I, H^2)$  中估计  $u$ . 从 (2.96) 和 (2.99), 再写  $z$  为

$$z = - \int dx \{ [g(\rho) + \rho g'(\rho)] |\nabla u|^2 + g'(\rho)(\bar{u} \nabla u)^2 \}, \quad (2.109)$$

利用假设  $(H_3)$ , 估计  $z$  为

$$\begin{aligned} |z| &\leq CK + C \| |u|^{2\sigma} |\nabla u|^2 \|_1 \\ &\leq CK + C \|u\|_{2\sigma'+2}^{2\sigma} \|\nabla u\|_{2\sigma'+2}^2, \end{aligned} \quad (2.110)$$

由 Hölder 不等式

$$|z| \leq CK + C \|u\|_{2\sigma'+2}^{2\sigma'} K_1^{1-\delta} K_1^\delta, \quad (2.111)$$

由 Sobolev 不等式

$$\|v\|_{2\sigma'+2} \leq C \|v\|_2^{1-\delta} \|\nabla v\|_2^\delta, \quad (2.112)$$

应用于  $\nabla u$ , 将 (2.111) 代入 (2.96) 并利用基本不等式

$$K_1^\delta M \leq a\delta K_1 + (1-\delta)(Ma^{-\delta})^{\frac{1}{1-\delta}}, \quad (2.113)$$

其中  $M > 0, a > 0, 0 < \delta < 1$ , 可得

$$\partial_t K \leq CK - aK_1 + C \|u\|_{2\sigma'+2}^{2\sigma'/(1-\delta)} K \equiv -aK_1 + C_1(t)K, \quad (2.114)$$

这里

$$C_1(t) = C[1 + \|u\|_{2\sigma'+2}^{2\sigma'/(1-\delta)}]. \quad (2.115)$$

由 (2.114) 积分得

$$\begin{aligned} K(t) + a \int_0^t dt' K_1(t') \exp[m(t) - m(t')] \\ \leq K(0) \exp[m(t)], \end{aligned} \quad (2.116)$$

其中

$$m(t) = \int_0^t dt' C_1(t'). \quad (2.117)$$

为得到  $u$  在  $L^\infty(I, H^1) \cap L^2(I, H^2)$  的估计, 必须对  $C_1(t)$

的积分进行估计.分两种情况:  $n\sigma' \leq 2$  和  $n\sigma' > 2$ .

若  $n\sigma' \leq 2$ ,则由(2.112)得

$$\|u\|_{\frac{2\sigma'+1}{2\sigma'+2}(1-\delta)} \leq C \|u\|_{\frac{2}{2}\sigma} K^{\sigma'\delta/(1-\delta)}. \quad (2.118)$$

$L^2$  亚临界条件  $n\sigma' \leq 2$  等价于  $(\sigma' + 1)\delta \leq 1$ , 即  $\sigma'\delta/(1-\delta) \leq 1$ .

由(2.115)和(2.118)得

$$C_1(t) \leq C[1 + \|u\|_{\frac{2}{2}\sigma}^2(1+K)], \quad (2.119)$$

$C_1(t)$  的积分作为  $\|u(0)\|_2$  的估计来自(2.14)关于  $u$  在  $L^\infty(I, L^2) \cap L^2(I, H^1)$  的整个估计.

如  $\sigma'(n-2) < 2 < n\sigma'$ , 令  $r \equiv 2k+2$  使得  $0 < \delta(r) < 1$ . 有

$$1/\alpha + 1/\alpha < \sqrt{2k+1}/k \equiv 2\sqrt{r-1}/(r-2).$$

最后选取  $r = n\sigma'$ , 因为  $2 < n\sigma' < 2n/(n-2)$ , 显然满足那些条件, 即等价于  $0 < \delta(n\sigma') < 1$ , (2.58) 归结为(2.107), 条件  $0 < \delta(r) < 1$  推出  $H^1 \subset L^r$ , 因此由引理 2.11, 我们知道  $u$  作为模  $\|u(0); H^1\|$  的先验估计对应于(2.59).

若  $r \geq (2\sigma' + 2)$ , 我们估计  $\|u\|_{\frac{2\sigma'+2}{2}\sigma}$  作为  $\|u\|_2$  和  $\|u\|_r$  的项, 要求估计  $C_1(t)$  的积分来自引理 2.11 和  $L^\infty(L^2)$  估计.

如  $r \leq (2\sigma' + 2)$ , 我们估计

$$\|u\|_{\frac{2\sigma'+1}{2\sigma'+2}(1-\delta)} = \|\nabla |u|^k u\|_{\frac{2}{s}\sigma/(k+1)(1-\delta)},$$

其中  $s = (2\sigma' + 2)/(k+1)$ , 因此  $0 < \delta(s) < 1$ .

$$\|u\|_{\frac{2\sigma'+1}{2\sigma'+2}(1-\delta)},$$

$$\leq C \|u\|_{\frac{2}{r}\sigma}^{2\sigma'(1-\delta(s))/(1-\delta)} \|\nabla |u|^k u\|_{\frac{2}{2}\sigma\delta(s)/(k+1)(1-\delta)},$$

由基本 Sobolev 不等式, 如  $\sigma'\delta(s) < (k+1)(1-\delta)$ , 则

$$\|u\|_{\frac{2\sigma'+1}{2\sigma'+2}(1-\delta)} \leq C \|u\|_{\frac{2}{r}\sigma}^{2\sigma'(1-\delta(s))/(1-\delta)} (1 + \|\nabla |u|^k u\|_{\frac{2}{2}\sigma}^2). \quad (2.120)$$

$\sigma'\delta(s) \leq (k+1)(1-\delta)$  等价于

$$\sigma' \frac{n}{r} - \sigma' \frac{n}{2\sigma'+2} \leq 1 - \frac{n}{2} + \frac{n}{2\sigma'+2},$$

即  $n\sigma' \leq r$ . 此时要求的  $C_1(t)$  估计来自(2.115)和(2.120), 以及引理 2.11.

现来估计  $u \in L^{4\sigma+2}(I, L^{4\sigma+2})$ . 由  $(H_1)$ , 充分估计  $f(u) \in L^2(I, L^2)$ , 积分(2.97), 由 Schwarz 不等式(2.95) 和对时间的 Schwarz 不等式可估计  $z$  的积分.

$$\begin{aligned} P(t) - P(0) &\leq 2\gamma \int_0^t dt' \int \rho g(\rho)(t') - 2b \|f(u): \\ L^2([0, t], L^2) \|^2 + 2 \|a + ia\| &\|f(u): L^2([0, t], L^2) \| \\ &\| \Delta u: L^2([0, t], L^2) \|, \end{aligned} \quad (2.121)$$

因此

$$\begin{aligned} P(t) + b \|f(u): L^2([0, t], L^2) \|^2 \\ \leq P(0) + 2\gamma \int_0^t dt' \int \rho g(\rho)(t') + b^{-1} \rho^2(a^2 + \bar{a}^2) \| \Delta u: \\ L^2([0, t], L^2) \|^2. \end{aligned} \quad (2.122)$$

由此即得估计  $u \in L^{4\sigma+2}(I, L^{4\sigma+2})$ .

**命题 2.20** 设  $f$  满足  $(H_1)$ , 附加条件

- (i)  $f$  满足  $(H_2)$ ,  $\alpha, \beta$  满足  $\alpha\beta \geq 0$  或(2.91), 或者
- (ii)  $f$  满足  $(H_2)$ ,  $\sigma'(u-2) < 2$ ,  $\alpha$  满足(2.107),  $n\sigma' > 2$ .

设  $u_0 \in H^1 \cap L^{2\sigma+2}$ , 则方程(2.3) 具有解

$$\begin{aligned} u \in C(\mathbb{R}^+, H^1 \cap L^{2\sigma+2}) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, H^2) \cap \\ L^{4\sigma+2}_{loc}(\mathbb{R}^+, L^{4\sigma+2}), \end{aligned} \quad (2.123)$$

$u(0) = u_0$ , 并且  $u$  满足(2.10), (2.87), (2.88), 以及引理 2.18 和 2.19 的估计.

**证(摘要)** 这又是一个紧性的结果, 但它不能用 Galerkin 方法, 因为方程(2.3) 正则化由有限维投影不适合引理 2.18、引理 2.19 在  $R^n$  中的估计. 我们采用卷积方法使方程(2.3) 正则化, 对于一个典型的函数  $u$  定义在  $\mathbb{R}^n$  的置换为  $\eta * u$ ,  $\eta$  为  $\delta$  函数的逼近函数. 例如  $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$ ,  $\eta$  具有紧支集,  $\eta$  是偶函数,  $\int \eta(x) dx = 1$ . 定义:  $\eta_j(x) = j^n \eta(jx)$ ,  $j \geq 1$ . 取  $\eta = \eta_j$ , 令  $j \rightarrow \infty$ . 对  $\eta$  的卷积在  $L^r (1 \leq r \leq \infty)$  和  $H^s$  (任何  $s \in \mathbb{R}$ ) 是压缩的, 并在  $L^r (1 \leq r \leq \infty)$  和  $H^s$  中强收敛于单位算子.

置换(2.3) 为

$$\partial_t u = \gamma u + (a + i\alpha)\Delta u - (b + i\beta)\eta * f(\eta * u), \quad (2.124)$$

正则化初值

$$u(0) = \eta * u_0. \quad (2.125)$$

在假设  $f \in C^1(\cdot, \cdot)$  下, 容易看到由  $C(L^2)$  压缩方法可得 Cauchy 问题(2.124), (2.125) 具有惟一局部解  $u_\eta \in C^1(H^N)$ ,  $\forall N \in \mathbb{N}$ . 类似于引理 2.1 的计算, 解满足微分形式等式

$$\partial_t \|u_\eta\|_2^2 = 2\gamma \|u_\eta\|_2^2 - 2a \|\nabla u_\eta\|_2^2 - 2b \int \rho_\eta g(\rho_\eta), \quad (2.126)$$

这里  $\rho_\eta = |\eta * u_\eta|^2$ . 因此  $u_\eta \in L_{\text{loc}}^\infty(L^2) \cap L_{\text{loc}}^2(H^1)$ , 由标准的整体化原理推出  $u_\eta$  对一切  $t \geq 0$  连续. 如同引理(2.17) 的计算, 可知  $u_\eta$  满足类似的微分等式

$$\partial_t K = 2\gamma K - 2aK_1 + 2\text{Re}(b + i\beta)z_\eta, \quad (2.127)$$

$$\partial_t P_\eta = 2\gamma \int \rho_\eta g(\rho_\eta) - 2bP_{1\eta} + 2\text{Re}(a + i\alpha)z_\eta, \quad (2.128)$$

其中

$$K = K(u_\eta) = \|\nabla u_\eta\|_2^2, K_1 = K_1(u_\eta) = \|\Delta u_\eta\|_2^2,$$

$$P_\eta = P(\eta * u_\eta) = \int G(|\eta * u_\eta|^2), P_{1\eta} = \|\eta * f(\eta * u_\eta)\|_2^2,$$

$$z_\eta = z(\eta * u_\eta) = \langle \eta * f(\eta * u_\eta), \Delta u_\eta \rangle.$$

特别有  $|z_\eta|^2 \leq K_1 P_{1\eta}$ . 引理(2.18) 和引理(2.19) 的证明能提供  $u_\eta \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^+, H^1) \cap L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^+, H^2)$  关于  $\eta$  一致的先验估计, 以及由  $(H_1)$  可得  $\eta * u_\eta \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^+, L^{2\sigma+2}), \eta * f(\eta * u_\eta) \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^+, L^2)$  的估计. 再取序列  $\{\eta_j\}$  趋于  $\delta$ , 由标准的紧性原理知  $u_\eta$  在  $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^+, H^1) \cap L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^+, H^2)$  中弱 \* 收敛,  $\eta * u_\eta$  在  $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^+, L^{2\sigma+2})$  中弱 \* 收敛于  $u \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^+, H^1 \cap L^{2\sigma+2})$ , 而  $f(\eta * u_\eta)$  在  $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^+, L^{(2\sigma+2)/(2\sigma+1)})$  中弱 \* 收敛,  $\eta * f(\eta * u_\eta)$  在  $L^2(\mathbb{R}^+, L^2)$  中弱 \* 收敛于  $v \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^+, L^{(2\sigma+2)/(2\sigma+1)}) \cap L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^+, L^2)$ . 因此,  $u, v$  满足

$$i\partial_t u = \gamma u + (a + i\alpha)\Delta u + (b + i\beta)v.$$

由于  $\eta * u_\eta$  点态收敛于  $u$ , 易证  $v = f(u)$ , 命题证毕.

现考虑  $H^1$  解在局部空间上的存在性和估计.

**引理 2.21** 设  $f$  满足  $(H_1)$ , 令

$$u \in L^2_{\text{loc}}(I, H^2_{\text{loc}}) \cap L^{4\sigma+2}_{\text{loc}}(I, L^{4\sigma+2}_{\text{loc}}), I \subset \mathbb{R},$$

设满足方程(2.3), 则有

$$u \in C(I, H^1_{\text{loc}} \cap L^{2\sigma+2}_{\text{loc}}),$$

且对任何  $\varphi, u$  满足等式

$$\begin{aligned} \|\varphi \nabla u(t_2)\|_2^2 - \|\varphi \nabla u(t_1)\|_2^2 &= \int_{t_1}^{t_2} dt \{ 2\gamma \|\varphi \nabla u\|_2^2 \\ &\quad - 2a \|\varphi \Delta u\|_2^2 - 4\text{Re}(a + i\alpha) \langle \nabla \varphi \nabla u, \varphi \Delta u \rangle \\ &\quad - 2\text{Re}(b + i\beta) \langle \varphi \nabla f(u), \varphi \nabla u \rangle \}, \end{aligned} \quad (2.129)$$

$$\begin{aligned} &\int dx \varphi^2 G(|u(t_2)|^2) - \int dx \varphi^2 G(|u(t_1)|^2) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ 2\gamma \int dx \varphi^2 |u|^2 g(|u|^2) - 2b \|\varphi f(u)\|_2^2 \right. \\ &\quad \left. + 2\text{Re}(a + i\alpha) \langle \varphi f(u), \varphi \Delta u \rangle \right\}, \end{aligned} \quad (2.130)$$

$\forall t_1, t_2 \in I$ .

**证(摘要)** 等式(2.129)的微分形式为

$$\begin{aligned} \partial_t \|\varphi \nabla u\|_2^2 &= 2\gamma \|\varphi \nabla u\|_2^2 - 2a \|\varphi \Delta u\|_2^2 - 4\text{Re}(a + i\alpha) \\ &\quad \langle \nabla \varphi \nabla u, \varphi \Delta u \rangle - 2\text{Re}(b + i\beta) \langle \varphi \nabla f(u), \varphi \nabla u \rangle, \end{aligned} \quad (2.131)$$

它可从  $2\text{Re} \langle \varphi \nabla u, \varphi \nabla (2.3) \rangle$  计算得到. (2.130) 的微分形式为

$$\begin{aligned} \partial_t \int dx \varphi^2 G(|u|^2) &= 2\gamma \int dx \varphi^2 |u|^2 g(|u|^2) \\ &\quad - 2b \|\varphi f(u)\|_2^2 + 2\text{Re}(a + i\alpha) \langle \varphi f(u), \varphi \Delta u \rangle, \end{aligned} \quad (2.132)$$

可由  $2\text{Re} \langle \varphi f(u), \varphi (2.3) \rangle$  计算得到. 引理的证明类似于引理 2.17, 利用了  $u_t \in L^2_{\text{loc}}(I, L^2_{\text{loc}})$  的事实.

**引理 2.22** 设  $f$  满足  $(H_1)$  和  $(H_2)$ ,  $\alpha, \beta$  满足  $\alpha\beta \geq 0$  或 (2.91), 若  $u$  为方程(2.3)的解满足(2.128), 则  $u$  可在空间

$$L^\infty(I, H_{\text{loc}}^1 \cap L_{\text{loc}}^{2\sigma+2}) \cap L^2(I, H_{\text{loc}}^2) \cap L_{\text{loc}}^{4\sigma+2}(I, L_{\text{loc}}^{4\sigma+2}) \quad (2.133)$$

进行先验估计,  $u(0) \in H_{\text{loc}}^1 \cap L_{\text{loc}}^{2\sigma+2}$ . 更详细一点, 局部模(2.133)在开球  $B$  上能为  $u(0)$  在球  $B_0$  上的局部模估计,  $B \subset\subset B_0$ .

证 类似引理 2.18 的证明, 定义

$$K_\varphi = \|\varphi \Delta u\|_2^2, K_{1\varphi} = \|\varphi \Delta u\|_2^2, \quad (2.134)$$

$$P_\varphi = \int dx \varphi^2 G(|u|^2), P_{1\varphi} = \|\varphi f(u)\|_2^2, \quad (2.135)$$

$$z_\varphi = \langle \varphi f(u), \varphi \Delta u \rangle, z'_\varphi = -\langle \varphi \nabla f(u), \varphi \nabla u \rangle. \quad (2.136)$$

由 Schwarz 不等式

$$|z_\varphi|^2 \leq K_{1\varphi} P_{1\varphi}, \quad (2.137)$$

而

$$z'_\varphi - z_\varphi = 2\langle \varphi f(u), \nabla \varphi \nabla u \rangle. \quad (2.138)$$

微分等式(2.131), (2.132) 利用(2.134)–(2.136) 可得

$$\begin{aligned} \partial_t K_\varphi &= 2\gamma K_\varphi - 2aK_{1\varphi} - 4\text{Re}(a + i\alpha)\langle \nabla \varphi \nabla u, \varphi \Delta u \rangle \\ &\quad + 2\text{Re}(b + i\beta)z'_\varphi, \end{aligned} \quad (2.139)$$

$$\partial_t P_\varphi = 2\gamma \int \varphi^2 \rho g(\rho) - 2bP_{1\varphi} + 2\text{Re}(a + i\alpha)z_\varphi. \quad (2.140)$$

再考虑(2.139), (2.140) 的凸组合,  $0 < \lambda < 1$ ,

$$\begin{aligned} &\partial_t [\lambda a K_\varphi + (1 - \lambda)b P_\varphi] \\ &= 2\gamma [\lambda a K_\varphi + (1 - \lambda)b \int \varphi^2 \rho g(\rho)] - 2[\lambda a^2 K_{1\varphi} \\ &\quad + (1 - \lambda)b^2 P_{1\varphi}] - 4\text{Re} \lambda a (a + i\alpha) \langle \nabla \varphi \cdot \nabla u, \varphi \Delta u \rangle \\ &\quad + 2\text{Re} \{ \lambda a (b + i\beta) z'_\varphi + (1 - \lambda)b (a + i\alpha) z_\varphi \}. \end{aligned} \quad (2.141)$$

令  $\varepsilon > 0$  待定, 用  $(1 - \varepsilon)$  乘以(2.141) 右端第二项并进行估计有

$$\begin{aligned} &-2(1 - \varepsilon) [\lambda a^2 K_{1\varphi} + (1 - \lambda)b^2 P_{1\varphi}] \\ &\leq -4(1 - \varepsilon) \sqrt{\lambda(1 - \lambda)} ab |z_\varphi| \\ &\leq -4(1 - \varepsilon) \sqrt{\lambda(1 - \lambda)} ab |z'_\varphi| + 4\sqrt{\lambda(1 - \lambda)} ab |z'_\varphi - z_\varphi|. \end{aligned} \quad (2.142)$$

用 Schwarz 不等式估计(2.141) 右端第三项.

$$\begin{aligned}
& -4\operatorname{Re}\lambda a(a+ia)\langle \nabla\varphi\cdot\nabla u,\varphi\Delta u\rangle \\
& \leq \varepsilon\lambda a^2K_{1\varphi}+4\varepsilon^{-1}\lambda(a^2+\alpha^2)\|\nabla\varphi\cdot\nabla u\|_2^2. \quad (2.143)
\end{aligned}$$

将(2.142), (2.143) 代入(2.141) 得

$$\begin{aligned}
\partial_t[\lambda aK_\varphi+(1-\lambda)bP_\varphi] & \leq 2\gamma[\lambda aK_\varphi+(1-\lambda)b\int\varphi^2\rho g(\rho)] \\
& -\varepsilon\lambda a^2K_{1\varphi}-2\varepsilon(1-\lambda)b^2P_{1\varphi}+4\varepsilon^{-1}\lambda(a^2+\alpha^2)\|\nabla\varphi\cdot\nabla u\|_2^2 \\
& +[4\sqrt{\lambda(1-\lambda)}ab+2(1-\lambda)b|a+ia|]|z'_\varphi-z_\varphi| \\
& +4(1-\varepsilon)\sqrt{\lambda(1-\lambda)}ab|z'_\varphi| \\
& +2\operatorname{Re}[ab-i\lambda\beta a-(1-\lambda)ab]z'_\varphi. \quad (2.144)
\end{aligned}$$

在(2.144) 中  $|z'_\varphi-z_\varphi|$  能由(2.138) 用 Schwarz 不等式估计,

$$\begin{aligned}
(\cdots)|z'_\varphi-z_\varphi| & \leq \varepsilon(1-\lambda)b^2P_{1\varphi}+4\varepsilon^{-1}(2\sqrt{\lambda}a \\
& +\sqrt{1-\lambda}|a+ia|)^2\cdot\|\nabla\varphi\cdot\nabla u\|_2^2. \quad (2.145)
\end{aligned}$$

(2.144) 中的最后二项具有  $z'_\varphi$ , 能用类似于(2.98) 最后二项含  $z$  的估计进行, 再写  $z'_\varphi$  为

$$z'_\varphi=-\int dr\varphi^2\{[g(\rho)+\rho g'(\rho)]|\nabla u|^2+g'(\rho)(\bar{u}\nabla u)^2\}, \quad (2.146)$$

分解  $g=g_++g_-$ ,  $g_-$  满足(2.43) 且具有紧支集,  $g_+$  的贡献在(2.144) 中估计为  $CK_\varphi$ ,  $g_-$  的贡献使之为负. 综合上面结果有

$$\begin{aligned}
\partial_t[\lambda aK_\varphi+(1-\lambda)bP_\varphi] & \leq C[\lambda aK_\varphi+(1-\lambda)bP_\varphi] \\
& -\varepsilon[\lambda a^2K_{1\varphi}+(1-\lambda)b^2P_{1\varphi} \\
& +24\varepsilon^{-1}(a^2+\alpha^2)\|\nabla\varphi\cdot\nabla u\|_2^2]. \quad (2.147)
\end{aligned}$$

用以前的符号, 可写为形式

$$\partial_t y \leq cy - \varepsilon z + \varepsilon^+ y_1. \quad (2.148)$$

由引理2.4, 引理2.7 的  $\varphi$  替换为  $|\nabla\varphi|$ , 可知  $\|\nabla\varphi\cdot\nabla u\|_2^2$  即  $y_1$  由  $L^2(I)$  估计. 积分(2.148) 得

$$\begin{aligned}
& y(t) + \varepsilon \int_0^t dt' z(t') \exp[C(t-t')] \\
& \leq y(0) \exp[ct] + \varepsilon^{-1} \int_0^t dt' y_1(t') \exp[C(t-t')]. \quad (2.149)
\end{aligned}$$

由此得到  $y$  的点态估计和  $z$  的积分估计, 引理由假设  $(H_1)$  得到.

**引理 2.23** 设  $f$  满足  $(H_1)$  和  $(H_3)$ , 且  $\sigma'(n-2) < 2$ . 如果  $n\sigma' > 2$ , 让  $\alpha, \beta$  满足 (2.91). 设  $u$  为方程 (2.3) 的解且满足 (2.86), 则  $u$  可在空间

$$L^\infty(I, H_{\text{loc}}^1) \cap L^2(I, H_{\text{loc}}^2) \cap L^{4\sigma'+2}(I, L_{\text{loc}}^{4\sigma'+2}) \quad (2.150)$$

中进行估计.  $u(0) \in H_{\text{loc}}^1$ . 更详细一点, 局部模 (2.150) 在开球  $B$  能用  $u(0) \in H^1(B_0)$  进行估计,  $B \subset \subset B_0$ .

**证** 证明类似于引理 2.19, 不过局部化要求比引理 2.22 更为细心地估计. 我们需要函数  $\varphi, \bar{\varphi} \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$  均具有紧支集,  $0 \leq \varphi \leq \bar{\varphi} \leq 1$ .  $\bar{\varphi} = 1$  在  $\varphi$  的支集上. 特征化局部  $H^2$  模为

$$K_{2\varphi} = \|\varphi \nabla^2 u\|_2^2 \equiv \sum_{ij} \|\varphi \nabla_i \nabla_j u\|_2^2 \equiv \|\varphi \nabla_i \nabla_j u\|_2^2. \quad (2.151)$$

容易比较  $K_{2\varphi}$  和  $K_{1\varphi}$ , 由基本计算得

$$K_{2\varphi} = K_{1\varphi} + \langle \nabla u, \Delta \varphi^2 \nabla u \rangle - \langle \nabla u, (\nabla_i \nabla_j \varphi^2) \nabla_j u \rangle. \quad (2.152)$$

因此  $K_{2\varphi}$  和  $K_{1\varphi}$  相差为  $H^1$  模, 由变化 (2.131) 可得

$$\begin{aligned} \partial_t \|\varphi \nabla u\|_2^2 &= 2\gamma \|\varphi \nabla u\|_2^2 - 2a \|\varphi \nabla^2 u\|_2^2 - 4\text{Re} \\ &\quad (a + i\alpha) \langle (\nabla \varphi) \nabla u, \varphi \nabla^2 u \rangle - 2\text{Re}(b + i\beta) \langle \varphi \nabla f(u), \varphi \nabla u \rangle, \end{aligned} \quad (2.153)$$

其中  $\langle (\nabla \varphi) \nabla u, \varphi \nabla^2 u \rangle = \sum_{ij} \langle \nabla_i \varphi \nabla_j u, \varphi \nabla_i \nabla_j u \rangle$ . 等价地, 用符号 (2.134), (2.136) 和 (2.151) 得

$$\begin{aligned} \partial_t K_\varphi &= 2\gamma K_\varphi - 2a K_{2\varphi} - 4\text{Re}(a + i\alpha) \langle (\nabla \varphi) \nabla u, \\ &\quad \varphi \nabla^2 u \rangle + 2\text{Re}(b + i\beta) z'_\varphi. \end{aligned} \quad (2.154)$$

我们再用 Schwarz 不等式估计 (2.154) 左端的第三项,

$$\begin{aligned} &-4\text{Re}(a + i\alpha) \langle (\nabla \varphi) \Delta u, \varphi \nabla^2 u \rangle \\ &\leq \left(\frac{a}{2}\right) K_{2\varphi} + 8a^{-1}(a^2 + \alpha^2) \|\nabla \varphi\| \|\nabla u\|_2^2. \end{aligned} \quad (2.155)$$

估计 (2.154) 最后一项 (用  $(H_3)$ ) 得

$$2\text{Re}(b + i\beta) z'_\varphi \leq CK_\varphi + C' \|\varphi u\|^{2\sigma} \|\varphi \nabla u\|_2^2$$



$$\leq CK_\varphi + C \|\tilde{\varphi}u\|_{\frac{2\sigma'}{2\sigma'+2}}^2 \|\varphi \nabla u\|_{\frac{2}{2\sigma'+2}}^2. \quad (2.156)$$

由 Hölder 不等式

$$\leq CK_\varphi + C \|\tilde{\varphi}u\|_{\frac{2\sigma'}{2\sigma'+2}}^2 \|\varphi \nabla u\|_{\frac{2}{2}(1-\delta)}^{2(1-\delta)} \|\nabla \varphi \nabla u\|_{\frac{2}{2}}^{2\delta}.$$

再利用 Sobolev 不等式(2.112) 于  $\varphi \nabla u$  得

$$\leq CK_\varphi + \left(\frac{a}{2}\right) \|\nabla \varphi \nabla u\|_{\frac{2}{2}}^2 + C \|\tilde{\varphi}u\|_{\frac{2\sigma'}{2\sigma'+2}}^{2\sigma'/(1-\delta)} K_\varphi. \quad (2.157)$$

基本计算表明

$$\|\nabla \varphi v\|_{\frac{2}{2}}^2 = \|\varphi \nabla v\|_{\frac{2}{2}}^2 - \langle \varphi v, (\Delta \varphi) v \rangle, \forall v \in H_{\text{loc}}^1. \quad (2.158)$$

将(2.158) 中  $v = \nabla u$  代入(2.157) 可得

$$\begin{aligned} \partial_t K_\varphi &\leq CK_\varphi - aK_{2\varphi} + C(\|\varphi \nabla u\|_{\frac{2}{2}}^2 \\ &\quad + |\langle \varphi \nabla u, (\Delta \varphi) \nabla u \rangle|) + C \|\tilde{\varphi}u\|_{\frac{2\sigma'}{2\sigma'+2}}^{2\sigma'/(1-\delta)} K_\varphi \\ &= -aK_{2\varphi} + C_1(t)K_\varphi + C_2(t), \end{aligned} \quad (2.159)$$

$$\text{其中 } C_1(t) = C(1 + \|\tilde{\varphi}u\|_{\frac{2\sigma'}{2\sigma'+2}}^{2\sigma'/(1-\delta)}), \quad (2.160)$$

$$C_2(t) = C(\|\varphi \nabla u\|_{\frac{2}{2}}^2 + |\langle \varphi \nabla u, (\Delta \varphi) \nabla u \rangle|). \quad (2.161)$$

(2.159) 积分可得

$$\begin{aligned} &K_\varphi(t) + a \int_0^t dt' K_{2\varphi}(t') \exp[m(t) - m(t')] \\ &\leq K_\varphi(0) \exp[m(t)] - \int_0^t dt' C_2(t') \exp[m(t) - m(t')], \end{aligned} \quad (2.162)$$

其中

$$m(t) = \int_0^t dt' C_1(t'). \quad (2.163)$$

为得到  $u \in L^\infty(I, H_{\text{loc}}^1) \cap L^2(I, H_{\text{loc}}^2)$  的估计, 我们估计  $C_1(t)$  的积分. 分两种情况:  $n\sigma' \leq 2$  和  $n\sigma' > 2$ .

如  $n\sigma' \leq 2$ , 由(2.112) 得

$$\begin{aligned} \|\tilde{\varphi}u\|_{\frac{2\sigma'}{2\sigma'+2}}^{2\sigma'/(1-\delta)} &\leq C \|\tilde{\varphi}u\|_{\frac{2}{2}}^{2\sigma'} \|\nabla \tilde{\varphi}u\|_{\frac{2}{2}}^{2\sigma'\delta/(1-\delta)} \\ &\leq C \|\tilde{\varphi}u\|_{\frac{2}{2}}^{2\sigma'} (1 + K_\varphi + |\langle \tilde{\varphi}u, (\Delta \tilde{\varphi})u \rangle|). \end{aligned} \quad (2.164)$$

这里用到条件  $n\sigma' \leq 2$  或等价于  $\sigma'\delta/(1-\delta) < 1$  和 (2.158) 中  $v = u$ .  $C_1(t)$  的积分由 (2.164) 的  $u(0)$  的局部  $L^2$  模和引理 2.4, 引理 2.7 所估计.

若  $\sigma'(n-2) < \alpha < n\sigma'$ , 类似于引理 2.19 的证明有

$$\begin{aligned} \|\tilde{\varphi}u\|_{\frac{2\sigma'}{2\sigma'+2}(1-\delta)} &\leq C \|\tilde{\varphi}u\|_{\frac{2\sigma'}{r}(1-\delta(s)/(1-\delta))} [1 \\ &+ \|\tilde{\varphi}^{k+1}\nabla |u|^{k+1}\|^2 + \int \tilde{\varphi}^{k+1}(\Delta\tilde{\varphi}^{k+1}) |u|^{k+1}]. \end{aligned} \quad (2.165)$$

要求的  $C_1(t)$  的估计来自 (2.160), (2.165) 和引理 2.14, 引理 2.15.

再估计  $u \in L^{4\sigma+2}(I, L_{\text{loc}}^{4\sigma+2})$ , 由  $(H_1)$ , 充分估计  $f(u) \in L^2(I, L_{\text{loc}}^2)$ . 积分 (2.140) 由 (2.137) 和对  $t$  的 Schwarz 不等式得.

$$\begin{aligned} P_{\varphi}(t) - P_{\varphi}(0) &\leq 2\gamma \int_0^t dt' \int \varphi^2 \rho g(\rho) - 2b \|\varphi f(u)\|_{L^2([0,T], L^2)}^2 \\ &+ 2\|a + ia\| \|\varphi f(u)\|_{L^2([0,T], L^2)}^2 \\ &+ \|\varphi \nabla u\|_{L^2([0,T], L^2)}^2, \end{aligned} \quad (2.166)$$

因此

$$\begin{aligned} P_{\varphi}(t) + b \|\varphi f(u)\|_{L^2([0,T], L^2)}^2 \\ \leq P_{\varphi}(0) + 2\gamma \int_0^t dt' \int \varphi^2 \rho g(\rho) + b^{-1}(a^2 + \alpha^2) \int_0^t dt' K_{1\varphi}(t'). \end{aligned} \quad (2.167)$$

故要求估计  $f(u)$  来自先前的估计  $u \in L^2(I, H_{\text{loc}}^2)$  并通过  $K_{2\varphi}$  和 (2.152).

**引理 2.24** 设  $f$  满足  $(H_1)$ , 附加条件

(i)  $f$  满足  $(H_2)$ ,  $\alpha, \beta$  满足  $\alpha\beta \geq 0$  或 (2.91), 或者

(ii)  $f$  满足  $(H_3)$ ,  $\sigma'(n-2) < \alpha$ , 如  $n\sigma' > 2$ ,  $\alpha$  满足 (2.107).

若  $u$  为方程 (2.3) 的解, 则  $u$  的局部能量关于时间一致有界,  $u \in L^\infty(I, H_{\text{loc}}^1 \cap L_{\text{loc}}^{2\sigma+2})$ . 进一步对任何  $t_0 > 0$ ,  $u \in L^\infty([t_0, T], H_{\text{loc}, \text{un}}^1 \cap L_{\text{loc}, \text{un}}^{2\sigma+2})$  具有局部模估计与  $u, T$  无关.

**证** 由引理 2.7, 局部能量  $y = k_{\varphi} + P_{\varphi}$  满足

$$\int_{t_1}^{t_2} dt y(t) \leq \lambda(t_2 - t_1) + \mu, 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T. \quad (2.168)$$

另一方面,利用引理 2.22 的假设,满足(2.147) 的局部能量有

$$\partial_t y \leq C(y + y_1), \quad (2.169)$$

其中  $y_1$  为更大区域上的局部能量. 由引理 2.7,  $y_1$  满足估计

$$\int_{t_1}^{t_2} dt y_1(t) \leq \lambda_1(t_2 - t_1) + \mu_1. \quad (2.170)$$

在引理 2.23 的假设下,充分考虑局部动能  $y = K_\varphi$ , 因对  $H^1$  亚临界  $\sigma', \sigma'(n-2) < \alpha$ , 局部势能  $P_\varphi$  能为局部动能所控制.

对于  $n\sigma' \leq 2$ , 局部动能满足(2.159)–(2.161) 和(2.164) 有

$$\partial_t y \leq C(y + y_1 + yy_1), \quad (2.171)$$

这里的  $y_1$  满足(2.170). 对于  $n\sigma' > 2$ , 局部动能满足(2.159)–(2.161) 和(2.165), 因此再用不等式(2.171) 可知不等式(2.168) 成立. 从(2.169) 或(2.171) 可得

$$\partial_t y \leq yy_1, \quad (2.172)$$

引理由此即得.

**引理 2.25** 设  $y$  和  $y_1$  为非负函数, 满足(2.168)(2.170) 和(2.172),  $\lambda, \mu, \lambda_1, \mu_1$  均为非负常数, 则

$$y(t) \leq \exp(\lambda + \mu_1)(\lambda + \mu\lambda_1)(e - 1)^{-1}. \quad (2.173)$$

**证** 由(2.172), 对  $t' \leq t$  有

$$y(t) \leq y(t') \exp \left\{ \int_{t'}^t dt'' y_1(t'') \right\} \leq y(t') \exp[\lambda_1(t - t') + \mu_1]. \quad (2.174)$$

由(2.168), 对  $\theta > 0$  有

$$\begin{aligned} \lambda\theta + \mu &\geq \int_{t-\theta}^t dt' y(t') \geq \int_{t-\theta}^t dt' y(t) \exp[-\mu_1 - \lambda_1(t - t')] \\ &= y(t) e^{-\mu_1} \lambda_1^{-1} [1 - \exp(-\lambda_1\theta)]. \end{aligned} \quad (2.175)$$

因此

$$y(t) \leq e^{\mu_1} \lambda_1 (\lambda\theta + \mu) [1 - \exp(-\lambda_1\theta)]^{-1},$$

取  $\theta = \lambda_1^{-1}$  即得引理.

**命题 2.26** 设  $f$  满足  $(H_1)$ . 附加条件

(i)  $f$  满足  $(H_2)$ ,  $\alpha, \beta$  满足  $\alpha\beta \geq 0$  或(2.91), 或者

(ii)  $f$  满足  $(H_3)$ ,  $\sigma'(n-2) < \alpha$ , 如  $n\sigma' > 2$ ,  $\alpha$  满足 (2.107).

若  $u_0 \in H_{\text{loc}}^1 \cap L_{\text{loc}}^{2\sigma+2}$ , 则方程 (2.3) 具有一解,

$$u \in C(\cdot^{-1}, H_{\text{loc}}^1 \cap L_{\text{loc}}^{2\sigma+2}) \cap L_{\text{loc}}^2(\cdot^{-1}, H_{\text{loc}}^2) \\ \cap L_{\text{loc}}^{4\sigma+2}(\cdot^{-1}, L_{\text{loc}}^{4\sigma+2}), \quad (2.176)$$

且  $u(0) = u_0$ , 解满足等式 (2.14), (2.129), (2.130) 和引理 2.4, 引理 2.7, 引理 2.22 或引理 2.23 和引理 2.24. 特别,

$$u \in L^\infty([t_0, \infty), H_{\text{loc}, \text{un}}^1 \cap L_{\text{loc}, \text{un}}^{2\sigma+2}) \quad \forall t_0 > 0.$$

证(摘要) 证明基于命题 2.8, 考虑“盒子”的增加序列  $\{\Lambda_i\}$ , 于此取半径为  $2^i$  的球, 令  $\phi_0 \in C^1(\cdot^{-n}, \cdot^{-1})$ ,  $\phi_0$  轴向对称的,  $0 \leq \phi_0 \leq 1$ .

$$\phi_0(x) = 1, \quad |x| \leq 1,$$

$$\phi_0(x) = 0, \quad |x| \geq 2.$$

令  $\phi_i(x) = (2^{-i}x)$ ,  $u_{0i} = u_0 \phi_i$ , 对每个  $i$ ,  $u_i$  为方程 (2.3) 满足 (2.122),  $u_i(0) = u_{0i}$  的解, 让

$$X'_j = L^\infty([0, 2^j] H^1(\Lambda_j) \cap L^{2\sigma+2}(\Lambda_j)) \cap L^2([0, 2^j], \\ H^2(\Lambda_j)) \cap L^{4\sigma+2}([0, 2^j], L^{4\sigma+2}(\Lambda_j)),$$

则由引理 2.22 或引理 2.23, 对固定的  $j$ , 序列  $\{u_i\}_{i \geq j}$  在  $X'_j$  中有界, 由紧性原理和对角线选取, 能从  $\{u_i\}$  中选取子序列使得在  $X'_j$  中对一切  $j$  弱\*收敛于某个  $u$ ,

$$u \in L_{\text{loc}}^\infty(\cdot^{-1}, H_{\text{loc}}^1 \cap L_{\text{loc}}^{2\sigma+2}) \cap L_{\text{loc}}^2(\cdot^{-1}, H_{\text{loc}}^2) \cap \\ L_{\text{loc}}^{4\sigma+2}(\cdot^{-1}, L_{\text{loc}}^{4\sigma+2}).$$

从标准原理, 如同命题 2.8 可得命题.

### § 3 一般二维 Ginzburg-Landau 方程的整体吸引子

设  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n=1, 2$ ) 的有界开集, 具有充分光滑的边界  $\Gamma$ . 考虑如下一般的 Ginzburg-Landau 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (\lambda + i\alpha)\Delta u + (k + i\beta)|u|^2 u - \gamma u = 0, \quad (3.1)$$

其中参数  $\lambda, \alpha, \beta, \gamma, k$  为实数, 且设

$$\lambda > 0, k > 0. \quad (3.2)$$

若有以下边界条件:

Dirichlet 边界条件

$$u(x, t) = 0, (x, t) \in \Gamma \times \mathbb{R}^+, \quad (3.3)$$

Neumann 边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, (x, t) \in \Gamma \times \mathbb{R}^+, \quad (3.4)$$

其中  $\nu$  为  $\Gamma$  的单位外法线向量.

周期边界条件

$$\Omega = [0, L], n = 1; \Omega = [0, L_1] \times [0, L_2], n = 2, \quad (3.5)$$

$u$  对  $\Omega$  是周期的.

还有初始条件

$$u(x, 0) = u_0(x), x \in \Omega. \quad (3.6)$$

记  $u = \{u_1, u_2\}, u_j (j = 1, 2) \in L^2, \|u\|_{L^2}^2 = \|u_1\|_{L^2}^2 + \|u_2\|_{L^2}^2$  如  $u = u_1 + iu_2, v = v_1 + iv_2$ , 则

$$(u, v) = \{(u_1, v_1) + (u_2, v_2)\} + i\{(u_2, v_1) - (u_1, v_2)\}.$$

如  $u, v \in H^1(\Omega)$ , 记

$$((u, v)) = \sum_{i=1}^n (D_i u, D_i v), \|u\|^2 = ((u, u)).$$

因此

$$((u, v))_1 = (u, v) + ((u, v)), \|u\|_1 = \|u\|_{L^2}^2 + \|u\|^2.$$

取  $H = L^2(\Omega)$  且记

$$V = H_0^1(\Omega), D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega),$$

对应于(3.3)情况.

$$V = H^1(\Omega), D(A) = \{v \in H^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, x \in \Gamma\},$$

对应于(3.4)情况.

$$V = H_{\text{per}}^1(\Omega), D(A) = H_{\text{per}}^2(\Omega), \text{对应于(3.5)情况. 这里}$$

$Au = -\Delta u$ , 对任何  $\eta > 0$ ,  $A + \eta I$  是一个同构:  $V \rightarrow V'$  或  $D(A) \rightarrow H$ . 由 Poincaré 不等式, 可知对于 (3.3),  $\eta = 0$  也成立.

设  $\omega_j$  和  $\lambda_j$  分别为  $A$  在  $H$  中的相互正交的特征向量和特征值.

$$A\omega_j = \lambda_j \omega_j, \quad j \geq 1, \quad (3.7)$$

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, \quad \lambda_j \rightarrow \infty, j \rightarrow \infty. \quad (3.8)$$

对应于 (3.3) 的情况,  $\lambda_1 > 0$ . 而对应于 (3.4) 和 (3.5) 的情况,  $\lambda_1 = 0$ ,  $\omega_1 = |\Omega|^{-\frac{1}{2}}$ ,  $\lambda_2 > 0$ . 定义  $A$  的幂  $A^S$  ( $S > 0$ ), 有  $V = D(A^{\frac{1}{2}})$ ,  $V' = D(A^{-\frac{1}{2}})$ ,  $H = H(A^0)$ .

问题 (3.1)(3.3)(或 (3.1)(3.4); (3.1)(3.5)) 可写成如下泛函形式发展方程:

$$u_t + (\lambda + i\alpha)Au + (k + i\beta)|u|^2u - \gamma u = 0. \quad (3.9)$$

初始条件 (3.6) 可写成

$$u(0) = u_0. \quad (3.10)$$

对于初值问题 (3.9), (3.10), 解的存在性、惟一性有如下定理:

**定理 3.1**<sup>[12]</sup> 设  $n = 1$  或  $n = 2$ , (3.2) 成立, 则对  $u_0 \in H$ , 存在问题 (3.9), (3.10) 的惟一整体解

$$u \in C([0, T]; H) \cap L^2(0, T; V), \quad \forall T < \infty, \quad (3.11)$$

且映照  $u_0 \rightarrow u(t)$  是连续的:  $H \rightarrow H, \forall t > 0$ .

如  $u_0 \in V$ , 则有

$$u \in C([0, T]; V) \cap L^2(0, T; D(A)), \quad \forall T < \infty. \quad (3.12)$$

现考虑在  $H$  中吸收集的存在性. 用  $\bar{u}$  乘 (3.1) 在  $\Omega$  上积分, 利用 Green 公式并取实部得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u|^2 dx + \lambda \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + k \int_{\Omega} |u|^4 dx \\ & - \gamma \int_{\Omega} |u|^2 dx = 0, \end{aligned}$$

或

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2}^2 + \lambda \|u\|_{L^2}^2 + k \|u\|_{L^4}^4 - \gamma \|u\|_{L^2}^2 = 0. \quad (3.13)$$

(i)  $\gamma \leq 0$ , 导致平凡动力系统. 如  $\gamma < 0$ , 则由 (3.13) 得

$$\frac{d}{dt} \|u\|_{L^2}^2 - \gamma \|u\|_{L^2}^2 \leq 0, \quad (3.14)$$

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 \leq \|u_0\|_{L^2}^2 \exp(\gamma t), \quad (3.15)$$

因此

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 \rightarrow 0, t \rightarrow \infty, \forall u_0 \in L^2(\Omega). \quad (3.16)$$

如  $\gamma = 0$ , (3.16) 仍然成立. 事实上, 由 Hölder 不等式  $\|u\|_{L^2}^2 \leq$

$|\Omega|^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^4}^2$ , 从 (3.13) 推得

$$y_t + \frac{2k}{|\Omega|} y^2 \leq 0, y(t) = \|u(t)\|_{L^2}^2,$$

因此

$$\frac{1}{y(0)} + \frac{2k}{|\Omega|} t \leq \frac{1}{y(t)}.$$

于是 (3.16) 成立.

当  $\gamma < \gamma_{\lambda_1}$  时, (3.16) 也成立, 其中  $\lambda_1$  为对应于 (3.3) 情况的算子  $-\Delta$  在 Dirichlet 边界条件下的第一特征值. 对应于 (3.4), (3.5) 的情况, (3.16) 不一定成立, 因它们具有非零常数的定常解.

(ii)  $\gamma > 0$ , 我们有

$$\frac{k}{2} S^4 - 2\gamma S^2 \geq -\frac{2}{k} \gamma^2, S \in R, \quad (3.17)$$

$$\frac{k}{2} \int_{\Omega} |\varphi|^4 dx - 2\gamma \int_{\Omega} |\varphi|^2 dx \geq -\frac{2}{k} \gamma^2 |\Omega|, \forall \varphi \in L^4(\Omega). \quad (3.18)$$

利用此不等式于 (3.13) 中得

$$\frac{d}{dt} \|u\|_{L^2}^2 + 2\lambda \|u\|^2 + k \|u\|_{L^4}^2 + 2\gamma \|u\|_{L^2}^4 \leq \frac{2\gamma^2}{k} |\Omega|. \quad (3.19)$$

由 Gronwall 引理得

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^2}^2 &\leq \|u(0)\|_{L^2}^2 \exp(-\gamma t) \\ &\quad + \frac{\gamma}{k} |\Omega| (1 - \exp(-\gamma t)), \forall t \geq 0, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\|_{L^2}^2 \leq \rho_0^2, \rho_0^2 = \frac{\gamma}{k} |\Omega|. \quad (3.21)$$

因此,以  $O$  为中心,  $\rho'_0 \geq \rho_0$  为半径的在  $H$  中的球  $B_H(0, \rho'_0)$  是半群  $S(t)$  的正不变集. 以  $O$  为中心,  $\rho'_0 > \rho_0$  为半径在  $H$  中的球  $B_0 = B_H(0, \rho'_0)$  是半群  $S(t)$  在  $H$  中的吸收集.

如果  $B$  为  $H$  中的任何有界集, 设为中心在  $O$ , 以  $R$  为半径, 在  $H$  中的球  $B_H(0, R)$ , 则当  $t \geq t_0 \doteq t_0(B, B_0)$  时,  $S(t)B \subset B_0$ .

$$t_0 = \frac{1}{\gamma} \log \left( \frac{R^2}{(\rho'_0)^2 - \rho_0^2} \right). \quad (3.22)$$

积分(3.19)从  $t$  到  $t+r$  ( $r > 0$ ), 如  $u_0 \in B, t \geq t_0$ , 则

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+r} \{2\lambda \|u\|^2 + k \|u\|_{L^4}^4 + 2\gamma \|u\|_{L^2}^2\} ds \\ & \leq (\rho'_0)^2 + \frac{2r\gamma^2}{k} |\Omega|, \forall t \geq t_0, \forall r > 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

现考虑在  $V$  中的吸收集.

乘(3.1)以  $-\Delta \bar{u}$ , 在  $\Omega$  上积分, 利用 Green 公式, 再取实部得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + \lambda \|\Delta u\|_{L^2}^2 - \gamma \|u\|^2 \\ & = \operatorname{Re}(k + i\beta) \int_{\Omega} |u|^2 u \Delta \bar{u} dx \\ & = \operatorname{Re}(k + i\beta) \int_{\Omega} [\nabla(|u|^2 u)] \nabla \bar{u} dx \\ & \leq 3(k^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} \int_{\Omega} |u|^2 |\nabla u|^2 dx, \end{aligned} \quad (3.24)$$

利用 Schwarz 不等式, 上式右端表达式限于

$$3(k^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^4}^2 \|\nabla u\|_{L^4}^2, \quad (3.25)$$

由于 Sobolev 嵌入定理和插值不等式, 有  $H^{\frac{1}{2}}(\Omega) \subset L^4(\Omega)$  ( $n=1, 2$ ) 且

$$\| \varphi \|_{L^4(\Omega)} \leq C_1 \| \varphi \|_{L^2}^{\frac{1}{2}} (\| \varphi \|^2 + \| \varphi \|_{L^2}^2)^{\frac{1}{4}}, \quad \varphi \in H^1(\Omega). \quad (3.26)$$

模  $\|u\|_{L^2}^2 + \|\Delta u\|_{L^2}^2$  是等价于  $H^2$  模, (3.26) 对于  $\Delta \varphi$  有



$$|\Delta\varphi|_{L^4} \leq C'_2 \|\varphi\|^{\frac{1}{2}} (\|\varphi\|_{L^2}^2 + \|\Delta\varphi\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{4}}, \quad (3.27)$$

于是 (3.25) 函于

$$\begin{aligned} & 3(C'_2)^2(k^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^4}^2 \|u\| (\|u\|_{L^2}^2 + \|\Delta u\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \frac{\lambda}{2} \|\Delta u\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2}^2 + C'_3 \|u\|_{L^4}^4 \|u\|^2, \\ & C'_3 = \frac{9}{2\lambda} (C'_2)^4 (k^2 + \beta^2). \end{aligned} \quad (3.28)$$

将 (3.25), (3.28) 代入 (3.24) 得

$$\frac{d}{dt} \|u\|^2 + \lambda \|\Delta u\|_{L^2}^2 \leq 2(\gamma + C'_3) \|u\|^2 + \lambda \|u\|_{L^2}^2. \quad (3.29)$$

运用如下的一致 Gronwall 引理:

**引理 3.2** (一致 Gronwall 引理).<sup>12</sup> 设  $g, h, y$  为三个在  $[t_0, \infty]$  上的正的局部可积函数, 使得  $y'$  在  $[t_0, +\infty]$  上局部可积且满足

$$\frac{dy}{dt} \leq gy + h, \quad t \geq t_0, \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \int_t^{t+r} g(s) ds & \leq a_1, \int_t^{t+r} h(s) ds \leq a_2, \\ \int_t^{t+r} y(s) ds & \leq a_3, \quad t \geq t_0, \end{aligned} \quad (3.31)$$

其中  $r, a_1, a_2, a_3$  均为正常数, 则

$$y(t+r) \leq \left( \frac{a_3}{r} + a_2 \right) \exp(a_2), \quad \forall t \geq t_0. \quad (3.32)$$

令  $y = \|u\|^2, g = (2\gamma + C'_3 \|u\|_{L^4}^4), h = \lambda \|u\|_{L^2}^2,$

$$a_1 = 2r\gamma + \frac{2C'_3}{k} \left( \rho_0'^2 + \frac{2r\gamma^2}{k} |\Omega| \right),$$

$$a_2 = \lambda \rho_0'^2,$$

$$a_3 = \frac{1}{2\lambda} \left( \rho_0'^2 + \frac{2r\gamma^2}{k} |\Omega| \right).$$

则由引理 3.2 有

$$\|u(t)\|^2 \leq \left( \frac{a_3}{r} + a_2 \right) \exp(a_2), \quad t \geq t_0 + r, \quad (3.33)$$

其中  $r > 0$  是任意选取的,  $u_0 \in B$ ,  $t_0 = L_0(B)$  在 (3.22) 中,  $(\|\varphi\|_{L^2}^2 + \|\varphi\|^2)$  为  $V$  上的模, 即为  $H^1$  模. 由 (3.22), (3.23) 和 (3.33) 可得  $S(t)$  在  $V$  中吸收集的存在性. 事实上, 如  $B$  为  $V$  中的一个有界集, 则它也是  $H$  中的有界集,  $S(t)B \subset B_0$ ,  $t \geq t_0(B, B_0)$ , 由 (3.33) 有  $S(t)B \subset B_1$ ,  $t \geq t_0 + r$ , 其中  $B_1$  为  $V$  中以  $O$  为中心, 以  $\rho_1$  为半径的球,

$$\rho_1^2 = (\rho_0')^2 + \left( \frac{a_3}{r} + a_2 \right) \exp(a_1), \quad (3.34)$$

因此  $V$  中的以  $O$  为中心,  $\rho_1$  为半径的球为  $S(t)$  在  $V$  中的吸收集.

如  $u_0 \in B$ , 这是  $B$  仅在  $H$  中是有界的, 则可作如下分析:  $S(t)B \subset B_1$ ,  $t \geq t_0(B) + r$ , 因  $B_1$  在  $V$  中是有界的, 故  $V$  映射  $H$  中是紧的, 推出:

$$\bigcup_{t \geq t_0 + r} S(t)B \text{ 在 } H \text{ 中是相对紧的,}$$

则利用如下定理(见[12, 定理 11]):

**定理 3.3** 设  $H$  是一个度量空间, 算子  $S(t)$  给定, 满足

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = F(u(t)), \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (3.35)$$

和条件:

算子  $S(t)$  对充分大的  $t$  是一致紧的, 则对任何有界集  $B$ , 存在  $t_0 = t_0(B)$  使得

$$\bigcup_{t \geq t_0} S(t)B \quad (3.36)$$

在  $H$  中是相对紧的; 或满足条件:

$H$  为 Banach 空间,  $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$ , 其中算子  $S_1(t)$  对  $t$  充分大是一致紧的,  $S_2(t)$  为连续映照:  $H \rightarrow H$ , 且对任何有界集  $C \subset H$  有

$$r_i(t) = \sup_{\varphi \in C} \|S_2(t)\varphi\|_H \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad (3.37)$$

且设存在一个开集  $\mathcal{U}$  和  $\mathcal{U}$  中一个有界集  $B$  使得  $B$  为  $\mathcal{U}$  中的吸收

集.

则  $B$  的极限集  $\mathcal{A} = \omega(B)$  是紧的吸引子, 它吸引  $\mathcal{U}$  中的有界集, 它是在  $\mathcal{U}$  中最大的有界吸引子, 如  $H$  是一个 Banach 空间,  $\mathcal{U}$  是凸的和连通的, 则  $\mathcal{A}$  也是连通的.

我们得到:

**定理 3.4** 考虑由 Ginzburg-Landau 方程(3.1), 并置以边界条件(3.3)或(3.4)或(3.5)的动力系统, 其中  $\lambda > 0, k > 0$ , 则这个动力系统具有整体吸引子  $\mathcal{A}$ . 它在  $L^2(\Omega)$  中是紧的、连通的和最大的.  $\mathcal{A}$  吸引  $L^2(\Omega)$  中的有界集,  $\mathcal{A}$  也是  $L^2(\Omega)$  中最大的泛函不变集.

**附注 3.5** 以上分析对于  $\gamma \leq 0$ , 则它的所有轨线趋于  $0 (t \rightarrow \infty)$ , 即有

$$\text{dist}(S(t)B, \{0\}) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty,$$

其中  $B \subset H$  为任何有界集, 因此, 整体吸引子  $\mathcal{A}$  为  $\{0\}$ .

## § 4 一般 Ginzburg-Landau 方程的动力长度

整体吸引子  $\mathcal{A}$  的 Lyapunov 维数  $d_L(\mathcal{A})$  可解释为系统自由度的个数. 实际上

$$d_L(\mathcal{A}) \sim \left(\frac{L}{l}\right)^d, \quad (4.1)$$

其中  $L$  为系统的长度,  $d$  为空间维数,  $l$  为最小的动力长度. 而

$$l(t) \sim \left(\frac{V}{N(t)}\right)^{\frac{1}{d}}. \quad (4.2)$$

这里  $V$  表示  $d$  维系统的体积,  $N(t)$  表示最小模的个数.

$$N^{-d}(t) \sim k_{n,r}(t) = \left(\frac{J_n}{J_r}\right)^{\frac{1}{2(n-r)}}, \quad (4.3)$$

其中

$$J_l = \|\nabla^l u\|_2^2 = \int |\nabla^l u|^2 dx. \quad (4.4)$$

因此,为了估计  $I(t)$ , 必须估计  $J_I(t)$  以及各种时间平均  $L^\infty$  模.

令

$$\begin{aligned} G_n &= \|u\|_{2(\frac{\sigma n+1}{\sigma n+1})}^2 = \int |u|^{2(\sigma n+1)} dx, \\ J_n &= \|\nabla^n u\|_2^2 = \int |\nabla^n u|^2 dx, |\nabla^n u|^2 = \nabla^n u \cdot \nabla^n u^*, \\ F_n &= J_n + \alpha_n G_n, n \neq 1, \alpha_n \neq 1. \end{aligned}$$

考虑如下的一般的 Ginzburg-Landau 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Ru + (1 + i\nu)\Delta u - (1 + i\mu)|u|^{2\sigma}u, \quad (4.5)$$

其中  $R > 0, \mu, \nu$  为实数,  $\sigma > 0$ .

设  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  表示 GL 方程 (4.5) 具初值  $u_0$  所形成的半群算子, 即

$$u(t) = S(t)u_0. \quad (4.6)$$

若  $\mathcal{A} \subset H$  为紧的吸引子, 泛函  $F = F(S(t)u_0)$  定义时间渐近上界

$$\bar{F} = \sup_{u_0 \in H} \limsup_{t \rightarrow \infty} F(S(t)u_0), \quad (4.7)$$

它的时间平均为

$$\langle F \rangle = \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{u \in \mathcal{A}} \frac{1}{t} \int_0^t F(S(\tau)u_0) d\tau, \quad (4.8)$$

由基本的实分析易得.

**引理 4.1** (时间平均的性质) (i)  $\langle F \rangle \leq \bar{F}$ ,

(ii)  $\langle FG \rangle \leq (F^p)^{\frac{1}{p}} (G^q)^{\frac{1}{q}}, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,

(iii)  $\langle \frac{dF}{dt} + G \rangle = \langle G \rangle$ , 如  $\bar{F} < \infty$ .

我们先综述一下主要结果, 对于  $J_n$  的新的微分不等式

$$\dot{J}_n \leq 2RJ_n + CJ_n G_n^\sigma - J_n \left( \frac{J_n}{J_r} \right)^{\frac{1}{n-r}}, \quad (4.9)$$

$$\text{其中 } S = \frac{2\sigma}{2 - \sigma n + 2m\sigma}, \frac{d\sigma - 2}{2\sigma} < m < \infty. \quad (4.10)$$

第二个微分不等式

$$\dot{J}_n \leq 2RJ_n + C(G_m^{\sigma'} + G_m^{\sigma''}) - J_n \left( \frac{J_n}{J_r} \right)^{\frac{1}{n-r}}, \quad (4.11)$$

这里

$$S' = \frac{2+2\sigma-\sigma d+2n\sigma}{2-\sigma d+2m\sigma}, S'_0 = \frac{\sigma(n+1)+1}{\sigma m+1},$$

$$\frac{\sigma d-2}{2\sigma} < m \leq n+1. \quad (4.12)$$

对于  $\sigma$  和  $d$  在  $\mu, \nu$  平面上可分三个不同区域, 如图 4.1.

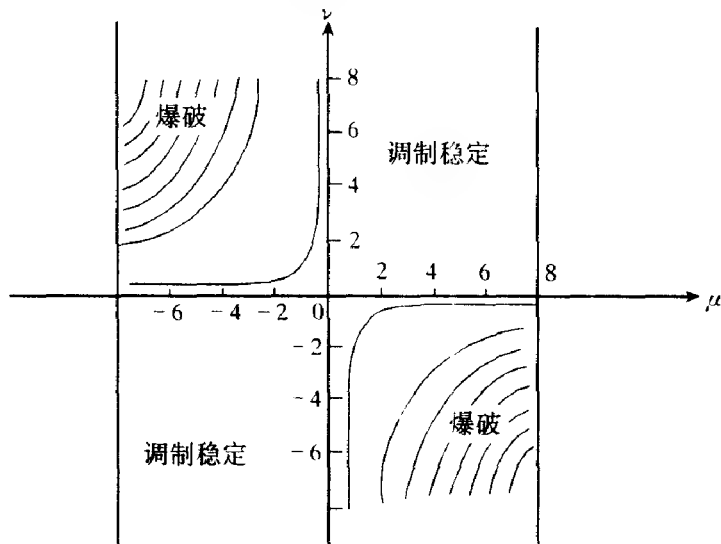


图 4.1

超临界 GL 方程,  $d=3, \sigma=1$ . 整体解 仅在一个黑暗区域的一个小区域. 对于亚临界和临界情况则在整个参数平面上存在.

(i) 调制稳定区: 它包含在第一象限和第三象限以及第二、四象限和一对双曲线  $\mu\nu + 1 = 0$  所夹区域, 在此区域内所有旋波解是线性稳定的.

(ii) “软湍流”区域(非“黑暗区”): 这个区域在调制稳定区之外, 为一对双曲线.

$$-\frac{1+\mu\nu}{|\mu-\nu|} \leq \frac{\sqrt{2\sigma+1}}{\sigma} \quad (4.13)$$

所界, 且  $d < 2 + \frac{2}{\sigma}$ . 在此区域有先验估计

$$\bar{J}_n \leq CR^{\frac{(1+\sigma)(2-d\sigma+2n\sigma)}{\sigma(2+2\sigma-\sigma m)}}. \quad (4.14)$$

(iii) “硬湍流”区域(“黑暗区”):估计(4.14)失败,代入以

$$\bar{J}_n < CR \frac{d\sigma + (1+m\sigma)[2+2n]\sigma + n(2+2\sigma)d\sigma}{(1+n)\sigma(2+d\sigma+2m\sigma)}, \quad (4.15)$$

这是一个更弱的界,且满足约束

$$|1 + i\nu| \leq \frac{\sigma m + 1}{\sigma m}, \quad (4.16)$$

$$\frac{\sigma d - 2}{2\sigma} < m \leq n + 1. \quad (4.17)$$

在黑暗区最好选取  $m$  为

$$m = \frac{1}{\sigma} \left( \frac{1}{\nu^2} + \sqrt{\frac{1}{\nu^4} + \frac{1}{\nu^2}} \right), \quad (4.18)$$

更简捷一些,可用

$$m = \frac{1}{\sigma\nu} \quad (4.19)$$

代替.不幸的是,(4.17)给出了  $m$  的下界,它依赖于量  $\sigma d$ ,于是可分三种情况讨论:

- (1) 亚临界  $\sigma d < 2$ , 可取  $m = 0$ ;
- (2) 临界  $\sigma d = 2$ , 则任何  $m > 0$  成立;
- (3) 超临界,  $\sigma d > 2$ , 则  $m$  的下界严格为正,且  $\nu$  具有上限.

$$|\nu| < \frac{2\sqrt{\sigma d - 2}}{\sigma d - 2}. \quad (4.20)$$

$\sigma = 1$ , 可得如下定性估计(见表 4.1)

表 4.1

$d$	区 域	$\ \overline{\nabla^n u}\ _2^2$	$\ \nabla^n u\ _2^2$	$\ \bar{u}\ _\infty^2$	$\langle \ u\ _\infty^2 \rangle$
1	非黑暗区	$\frac{2}{3}(2n+1)$	$\frac{2}{3}(2n+1)$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$
1	黑 暗 区	$2n+1$	$2n^2$	2	$\frac{4}{3}$
2	非黑暗区	$2n$	$2n$	2	2

续表

$d$	区 域	$\ \nabla^n u\ _2^2$	$\langle \ \nabla^n u\ _2^2 \rangle$	$\ \bar{u}\ _\infty^2$	$\langle \ u\ _\infty^2 \rangle$
2	黑 暗 区	$\frac{n + n^2 + m(1 + n + n^2)}{m(1 + n)}$	$\frac{1 + n + m(1 + n)}{m}$	$\frac{1 + m}{m}$	2
3	非黑暗区	$4n - 2$	$4n - 2$	4	4
3	黑 暗 区	$\frac{(1 + m)(2 + n + 2n^2) - 1}{(2m - 1)(1 + n)}$	$\frac{2(m + n - 2 + mn)}{2m - 1}$	$\frac{2(1 + m)}{2m - 1}$	$\frac{5m - 1}{2m - 1}$

“+”表示近似值

定义  $l$  长度的逆为

$$l^{-1} \sim K_{n,r} = \left( \frac{J_n + \beta 2^n R^{(n+1)/\sigma}}{J_r + \beta 2^r R^{(r+1)/\sigma}} \right)^{\frac{1}{2(n-r)}}, \quad (4.21)$$

$$k_{n,r} = K_{n,r} + \beta = 0,$$

则可得  $\|u\|_\infty^{2\sigma}$  的时间平均和时间渐近上界估计,

$$\langle \|u\|_\infty^{2\sigma} \rangle \sim \langle K_{n,r}^2 \rangle \leq \|\bar{u}\|_\infty^{2\sigma} \sim K_{n,r}^{-2} \leq k_{n,r}^{-2}. \quad (4.22)$$

以下作一些预备性估计. 直接对 GL 方程(4.1) 计算可得

**引理 4.2** 对于复 GL 方程(4.1),  $G_n$  和  $J_n$  满足如下发展方程.

$$\frac{\dot{G}_n}{2(\sigma n + 1)} = RG_n - G_{n+1} + \operatorname{Re} \left[ (1 + i\nu) \int |u|^{2m} u^* \Delta u dx \right], \quad (4.23)$$

$$\frac{1}{2} \dot{J}_n = RJ_n - J_{n+1} - \operatorname{Re} \left[ (1 + i\mu) \int \nabla^n (u |u|^{2\sigma}) \nabla^n u^* dx \right], \quad (4.24)$$

再估计(4.24) 右端最后一项.

**引理 4.3** 对一切正整数  $d, \sigma$  和  $n$  满足如下不等式

$$\left| \int \nabla^n (u |u|^{2\sigma}) \cdot \nabla^n u^* dx \right| \leq C(n, \rho) \|\nabla^n u\|_{2\rho}^2 \|u\|_{2\sigma}^{2\sigma}, \quad (4.25)$$

其中  $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1, 1 \leq p, r \leq \infty$ . (4.26)

证 在积分内部取绝对值, 利用  $\nabla^n(|u| |u|^{2\sigma})$  的 Leibniz 展开和三角不等式得

$$\begin{aligned} & \left| \int \nabla^n(|u| |u|^{2\sigma}) \cdot \nabla^n u^* dx \right| \\ & \leq C_1(n) \sum_{\substack{\alpha \in N^{2\sigma+1} \\ |\alpha| = n}} \int |\nabla^n u| \prod_{j=1}^{2\sigma+1} |\nabla^{\alpha_j} u| dx \\ & \leq C_1(n) \|\nabla^n u\|_{p_0} \sum_{\substack{\alpha \in N^{2\sigma+1} \\ |\alpha| = n}} \prod_{j=1}^{2\sigma+1} \|\nabla^{\alpha_j} u\|_{p_j} \\ & \quad (\text{由 Hölder 不等式, } \sum_{j=0}^{2\sigma+1} \frac{1}{p_j} = 1) \\ & \leq C_2(n, p_0) \|\nabla^n u\|_{p_0} \sum_{\substack{\alpha \in N^{2\sigma+1} \\ |\alpha| = n}} \prod_{j=1}^{2\sigma+1} \|\nabla^{\alpha_j} u\|_{p_0}^{\theta_j} \|u\|_{2\sigma p_0/(p_0-2)}^{1-\theta_j} \\ & \quad (\text{对 } \|\nabla^{\alpha_j} u\|_{p_j} \text{ 插值, 见以下说明}) \\ & = C_3(n, p) \|\nabla^n u\|_{2p}^2 \|u\|_{2\sigma r}^{2\sigma} \end{aligned} \quad (4.27)$$

(利用以下关系式(4.30), 置  $p = \frac{p_0}{2}, r = p_0/(p_0 - 2)$ ),

其中

$$\theta_j = \frac{\alpha_j}{n}, \quad (4.28)$$

$$p_j = \frac{2np_0\sigma}{-2n + np_0 + \alpha_j(2 - p_0 + 2\sigma)}. \quad (4.29)$$

容易验证

$$\sum_{j=1}^{2\sigma+1} \theta_j = \frac{|\alpha|}{n} = 1, \quad (4.30)$$

$$\sum_{j=0}^{2\sigma+1} \frac{1}{p_j} = \frac{1}{p_0} + (2\sigma + 1) \frac{np_0 - 2n}{2np_0\sigma} + |\alpha| \frac{(2 - p_0 + 2\sigma)}{2np_0\sigma} = 1. \quad (4.31)$$

最后, 我们必须验证由(4.29)定义的  $p_j$  满足  $1 \leq p_j \leq \infty$ . 由



基本运算, (4.29) 的分母不为 0,  $\frac{\partial p_j}{\partial \alpha_j}$  (当  $\alpha_j \in (0, n)$  时) 不改变符号. 因此, 充分考虑极端情况  $\alpha_j = 0, p_j = 2p_0\sigma/(p_0 - 2), \alpha_j = n, p_j = p_0$ , 显然有  $1 \leq p_j \leq \infty$ , 由此断言上面 Hölder 不等式成立.

在引理 4.3 中,  $p$  是自由的, 今后估计中令  $p = 2 + 2\sigma$ .

**推论 4.4** 对一切正整数  $d, \sigma$  和  $n$ , 下列不等式成立

$$\left| \int \nabla^n (u | u |^{2\sigma}) \cdot \nabla^n u^* dx \right| \leq \epsilon J_{n+1} + C(\epsilon) J_n G_m^s, \quad (4.32)$$

$$s = \frac{2\sigma}{2 - \sigma d + 2m\sigma}, \quad \frac{\sigma d - 2}{2\sigma} < m < \infty. \quad (4.33)$$

**证** 由内插不等式和引理 4.3 有

$$\begin{aligned} & \left| \int \nabla^n (u | u |^{2\sigma}) \cdot \nabla^n u^* dx \right| \\ & \leq C_4 \|\nabla^{n+1} u\|_2^{d/r} \|\nabla^n u\|_2^{2-d/r} \|u\|_{2\sigma}^{2\sigma} \\ & \equiv C_4 J_{n+1}^{s_1} J_n^{1-s_1} G_m^{s_2} \end{aligned} \quad (4.34)$$

(由 Young 不等式)

$$\begin{aligned} & \leq \epsilon J_{n+1} + C_5(\epsilon) (J_n^{1-s_1} G_m^{s_2})^{\frac{1}{1-s_1}} \\ & \equiv \epsilon J_{n+1} + C_5(\epsilon) J_n G_m^s, \end{aligned} \quad (4.35)$$

其中指标  $s_1 = \frac{\sigma d}{2(1+m\sigma)}, s_2 = \frac{\sigma}{1+m\sigma}$ .

约束(4.33) 来自  $s_1 < 1$ , 以便应用 Young 不等式  $d = 1$ . 引理 4.3 的条件  $r \geq 1$  必将更加限制(4.33). 故对  $\frac{1}{2} < r < 1$ , 我们必须补充我们的证明具有不同的插值, 为了得到更一般的结果, 于是估计

$$\begin{aligned} & \left| \int \nabla^n (u | u |^{2\sigma}) \cdot \nabla^n u^* dx \right| \leq C_5 \|\nabla^n u\|_\infty^2 \|u\|_\infty^{2\sigma} \\ & \text{(对最后一个因子进行插值)} \\ & \leq C_6 \|\nabla^n u\|_\infty^{2\lambda} \|\nabla^n u\|_\infty^{2(1-\lambda)} [(\|\nabla^{n+1} u\|_2^{s_1} \|u\|_{2\sigma}^{1-s_1})^{2\sigma} \\ & \quad + \|u\|_{2\sigma}^{2\sigma}] \leq C_7 (\|\nabla^{n+1} u\|_2^{s_1} \|u\|_{2\sigma}^{1-s_1})^{2\lambda} \\ & \quad (\|\nabla^{n+1} u\|_2 \| \nabla^n u \|_2)^{1-\lambda} (\|\nabla^{n+1} u\|_2^{s_1} \|u\|_{2\sigma}^{1-s_1})^{2\sigma} \end{aligned}$$

$$+ C_8 (\|\nabla^{n+1} u\|_2^{2\lambda} (\|\nabla^{n+1} u\|_2 \|\nabla^n u\|_2)^{1-\lambda} \|u\|_{2\sigma}^{\frac{2\sigma}{2\sigma-1}}). \quad (4.36)$$

最后一步我们已用了 Poincaré 不等式在具零平均函数  $\nabla^n u$  的  $L^2$  模上, 这是为了吸收附加的低阶项到主要项来. Gagliardo-Nirenberg 指数  $s_3, s_4$  为

$$s_3 = \frac{1-r}{2\sigma n + \sigma r + 1}, s_4 = \frac{2r\sigma n + 1}{2r\sigma n + r\sigma + 1}.$$

如选取  $\lambda = \frac{1}{r} - 1$ , 由 (4.36) 即得 (4.34).

**推论 4.5** 对一切正整数  $d, \sigma$  和  $n$  有如下不等式

$$\left| \int \nabla^n (u |u|^{2\sigma}) \cdot \nabla^n u^* dx \right| \leq C(n) J_{n+1}^{\frac{n}{n+1}} G_{n+1}^{\frac{1}{n+1}}. \quad (4.37)$$

**证** 由插值不等式和引理 4.3 得

$$\begin{aligned} \left| \int \nabla^n (u |u|^{2\sigma}) \cdot \nabla^n u^* dx \right| &\leq C_9 (\|\nabla^{n+1} u\|_2^{\frac{n}{n+1}} \\ &\cdot \|u\|_{2[\sigma(n+1)+1]}^{\frac{1}{n+1}})^2 \cdot \|u\|_{2[\sigma(n+1)+1]}^{2\sigma} = C_9 J_{n+1}^{\frac{n}{n+1}} G_{n+1}^{\frac{1}{n+1}}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

**推论 4.6** 对一切正整数  $d, \sigma$  和  $n$ , 有

$$\left| \int \nabla^n (u |u|^{2\sigma}) \cdot \nabla^n u^* dx \right| \leq \epsilon J_{n+1} + C(\epsilon) (G_m^s + G_m^{s_0}), \quad (4.39)$$

其中

$$\begin{aligned} s &= \frac{2 + 2\sigma - d\sigma + 2n\sigma}{2 - d\sigma + 2m\sigma}, \quad s_0 = \frac{\sigma(n+1) + 1}{\sigma m + 1}, \\ \frac{\sigma d - 2}{2\sigma} &< m \leq n + 1. \end{aligned} \quad (4.40)$$

**证** 继续插值 (4.38) 的右端

$$J_{n+1}^{\frac{n}{n+1}} G_{n+1}^{\frac{1}{n+1}} \leq C_{10} J_{n+1}^{\frac{n}{n+1}} (J_{n+1}^s G_m^{s_0} + G_m^{s_0})^{\frac{1}{n+1}} \quad (4.41)$$

(由 Young 不等式)

$$\leq \epsilon J_{n+1} + C_{11}(\epsilon) (G_m^{\frac{1}{s_0} + s} G_m^{s_0}) \quad (4.42)$$

$$= \epsilon J_{n+1} + C_{11}(\epsilon) (G_m^s + G_m^{s_0}), \quad (4.43)$$

其中

$$s_5 = \frac{d(1-m+n)\sigma}{2+2n+2m\sigma-dm\sigma+2mn\sigma},$$

$$s_6 = \frac{(1+n)(2+2\sigma-d\sigma+2n\sigma)}{2+2n+2m\sigma-dm\sigma+2mn\sigma}.$$

显然需要  $0 \leq s_5 < 1$ , 由此得到推论中的限制条件.

现估计  $J_n$  和  $G_n$  的长时间界.

**定理 4.7** 对一切  $d$  和  $\sigma > 0$ , 如下先验估计成立:

$$\bar{G}_0 \leq R_{\sigma}^{\frac{1}{\sigma}}. \quad (4.44)$$

**证** 由引理 4.2 中的 (4.23) 或 (4.24) 给出

$$\begin{aligned} \dot{G}_0 &= 2RG_0 - 2G_1 - \alpha J_1 \\ &\leq 2RG_0 - 2G_1 \end{aligned} \quad (4.45)$$

(由 Hölder 不等式  $G_0 \leq \|1\|_{\sigma/(\sigma-1)} G_1^{\frac{1}{\sigma+1}}$ ),

$$\dot{G}_0 \leq 2RG_0 - 2G_0^{\sigma+1}, \quad (4.46)$$

解微分不等式即得 (4.44).

**定理 4.8** 对一切  $d, \mu, \sigma > 0, m > 0$  且满足

$$|1 + i\nu| \leq \frac{\sigma m + 1}{\sigma m}, \quad (4.47)$$

则有估计

$$\bar{G}_m \leq R_{\sigma}^{\frac{1}{\sigma+m}}. \quad (4.48)$$

**证** 由引理 4.2, 对  $G_{m+1}$  运用 Hölder 不等式, 并对最后一项分部积分得

$$\begin{aligned} \frac{\dot{G}_m}{2(\sigma m + 1)} &\leq RG_m - \frac{G_m^{\sigma+1/m}}{G_0^{1/m}} - (\sigma m + 1) \int |u|^{2\sigma m} |\nabla u|^2 dx \\ &\quad - \sigma m \operatorname{Re} \left[ (1 + i\nu) \int |u|^{2(\sigma m - 1)} u^{*2} \nabla u \cdot \nabla u dx \right] \\ &\leq RG_m - \frac{G_m^{\sigma+1/m}}{G_0^{1/m}} - [(\sigma m + 1) - \sigma m |1 + i\nu|] \int |u|^{2\sigma m} |\nabla u|^2 dx. \end{aligned} \quad (4.49)$$

因此,如  $\sigma m + 1 + i\nu \leq \sigma m + 1$ , 则上式右端最后一项非正. 可以忽略, 再注意到  $\overline{G}_0 \leq R_\sigma^{\frac{1}{\sigma}}$ , 由微分不等式 (4.49) 即得 (4.48).

**引理 4.9** 对  $\sigma \geq 0$  有如下不等式

$$\operatorname{Re} \left[ \int |u|^{2\sigma} u^* \Delta u dx \right] \leq - \frac{\sqrt{2\sigma+1}}{\sigma+1} \left| \int |u|^{2\sigma} u^* \Delta u dx \right|, \quad (4.50)$$

$$\left| \operatorname{Im} \left[ \int |u|^{2\sigma} u^* \Delta u dx \right] \right| \leq \frac{\sigma}{\sigma+1} \left| \int |u|^{2\sigma} u^* \Delta u dx \right|, \quad (4.51)$$

$$-J_2 - \alpha^2 G_2 \leq -2\alpha \left| \int |u|^{2\sigma} u^* \Delta u dx \right|. \quad (4.52)$$

**证** 分部积分得等式

$$\begin{aligned} \int |u|^{2\sigma} u^* \Delta u dx &= -\sigma \int \nabla u \cdot \nabla |u|^{2\sigma-2} u^* dx \\ &\quad - (\sigma+1) \int |\nabla u|^2 |u|^{2\sigma} dx. \end{aligned}$$

注意到  $|\nabla u \cdot \nabla u| \leq |\nabla u|^2$ . 考虑结构

$$z = \sigma \lambda r e^{i\theta} - (\sigma+1)r, \quad (4.53)$$

其中  $r$  为正实数,  $0 \leq \lambda \leq 1$ , 则有

$$\operatorname{Re} z = \sigma \lambda r \cos \theta - (\sigma+1)r, \quad (4.54)$$

$$|z|^2 = \sigma^2 \lambda^2 r^2 + (\sigma+1)^2 r^2 - 2\sigma(\sigma+1)\lambda r^2 \cos \theta. \quad (4.55)$$

联合这两个方程得

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z &= - \frac{|z|^2 + [\sigma^2(1-\lambda^2) + 2\sigma + 1]r^2}{2(\sigma+1)r} \\ &\leq - \frac{|z|^2 + (2\sigma+1)r^2}{2(\sigma+1)r}. \end{aligned}$$

对于最优的  $r$  即得 (4.50), 由等式

$$|z|^2 = |\operatorname{Re} z|^2 + |\operatorname{Im} z|^2,$$

即得 (4.51). 最后, (4.52) 易从表达式的右端应用 Cauchy-Schwarz 不等式和 Young 不等式得到.

**定理 4.10** 对一切  $d, \sigma > 0$  且满足

$$-\frac{1+\mu\nu}{|\mu-\nu|} < \frac{\sqrt{2\sigma+1}}{\sigma}, \quad (4.56)$$

则如下估计成立

$$\bar{F}_1 \leq C(\mu, \nu) R^{1+\frac{1}{\sigma}}. \quad (4.57)$$

证 由引理 4.2 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{F}_1 &= R(J_1 + \alpha^2 G_1) - J_2 - \alpha^2 G_2 + (1 + \alpha^2) \\ &\quad \cdot \operatorname{Re} \left[ \int |u|^{2\sigma} u^* \Delta u dx \right] + (\mu - \alpha^2 \nu) \operatorname{Im} \left[ \int |u|^{2\sigma} u^* \Delta u dx \right] \\ &\quad (\text{由引理 4.9, } k \in [0, 1]) \\ &\leq R(J_1 + \alpha^2 G_1) - (1 - k)(J_2 + \alpha^2 G_2) \\ &\quad - \left[ 2k\alpha + (1 + \alpha^2) \frac{\sqrt{2\sigma+1}}{\sigma+1} \right. \\ &\quad \left. - |\mu - \alpha^2 \nu| \frac{\sigma}{\sigma+1} \right] \left| \int |u|^{2\sigma} u^* \Delta u dx \right|. \quad (4.58) \end{aligned}$$

上式右端最后一项的系数, 可选取  $\alpha$  使之非负, 因而可以忽略. 事实上, 可设  $\mu\nu > 0$ , 否则  $\mu\nu < 0$ . 可设  $\mu > 0, \nu > 0$  及极限情况  $k = 1$ , 条件为

$$2\alpha + (1 + \alpha^2) \frac{\sqrt{2\sigma+1}}{\sigma+1} - (\mu - \alpha^2 \nu) \frac{\sigma}{\sigma+1} > 0. \quad (4.59)$$

最优的  $\alpha$  即为 (4.56), 现不等式 (4.58) 归结为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{F}_1 &\leq (\sigma + 1) R F_1 - (1 - k)(J_2 + \alpha^2 G_2) \\ &\quad (\text{对最后一项进行插值}) \\ &\leq (\sigma + 1) R F_1 - (1 - k) C \frac{F_1^2}{G_0}. \quad (4.60) \end{aligned}$$

容易求解得到 (4.57).

**定理 4.11** 对复 GL 方程,  $\sigma, d$  和  $n$  为正整数, 对一切  $m \geq 0$ ,  $r \geq 0$ , 且满足

$$\frac{\sigma d - 2}{2\sigma} < m \leq n + 1, \quad (4.61)$$

则有估计

$$\bar{J}_n \leq C(n, \mu) \bar{J}_r^{\frac{1}{2}} \bar{G}_m^{\frac{1}{2}} + \text{低价项}, \quad (4.62)$$

其中

$$r_1 = \frac{1}{1+n-r}, r_2 = \frac{(2+2\sigma-\sigma d+2n\sigma)(n-r)}{(2-d\sigma+2m\sigma)(1+n-r)}.$$

证 对(4.24)非线性项由推论4.6进行控制,对Laplace项作插值估计

$$J_n \leq J_{n+1}^{\frac{n+1}{n+1-r}} J_r^{\frac{1}{n+1-r}} \quad (4.63)$$

可得

$$J_n \leq 2RJ_n + C_3(n, \mu)(G_m^s + G_m^{(0)}) - \frac{J_n^{\frac{n+1-r}{n+1-r}}}{J_r^{\frac{1}{n+1-r}}}. \quad (4.64)$$

解这个微分不等式即得(4.62), (4.61) 来自推论4.6.

这个定理可应用如下:在定理4.10成立的区域,如  $d < 2 + \frac{2}{\sigma}$ , 可取  $r = m = 1$ , 如  $-\frac{1+\mu\nu}{|\mu-\nu|} < \frac{\sqrt{2\sigma+1}}{\sigma}$  成立, 得

$$\bar{J}_n \leq CR^{\frac{(1+\sigma)(2-\frac{d\sigma+2n\sigma}{\sigma(2+2\sigma-d\sigma)})}{\sigma(2+2\sigma-d\sigma)}}. \quad (4.65)$$

当定理4.10失效,可取  $r = 0$ , 利用定理4.8中  $G_m$  的上界,可得

$$\bar{J}_n \leq CR^{\frac{-\sigma d + (1+m\sigma)[2+2n^2\sigma + n(2+2\sigma-\sigma d)]}{(1+n)\sigma(2-d\sigma+2m\sigma)}}, \quad (4.66)$$

其中

$$|1 + i\nu| \leq \frac{\sigma m + 1}{\sigma m}. \quad (4.67)$$

现考虑时间平均.

**引理 4.12** 表述了某些量的时间平均永远囿于相应的时间渐近的上界, 因此

$$\langle J_0 \rangle \leq \bar{J}_0 \leq R^{\frac{1}{\sigma}}. \quad (4.68)$$

由时间平均方程(4.45)得

$$\langle G_1 + J_1 \rangle = \langle RG_0 - \frac{1}{2}G_0 \rangle. \quad (4.69)$$

利用引理4.12有

$$\langle J_1 \rangle \leq R \langle G_0 \rangle \leq R^{1+\frac{1}{\sigma}},$$

$$\langle G_1 \rangle \leq R \langle G_0 \rangle \leq R^{1+\frac{1}{\sigma}}. \quad (4.70)$$

当  $n > 1$  时, 没有适当的方法计算时间平均. 虽然不存在最优方法, 但可用插值不等式得到时间平均估计

$$\langle J_n \rangle \leq \langle J_s \rangle^{\frac{n-1}{s-1}} \langle J_1 \rangle^{\frac{s-n}{s-1}} \quad (4.71)$$

$$\leq J_s^{\frac{n-1}{s-1}} \langle J_1 \rangle^{\frac{s-n}{s-1}}, \quad (4.72)$$

$G_n$  的时间平均 ( $n > 1$ ) 可类似得到.

最后, 考虑动力长度.

设  $f(x)$  为  $[0, 1]^d$  上的充分光滑周期函数,  $k$  为正数, 作 F 氏展开.

$$f(x) = \sum_{h \in 2\pi\mathbb{Z}^d} \hat{f}_h e^{ihx} = \left( \sum_{|h| \leq k} + \sum_{|h| > k} \right) \hat{f}_h e^{ihx}, \quad (4.73)$$

这里  $\|h\| \equiv (h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_d^2)^{1/2}$ , 则对  $s > \frac{d}{2}$ , 可估计  $\|f\|_\infty$ , 即有

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &\leq \sum_{|h| \leq k} |\hat{f}_h| + \sum_{|h| > k} \|h\|^{-s} \|h\|^s |\hat{f}_h| \\ &\quad (\text{由 Cauchy - Schwarz 不等式}) \\ &\leq \left( \sum_{|h| \leq k} 1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{h \in 2\pi\mathbb{Z}^d} |\hat{f}_h|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left( \sum_{|h| > k} \|h\|^{-2s} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{h \in 2\pi\mathbb{Z}^d} \|h\|^{2s} |\hat{f}_h|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.74)$$

不等式右端的第一, 第三项能用和的积分近似估计, 有

$$\|f\|_\infty \leq C_1 k^{\frac{d}{2}} \|f\|_2 + C_2 k^{\frac{d}{2}-s} \|\nabla^s f\|_2. \quad (4.75)$$

当取

$$k^s = C_3 \frac{\|\nabla^s f\|_2}{\|f\|_2}, \quad (4.76)$$

则(4.75)中二项相等, 由此导出 Agmon 不等式, 这里可把  $k$  考虑为动力截断波数, 取  $f = \nabla^r u$ ,  $n = s + r$ , 导致

$$N^{-d}(t) \sim k_{n,r}(t) = \left( \frac{J_n}{J_r} \right)^{\frac{1}{2(n-r)}}. \quad (4.77)$$

我们希望:

(i)  $l^{-1} \sim k_{n,r}(t)$  当  $t \rightarrow \infty$  时保持有界;

(ii) 这个界在定性上是与  $n, r$  无关的.

令

$$j_n = J_n + \beta 2^n R^{\frac{n+1}{\sigma}}, \quad (4.78)$$

$$x_{n,r} = \left( \frac{j_n}{j_r} \right)^{\frac{1}{2(n-r)}}. \quad (4.79)$$

我们先估计  $x_{n,r}^2$  的时间平均, 再叙述相应的时间渐近的界, 由引理 4.2 和推论 4.4 可得

$$\begin{aligned} j_n &\leq 2Rj_n + C_1 J_n G_m^s - J_{n+1} \\ &\leq 2Rj_n + C_1 j_n G_m^s - j_{n+1} \\ &\leq 2Rj_n + C_1 j_n G_m^s - j_n \left( \frac{j_n}{j_r} \right)^{\frac{1}{n-r}}. \end{aligned} \quad (4.80)$$

除以  $j_n$ , 再取时间平均得.

$$\left\langle \frac{j_n}{j_r} + x_{n,r}^2 \right\rangle \leq 2R + C_1 \langle G_m^s \rangle. \quad (4.81)$$

由引理 4.1 和  $j_n$  具有下界可得

$$\langle x_{n,r}^2 \rangle \leq C_1 \langle G_m^s \rangle. \quad (4.82)$$

固定  $m = 1$ , 对于亚临界和临界情况有估计

$$\begin{aligned} \langle x_{n,r}^2 \rangle &\leq C_1 \langle G_1^{1+\frac{\alpha d-2}{2+2\sigma-\alpha d}} \rangle \\ &\leq C_1 \langle G_1 \rangle^{1+\frac{\alpha d-2}{2+2\sigma-\alpha d}} \\ &\leq C_2 R^{\frac{2(1+\sigma)}{2+2\sigma-\alpha d}}. \end{aligned} \quad (4.83)$$

对于超临界情况, 固定  $s = 1$ , 有

$$\langle x_{n,r}^2 \rangle \leq C_1 \langle G_1 + \frac{\alpha d-2}{2\sigma} \rangle. \quad (4.84)$$

对于临界情况,  $d\sigma = 2$ , 此时从 (4.83), (4.84) 有

$$\langle x_{n,r}^2 \rangle \leq C_1 \langle G_1 \rangle \leq C_3 R^{1+\frac{1}{\sigma}}. \quad (4.85)$$

注意到所有常数均与  $\beta$  无关, 因此可选取  $\beta > 0$  充分小, 可得时间



渐近的界

$$\bar{\chi}_{n,r}^2 \leq \left( \frac{\bar{y}_n}{\beta 2^r R^{r+\frac{1}{\sigma}}} \right)^{\frac{1}{n-r}}, \quad (4.86)$$

对  $n$  充分大, 由 (4.65) (4.66) 给出的关于  $J_n$  的界可得

$$\bar{\chi}_{n,r}^2 \sim \begin{cases} \frac{C_5}{\beta} R^{\frac{2+2\sigma}{2+2\sigma-d\sigma}}, & \text{在非黑暗区域上,} \\ \frac{C_6}{\beta} R^{\frac{2+2m\sigma}{2-d\sigma+2m\sigma}}, & \text{在黑暗区域上.} \end{cases} \quad (4.87)$$

现考虑  $L^\infty$  估计

$$\begin{aligned} \langle \|u\|_\infty^{2\sigma} \rangle &\leq C_1 \langle J_n^{r_1} G_p^{r_2} \rangle \leq C_1 \left\langle \left[ \frac{J_n}{J_p} \right]^{r_1} \mathcal{F}_p^{r_1} G_p^{r_2} \right\rangle \\ &\quad (\text{由 Hölder 不等式}) \\ &\leq C_1 \left\langle \left[ \frac{J_n}{J_p} \right]^{\frac{1}{n-p}} \right\rangle^{r_1(n-p)} \langle (\mathcal{F}_p^{r_1} G_p^{r_2})^{1-\frac{1}{r_1(n-p)}} \rangle^{1+\frac{1}{r_1(n-p)}} \\ &\leq C_1 \langle \chi_{n,p}^2 \rangle^{r_3} \langle \mathcal{F}_p^{r_4} \rangle^{r_5}, \end{aligned} \quad (4.88)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{F}}_n &= J_n + G_n + \beta 2^n R^{n+\frac{1}{\sigma}}, \\ r_1 &= \frac{2d\sigma}{4n - 2dp\sigma + 4np\sigma}, \quad r_2 = \frac{(d-2n)\sigma}{-2n + dp\sigma - 2np\sigma}, \\ r_3 &= \frac{d(n-p)\sigma}{2n - dp\sigma + 2np\sigma}, \quad r_4 = \frac{2\sigma}{2 - d\sigma + 2p\sigma}, \\ r_5 &= \frac{n(-2 + d\sigma - 2p\sigma)}{-2n + dp\sigma - 2np\sigma}. \end{aligned}$$

对亚临界和临界情况  $r_4 < 1$ , 置  $p = 1$ .

$$\begin{aligned} r_3 &= \frac{d(-1+n)\sigma}{2n - d\sigma + 2n\sigma}, \quad r_4 = \frac{2\sigma}{2 + 2\sigma - d\sigma}, \\ r_5 &= \frac{n(-2 - 2\sigma + d\sigma)}{-2n + d\sigma - 2n\sigma}, \end{aligned}$$

因此  $r_3 + r_5 = 1$ , 连同 (4.83) 第一部分估计有

$$\langle \|u\|_\infty^{2\sigma} \rangle \leq C_2 \langle \bar{\chi}_1 \rangle^{1+\frac{d\sigma}{2+2\sigma-d\sigma}}. \quad (4.89)$$

对于临界和超临界情况, 置  $r_4 = 1$ ,

$$r_3 = \frac{d(-2 + 2\sigma + d\sigma - 2n\sigma)}{-2d + 2d\sigma + d^2\sigma - 4n\sigma - 2dn\sigma}, p = \frac{-2 + 2\sigma + d\sigma}{2\sigma},$$

$$r_5 = \frac{4n\sigma}{2d - 2d\sigma - d^2\sigma + 4n\sigma + 2dn\sigma}.$$

因此  $r_3 + r_5 = 1$ , 连同估计(4.84) 有

$$\langle \|u\|_\infty^{2\sigma} \rangle \leq C_3 \langle r_1, \frac{d\sigma}{2}, 2 \rangle. \quad (4.90)$$

为了得到  $L^\infty$  模的时间渐近上界, 我们能用插值,

$$\|u\|_\infty^{2\sigma} \leq C J_n^{r_6} G_m^{r_7} + \text{低阶项}, \quad (4.91)$$

由定理 4.11 对于  $J_n$  的界和定理 4.8 或定理 4.10 关于  $G_m$  的界对充分大的  $n$  仍可得(4.87).

## § 5 一般 Ginzburg-Landau 方程解的水平集的 Hausdorff 测度

我们研究如下的复 GL 方程

$$u_t - (1 + i\nu)\Delta u + (1 + i\mu)|u|^2u - au = 0, \quad (5.1)$$

其中分叉参数  $\nu \in \mathbb{R}$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  和  $a \geq 0$  给定.  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  为未知函数. 考虑周期边界条件在  $\Omega = [0, 1]^2$  上, 即有

$$\begin{aligned} u(x+1, y, t) &= u(x, y+1, t) \\ &= u(x, y, t), x, y \in \mathbb{R}, t \in [0, \infty) \end{aligned} \quad (5.2)$$

和初始条件

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), x, y \in \mathbb{R}, \quad (5.3)$$

这里  $u_0$  为给定的  $\Omega$  周期的、局部平方可积函数.

这一节主要研究 GL 整体吸引子的振荡性质, 即要估计 GL 方程整体吸引子零点集的 Hausdorff 测度. 为此, 要用到基本的几何测度论知识, GL 方程解的 Gevrey 正则化, 强挤压性等.

设  $\Omega = [0, L]^n, L > 0, n \in \mathbb{N}$ . 令

$$L_{\text{per}}^2(\Omega) = \left\{ f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}, \int_{\Omega} f^2 < \infty, f, \Omega \text{ 为周期的} \right\}, \text{ 对任}$$

何  $f \in L_{\text{per}}^2(\Omega)$ , 具有 F 氏展开

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} f_j e^{iqj \cdot x}, x \in \mathbb{R}^n, \quad (5.4)$$

其中  $f_j \in \mathbb{C}$  为 F 氏系数,  $q = 2\pi/L$ , 特别  $f_j = f_j^*, \forall j \in \mathbb{Z}^n$ , 这里“\*”号表示复数共轭. 注意到

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int_{\Omega} f^2 = L^n \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} |f_j|^2,$$

$$|j| = |j_1| + |j_2| + \cdots + |j_n|,$$

$$|j|_2 = (|j_1|^2 + |j_2|^2 + \cdots + |j_n|^2)^{1/2}, j = (j_1, j_2, \cdots, j_n) \in \mathbb{Z}^n.$$

$$\text{定义 } \|f\|_m^2 = L^n \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} |qj|_2^{2m} |f_j|^2, \quad (5.5)$$

对任何  $m \geq 0$ , 定义 Sobolev 空间

$$\begin{aligned} H_{\text{per}}^m(\Omega) &= \{f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} f_j e^{iqj \cdot x} : \|f\|_{H^m}^2 \\ &= \|f\|_m^2 + q^{2m} \|f\|_{L^2}^2 < \infty\}. \end{aligned}$$

容易看到, 如  $m \in \mathbb{N}$ ,  $H_{\text{per}}^m(\Omega)$  是所有这样的函数,  $f \in L_{\text{per}}^2(\Omega)$ , 它的直到  $m$  阶广义导数在  $\Omega$  上为平方可积.

现在来引入 Gevrey 类(实值函数), 它的 F 氏系数指数趋于零, 即令

$$\begin{aligned} \Gamma(r) &= \left\{ f = \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} f_j e^{iqj \cdot x} : \|f\|_{\Gamma(r)}^2 \right. \\ &= \left. L^n \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} e^{2q|j|_2 r} |f_j|^2 < \infty \right\}, r \geq 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

对任何在集  $S$  上的函数  $f$ , 以

$$N(f, S) = \{x \in S : f(x) = 0\}$$

表示零点(节点)集.

**引理 5.1** 设  $f$  为全纯函数在

$$\Pi_{\delta} = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \delta\}, \delta > 0$$

上, 且不是 0 常数函数. 设它满足

$$\sup_{z \in \Pi_{\delta}} |f(z)| \leq M \max_{x \in [0, L]} |f(x)|. \quad (5.7)$$

其中  $M \geq 1, L \geq 0$ , 则

$$\text{Card}[N(f, [0, L])] \leq \alpha_2, \alpha_2 = \alpha_2(\delta, M, L). \quad (5.8)$$

证 设  $x_1, \dots, x_N \in [0, L]$  为  $f$  在  $[0, L]$  上的不同零点, 由 Schwartz 引理和 (5.7) 推出

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \sup_{z \in \prod_{\delta}} |f(z)| \prod_{j=1}^N \left| \tanh \frac{\pi(x-x_j)}{4\delta} \right| \\ &\leq M \left( \tanh \frac{\pi L}{4\delta} \right)^N \max_{y \in [0, L]} |f(y)|, \forall x \in [0, L], \end{aligned}$$

因此

$$M \left( \tanh \frac{\pi L}{4\delta} \right)^N \geq 1,$$

由此得

$$N \leq \frac{\log M}{\log \coth(\pi L/4\delta)} \leq (\log M) e^{\frac{\pi L}{2\delta}} = \alpha_2.$$

上式  $M \geq 1$ , 且  $1/\log \coth x \leq e^{2x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**定理 5.2** 设  $r > 0$ ,  $f \in \Gamma(r)$  且不是零函数, 满足

$$\|f\|_{\Gamma(r)} \leq M \|f\|_{L^2}, \quad (5.9)$$

其中  $M > 0$ , 则存在  $\alpha_1 = \alpha_1(L, M, r, n)$  使得

$$\mathcal{H}^{n-1}(N(f, \Omega)) \leq \alpha_1 = C_1 L^{n-1} (1 + \log M) e^{C_2 L/r}, \quad (5.10)$$

这里  $\mathcal{H}^{n-1}$  表示  $(n-1)$  维 Hausdorff 测度.

在证明该定理之前, 先注意 Agmon 不等式

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^\infty} &= \sup_{x \in \Omega} |f(x)| \leq C_3 (\|f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|f\|_{H^n}^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{n}{2}} \|f\|_{L^2}), \\ f &\in H_{\text{per}}^n(\Omega), \end{aligned} \quad (5.11)$$

由 (5.4), (5.5) 推出

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} \right\|_m^2 &= L^n \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} |qj|^2{}^m |(iqj)^\alpha|_2^2 |f_j|^2 \\ &\leq L^n \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} |qj|_2^{2(m+|\alpha|)} |f_j|^2 \\ &\leq \frac{L^n [2(m+|\alpha|)]!}{(2r)^{2(m+|\alpha|)}} \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} |f_j|^2 e^{2q|j|_2 r} \\ &\leq \frac{L^n (m+|\alpha|)!^2}{r^{2(m+|\alpha|)}} \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} |f_j|^2 e^{2q|j|_2 r}, \end{aligned}$$

$$\forall \alpha \in N_0^n, m \in N_0, f \in H_{\text{loc}}^{m+|\alpha|}(\Omega).$$

因此, (5.6) 有

$$\left\| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} \right\|_m \leq \frac{(m+|\alpha|)!}{r^{m+|\alpha|}} \|f\|_{\Gamma(r)}, \alpha \in N_0^n, \\ m \in N_0, f \in \Gamma(r). \quad (5.12)$$

定理的证明由 (5.11) 和 (5.12) 得

$$\left\| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} \right\|_{L^\infty} \\ \leq C_3 \left( \left\| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} \right\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} \right\|_n^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{n}{2}} \left\| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} \right\|_{L^2} \right) \\ \leq \frac{C_3}{r^{|\alpha|}} \left[ \frac{(|\alpha|!)^{\frac{1}{2}} [(n+|\alpha|)!]^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{n}{2}}} + q^{\frac{n}{2}} |\alpha|! \right] \|f\|_{\Gamma(r)} \\ \leq \frac{C_3 |\alpha|! 2^{(n+|\alpha|)/2}}{r^{|\alpha|}} \left[ \frac{(n!)^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{n}{2}}} + q^{\frac{n}{2}} \right] \|f\|_{\Gamma(r)} \\ \leq \alpha_3 \frac{2^{|\alpha|} |\alpha|!}{r^{|\alpha|}} \|f\|_{\Gamma(r)}, \quad (5.13)$$

其中

$$\alpha_3 = C_3 2^{\frac{n}{2}} \left[ \frac{(n!)^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{n}{2}}} + q^{\frac{n}{2}} \right].$$

类似于下面 (5.14) 的估计, 可知对任何  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , 级数

$$\sum_{\alpha \in N_0^n} \left( \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} \right) (x - x_0)^\alpha \text{ 收敛, 在任何 } x \in \mathbb{R}^n, \text{ 且 } |x - x_0| < \frac{r}{2n}.$$

这就表明函数  $f$ , 除了一个零测度集外, 在每点是实解析的, 每点的解析半径至少为  $\frac{r}{2n}$ . 我们能在

$$\Pi_\delta^n = \{z = (z_1, z_2, \dots, z_n): |\operatorname{Im} z_j| < \delta, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}\}$$

上延拓  $f$  为全纯函数  $\tilde{f}$ . 其中  $\delta = \frac{r}{4n}$ . 由 (5.9), (5.13), 对  $z \in$

$\Pi_\delta^n$  有

$$\begin{aligned}
|f(z)| &\leq \sum_{\alpha \in N_0^n} \left| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(\operatorname{Re} z) \right| \frac{\delta^\alpha}{\alpha!} \\
&\leq M\alpha_3 \|f\|_{L^2} \sum_{\alpha \in N_0^n} \frac{2^{|\alpha|} |\alpha|! \delta^\alpha}{r^\alpha \alpha!} \\
&\leq ML^{\frac{n}{2}} \alpha_3 \|f\|_{L^\infty} \sum_{\alpha \in N_0^n} \frac{\alpha!}{(2n)^\alpha \alpha!} \\
&= ML^{\frac{n}{2}} \alpha_3 \|f\|_{L^\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)^k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{\alpha!}{\alpha!} \\
&= ML^{\frac{n}{2}} \alpha_3 \|f\|_{L^\infty} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = \alpha_4 \|f\|_{L^\infty}, \tag{5.14}
\end{aligned}$$

其中  $\alpha_4 = 2ML^{\frac{n}{2}}\alpha_3$ ,  $N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ . 注意到如  $n = 1$ , 引理 5.1 给出我们的断言, 如  $n > 1$ , 我们首先寻求  $x_0 \in \Omega$  使得

$$|\tilde{f}(x_0)| \geq \frac{1}{\alpha_4} \sup_{z \in \Pi_\delta^n} |f(z)|. \tag{5.15}$$

利用简单的平移, 能设  $x_0 = 0$ , 由  $[F, 3; 4.10]$  可知, 存在奇性集  $S \subseteq \Omega$ , 具有  $\mathcal{H}^{n-1}(S) = 0$  使得  $N(f, \Omega) \setminus S$  是可数的  $(n-1)$  维解析流形且具有测度

$$\mathcal{H}^{n-1}[N(f, \Omega)] = \mathcal{H}^{n-1}(N(f, \Omega) \setminus S) < \infty$$

集合的并集, 令  $x_1 = (-L, 0, 0, 0, \dots, 0)$ ,  $x_2 = (-L, L, 0, 0, \dots, 0)$ ,  $x_3 = (-L, 0, L, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $x_n = (-L, 0, 0, \dots, L)$ . 对  $j = 1, 2, \dots, n$  和  $w \in S^{n-1}$ ,  $l_j(w)$  表示通过  $x_j$  具方向  $w$  的直线和流形  $N(f, \Omega) \setminus S$  的交点数目. 简单的几何运算可得

$$\mathcal{H}^{n-1}(N(f, \Omega)) \leq C_4 L^{n-1} \sum_j \int_{S^{n-1}} l_j(w) dw, \tag{5.16}$$

其中  $C_4$  仅依赖于  $n$ . 对固定的  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  和  $w \in S^{n-1}$ , 估计  $l_j(w)$ , 我们仅需考虑  $w \in S^{n-1}$ , 对它  $l_j(w) < \infty$ . 事实上, 考虑函数  $g_j: \Omega \rightarrow S^{n-1}$  定义为

$$g_j(x) = \frac{x - x_j}{|x - x_j|}, \quad x \in \Omega,$$

则由[F, 2, 10.11]可得

$$\int_{S^{n-1}} l_j(\nu) d\nu \leq (\text{Lip } g_j)^{n-1} \mathcal{H}^{n-1}(N(f, \Omega)) < \infty,$$

这里  $\text{Lip } g_j$  为  $g_j$  的 Lip 常数, 这就表明  $l_j(\nu) < \infty$ , 对于几乎处处  $\nu \in S^{n-1}$  成立. 因此可设

$$\phi(t) = \tilde{f}(x_j + tw), \quad t \in \Pi_\delta$$

不是零函数, 由(5.15)得

$$\begin{aligned} |\phi(0)| &= |f(x_j)| = |f(0)| \geq \frac{1}{\alpha_4} \sup_{z \in \Pi_\delta^n} |f(z)| \\ &\geq \frac{1}{\alpha_4} \sup_{t \in \Pi_\delta} |\phi(t)|. \end{aligned}$$

由引理 5.1 推出

$$l_j(w) \leq \alpha_2(\delta, \alpha_4, L \sqrt{n+3}),$$

这里  $\max_{x \in \Omega} \text{dist}(x, \Omega) = L \sqrt{n+3}$ . 联系(5.16) 最后得

$$\mathcal{H}^{n-1}(N(f, \Omega)) \leq C_5 L^{n-1} \alpha_2(\delta, \alpha_4, L \sqrt{n+3}).$$

定理证毕.

为了研究 GL 整体吸引子零点集的测度, 我们引用一些有关 GL 方程整体吸引子, Gevrey 正则性以及挤压性的已知结果.

设  $\Omega = [0, 1]^2$ ,  $H$  为复值, 具  $\Omega$  周期函数, 且平方可积的函数空间. 对任何  $f \in H$ , 它的 F 氏展开为

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} f_j e^{i2\pi j x}, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (5.17)$$

其中  $f_j \in \mathbb{C} (j \in \mathbb{Z}^2)$ .  $H$  为 Hilbert 空间, 具内积和模

$$(f, g) = \text{Re} \int_{\Omega} f \bar{g}, \quad f, g \in H,$$

$$\|f\|_{L^2} = (f, f)^{\frac{1}{2}}, \quad f \in H.$$

若  $f$  如(5.17), 则  $\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} |f_j|^2$ . 令

$$A^s f = \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} (|2\pi j|_2^2 + 1)^s f_j e^{i2\pi j x}, \quad s \geq 0,$$

$\|j\|_2^2 = (j^{(1)})^2 + (j^{(2)})^2, \forall j = (j^{(1)}, j^{(2)}) \in \mathbb{Z}^2$ , 对一切  $s \geq 0$ ,  $A^s$  是正定闭算子具有定义区域

$$\begin{aligned} D(A^s) &= \{g = \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} g_j e^{2\pi i j \cdot} \in H : |A^s g|^2 \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} |g_j|^2 (|2\pi j|_2^2 + 1)^{2s} < \infty\}. \end{aligned}$$

注意到  $A_j = -\Delta f + f, f \in D(A)$ , 即有

$$\|A^{\frac{1}{2}} f\|_{L^2} \geq \|f\|_{L^\infty}, f \in D(A^{\frac{1}{2}}).$$

设  $u' = u_t, B(u_1, u_2, u_3) = u_1 u_2 u_3^*$ , 能写 GL 方程具形式

$$u' + (1 + i\nu)Au + (1 + i\mu)B(u, u, u) - (a + 1 + i\nu)u = 0. \quad (5.18)$$

关于非线性项  $B$  具有不等式

$$|(B(u_1, u_2, u_3), u_4)| \leq \|u_1\|_{L^2} \|u_2\|_{L^\infty} \|u_3\|_{L^\infty} \|u_4\|_{L^2}, \quad (5.19)$$

$$|(B(u_1, u_2, u_3), u_4)| \leq \|u_1\|_{L^\infty} \|u_2\|_{L^\infty} \|u_3\|_{L^2} \|u_4\|_{L^2}$$

和

$$|(B(u_1, u_2, u_3), u_4)| \leq C_6 \prod_{j=1}^4 \|u_j\|_{\frac{1}{L^2}} \|A^{\frac{1}{2}} u_j\|_{\frac{1}{L^2}}, \quad (5.20)$$

对一切出现于右端的  $u_1, u_2, u_3, u_4$  的模均为有限.

已知[12]对任何  $u_0 \in H$ , 存在(5.18)的解  $u(t) = S(t)u_0 (t \geq 0)$ ,  $u(0) = u_0$ , 解算子  $S$  具有性质:

- (i)  $S(t)H \subseteq H, \forall t \geq 0, S(t): H \rightarrow H$  是单射和连续的;
- (ii)  $S(t+s)u_0 = S(t)S(s)u_0, \forall s, t \geq 0, u_0 \in H$ ;
- (iii) 存在常数  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  和  $t_1$  仅依赖于  $\nu, \mu$  和  $a$  使得

$$\|S(t)u_0\|_{L^2} \leq \rho_1, u_0 \in H, t \geq t_1,$$

$$\|A^{\frac{1}{2}} S(t)u_0\|_{L^2} \leq \rho_2, u_0 \in H, t \geq t_1,$$

$$\|S(t)u_0\|_{L^\infty} \leq \rho_3, u_0 \in H, t \geq t_1.$$

令  $B_{\rho_1} = \{u_0 \in H : \|u_0\|_{L^2} \leq \rho_1\}$ , 整体吸引子  $\mathcal{A}$  为  $\mathcal{A} =$



$$\bigcap_{t \geq 0} S(t) B_{\rho_1}.$$

整体吸引子具有性质:

(a)  $\mathcal{A}$  是  $D(A^{\frac{1}{2}})$  的非空的紧子集;

(b)  $S(t), \forall t \geq 0$ ;

(c)  $\|u_0\|_{L^2} \leq \rho_1, u_0 \in \mathcal{A}$ ;

(d)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{\|u_0\|_{L^2} \leq M} \inf_{v_0 \in \mathcal{A}} \|S(t)u_0 - v_0\|_{L^2} = 0, \forall M > 0$ .

引入算子

$$e^{rA^{\frac{1}{2}}} f = \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} f_j e^{(2\pi j l_2^2 + 1)^{\frac{1}{2}} r} e^{2\pi i j \cdot x}, r \geq 0,$$

对一切  $f = \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} f_j e^{2\pi i j \cdot x} \in D(e^{rA^{\frac{1}{2}}})$

$$= \{g = \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} g_j e^{2\pi i j \cdot x} : \|g\|_{G(r)} = \|e^{rA^{\frac{1}{2}}} g\|_{L^2}^2$$

$$= \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} |g_j|^2 e^{2(2\pi j l_2^2 + 1)^{\frac{1}{2}} r} < \infty\}.$$

集合  $D(e^{rA^{\frac{1}{2}}})$  称为复值函数具参数  $r$  的 Gevrey 类, 它是一个 Hilbert 空间, 具有内积

$$(f, g)_{G(r)} = (e^{rA^{\frac{1}{2}}} f, e^{rA^{\frac{1}{2}}} g), f, g \in D(e^{rA^{\frac{1}{2}}}).$$

**命题 5.3** 存在常数  $t_2 = t_2(\nu, \mu, a)$  和  $a_5 = a_5(\nu, \mu, a)$  使得以下是正确的: 如  $\|A^{\frac{1}{2}} S(t) u_0\|_{L^2} \leq \rho_2, \forall t \geq 0$ , 则

$$\|A^{\frac{1}{2}} u(t)\|_{G(a_5 t/t_2)} \leq 2\rho_2, \quad 0 \leq t \leq t_2,$$

$$\|A^{\frac{1}{2}} u(t)\|_{G(a_5)} \leq 2\rho_2, \quad t \geq t_2.$$

**命题 5.4** 存在  $a_6 = a_6(\nu, \mu, a), a_7 = a_7(\nu, \mu, a) > 0$  使得以下是正确的: 对任何两个解  $u_1$  和  $u_2$  满足

$$\|A^{\frac{1}{2}} u_j(t)\|_{L^2} \leq \rho_2, \quad t \geq 0, \quad j = 1, 2,$$

则存在惟一的  $t_3 = t_3(\nu, \mu, a, u_1, u_2) \in [0, \infty)$  使得

$$\|A^{\frac{1}{2}}(u_1(t) - u_2(t))\|_{L^2} > \alpha_6 \|u_1(t) - u_2(t)\|_{L^2}, \\ t \in [0, t_3),$$

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_{L^2} \leq \|u_1(0) - u_2(0)\|_{L^2}^{e^{-\gamma' t}}, \\ t \in [0, t_3),$$

而

$$\|A^{\frac{1}{2}}(u_1(t) - u_2(t))\|_{L^2} \leq \alpha_6 \|u_1(t) - u_2(t)\|_{L^2}, \\ t \in [t_3, \infty).$$

现研究两个解的差的 Gevrey 类性质. 令  $u_k \in D(e^{rA^{\frac{1}{2}}})$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ ,  $r > 0$ :

$$u_k = \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} u_{k,j} e^{2\pi i j \cdot x}.$$

令

$$\tilde{u}_k = \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} \tilde{u}_{k,j} e^{2\pi i j \cdot x} = \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} |u_{k,j}| e^{(|2\pi j|_2^2 + 1)^{1/2}} e^{2\pi i j \cdot x},$$

$$\|A^s u\|_{G(r)} = \|A^s \tilde{u}_k\|_{L^2}, s \geq 0, k \in \{1, 2, 3, 4\}. \quad (5.21)$$

**引理 5.5** 我们有

$$\|(B(u_1, u_2, u_3), u_4)_{G(r)}\| \leq (B(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3), \tilde{u}_4).$$

**证** 设  $\phi(j) = (|2\pi j|_2^2 + 1)^{1/2}$ ,  $\forall j \in \mathbb{Z}^2$ , 我们有

$$\begin{aligned} & \|(B(u_1, u_2, u_3), u_4)_{G(r)}\| \\ &= \left| \operatorname{Re} \sum_{j, k, m \in \mathbb{Z}^2} u_{1,j} u_{2,j} u_{3,j}^* u_{4,j+k-m}^* e^{2\phi(j+k-m)} \right| \\ &\leq \sum_{j, k, m \in \mathbb{Z}^2} |u_{1,j}| |u_{2,j}| |u_{3,j}^*| |u_{4,j+k-m}^*| e^{2\phi(j+k-m)} \\ &= \sum_{j, k, m \in \mathbb{Z}^2} \tilde{u}_{1,j} \tilde{u}_{2,j} \tilde{u}_{3,j} \tilde{u}_{4,j+k-m} e^{\phi(j+k-m) - \phi(j) - \phi(k) - \phi(m)} \\ &\leq \sum_{j, k, m \in \mathbb{Z}^2} \tilde{u}_{1,j} \tilde{u}_{2,j} \tilde{u}_{3,j} \tilde{u}_{4,j+k-m} \\ &= (B(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3), \tilde{u}_4). \end{aligned}$$

上面最后不等式成立, 是因为  $\phi$  是偶函数, 且

$$\phi(j+k) = \phi(j) + \phi(k), j, k \in \mathbb{Z}^2.$$

由引理 5.5, (5.21) 和 (5.20) 推出

$$|(B(u_1, u_2, u_3), u_4)_{G(r)}| \leq C_6 \prod_{j=1}^4 \|u_j\|_{G(r)}^{\frac{1}{2}} \|A^{\frac{1}{2}} u_j\|_{G(r)}^{\frac{1}{2}}, \quad (5.22)$$

其中  $u_1, u_2, u_3, u_4 \in D(A^{\frac{1}{2}} e^{rA^{\frac{1}{2}}})$ .

**引理 5.6** 设  $u_1$  和  $u_2$  为两个解且满足

$$\|A^{\frac{1}{2}} u_j(t)\|_{G(a_3)} \leq 2\rho_2, \quad t \geq 0, \quad j = 1, 2, \quad (5.23)$$

$$\|u_j(t)\|_{L^\infty} \leq \rho_3, \quad t \geq 0, \quad j = 1, 2, \quad (5.24)$$

则存在常数  $\alpha_8 = \alpha_8(\nu, \mu, a)$  和  $t_4 = t_4(\nu, \mu, a)$  使得, 如

$$\|A^{\frac{1}{2}}(u_1(t) - u_2(t))\|_{L^2} \leq \alpha_6 \|u_1(t) - u_2(t)\|_{L^2}, \quad t \geq 0, \quad (5.25)$$

则有

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_{G(a_3)} \leq \alpha_8 \|u_1(t) - u_2(t)\|_{L^2}, \quad t \geq t_4. \quad (5.26)$$

**证** 令  $v = u_1 - u_2$ , 注意到

$$\begin{aligned} & v' + (1 + i\nu)Av + (1 + i\mu)(B(u_1, u_2, v) \\ & + B(v, u_1 + u_2, u_2)) - (a + 1 + i\nu)v = 0, \end{aligned} \quad (5.27)$$

固定任何  $\alpha > 0$ , 令  $\phi(t) = (v, v)_{G(at)}$ , 则如  $0 < at < \alpha_5$ , 我们有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \phi'(t) &= (v', v)_{G(at)} + \alpha (A^{\frac{1}{2}} v, v)_{G(at)} = - (Av, v)_{G(at)} \\ &\quad - ((1 + i\mu)B(u_1, u_1, v), v)_{G(at)} - ((1 + i\mu) \\ &\quad B(v, u_1 + u_2, u_2), v)_{G(at)} + (a + 1) \|v\|_{G(at)}^2 \\ &\quad + \alpha \|A^{\frac{1}{4}} v\|_{G(at)}^2, \end{aligned}$$

其中  $(ivv, v)_{G(at)} = (ivAv, v)_{G(at)} = 0$ . 由 (5.22)

$$\frac{1}{2} \phi'(t) + \|A^{\frac{1}{2}} v\|_{G(at)}^2 \leq C_6 (1 + \mu^2)^{1/2} \|u_1\|_{G(at)}$$

$$\|A^{\frac{1}{2}} u_1\|_{G(at)} \|v\|_{G(at)} \|A^{\frac{1}{2}} v\|_{G(at)} + C_6 (1 + \mu^2)^{\frac{1}{2}} \|u_1\|_{G(at)}$$

$$\begin{aligned}
& + u_2 \| \frac{1}{2} \|_{G(at)} \| A^{\frac{1}{2}}(u_1 + u_2) \|_{G(at)}^{\frac{1}{2}} \times \| u_2 \|_{G(at)}^{\frac{1}{2}} \\
& \| A^{\frac{1}{2}} u_2 \|_{G(at)}^{\frac{1}{2}} \| v \|_{G(at)} \| A^{\frac{1}{2}} v \|_{G(at)} + (a+1) \| v \|_{G(at)}^2 \\
& + \alpha \| v \|_{G(at)} \| A^{\frac{1}{2}} v \|_{G(at)} \leq C_6^2(1+\mu^2) \| u_1 \|_{G(at)}^2 \\
& \| A^{\frac{1}{2}} u \|_{G(at)}^2 \| u \|_{G(at)}^2 + \frac{1}{4} \| A^{\frac{1}{2}} v \|_{G(at)}^2 + C_6^2(1+\mu^2) \| u_1 \\
& + u_2 \|_{G(at)} \| A^{\frac{1}{2}}(u_1 + u_2) \|_{G(at)} \times \| u_2 \|_{G(at)} \\
& \| A^{\frac{1}{2}} u_2 \|_{G(at)} \| v \|_{G(at)}^2 + \frac{1}{4} \| A^{\frac{1}{2}} v \|_{G(at)}^2 + (a+1) \\
& \| v \|_{G(at)}^2 + \frac{\alpha^2}{2} \| v \|_{G(at)}^2 + \frac{1}{2} \| A^{\frac{1}{2}} v \|_{G(at)}^2, \\
& 0 < at < \alpha_5.
\end{aligned}$$

因此(5.23)推出

$$\phi'(t) \leq (\alpha_9 + \alpha^2)\phi(t), t \in [0, \frac{\alpha_5}{\alpha}],$$

其中  $\alpha_9 = C_7(1+\mu^2)\rho_2^4 + 2a + 2$ , 于是

$$\| v(t) \|_{G(at)}^2 \leq e^{(\alpha_9 + \alpha^2)t} \| v(0) \|_{L^2}^2, t \in [0, \frac{\alpha_5}{\alpha}].$$

选取  $\alpha = \frac{1}{\alpha_9}, t = \alpha_5/\sqrt{\alpha_9}$ , 可得

$$\| v(t_4) \|_{G(\alpha_5)} \leq e^{\alpha_5 \alpha_9^{\frac{1}{2}}} \| v(0) \|_{L^2},$$

其中  $t_4 = \alpha_5/\sqrt{\alpha_9}$ , 对时间平移一下, 有

$$\| v(t + t_4) \|_{G(\alpha_5)} \leq e^{\alpha_5 \alpha_9^{\frac{1}{2}}} \| v(t) \|_{L^2}, t \geq 0. \quad (5.28)$$

另一方面, 作(5.27)和  $v$  的内积, 利用(5.19)得

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| v \|_{L^2}^2 = - \| A^{\frac{1}{2}} v \|_{L^2}^2 - ((1+i\mu)B(u_1, u_2, v), v) \\
& - ((1+i\mu)B(v, u_1 + u_2, u_2), v) + (a+1) \| v \|_{L^2}^2 \\
& \geq -\alpha_6^2 \| v \|_{L^2}^2 - (1+\mu^2)^{1/2} \| u_1 \|_{L^\infty}^2 \| v \|_{L^2}^2 \\
& - (1+\mu^2)^{1/2} \| u_1 \|_{L^\infty} \| u_1 + u_2 \|_{L^\infty} \| v \|_{L^2}^2 \\
& + (a+1) \| v \|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq -[\alpha_6^2 + 3\rho_3^2(1 + \mu^2)^{1/2} - (a + 1)] \|v\|_{L^2}^2 \\ &= -\alpha_{10} \|v\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

连同(5.28)得

$$\begin{aligned} \|v(t + t_4)\|_{G(a_3)} &\leq e^{\alpha_5 \alpha_6^{\frac{1}{2}}} \|v(t)\|_{L^2} \\ &\leq e^{\alpha_5 \alpha_6^{\frac{1}{2}} + \alpha_{10} t_4} \|v(t + t_4)\|_{L^2}, t \geq 0, \end{aligned}$$

置  $\alpha_8 = e^{\alpha_5 \alpha_6^{\frac{1}{2}} + \alpha_{10} t_4}$ , 即得引理的结论.

**定理 5.7** 设  $u_1^0, u_2^0 \in \mathcal{A}$ , 则有

$$\|u_1^0 - u_2^0\|_{G(a_3)} \leq \alpha_8 \|u_1^0 - u_2^0\|_{L^2}.$$

**证** 设  $u_1, u_2$  为 GL 方程分别具  $u_1(0) = u_1^0$  和  $u_2(0) = u_2^0$  的两个解. 因  $u_1^0, u_2^0 \in \mathcal{A}$ , 我们设  $u_1, u_2$  也对  $t < 0$  有定义. 由解算子  $S(t)$  的性质 (iii) 可得  $\|u_j(t)\|_{L^2} \leq \rho_1, \|A^{\frac{1}{2}} u_j(t)\|_{L^2} \leq \rho_2, \|u_j(t)\|_{L^\infty} \leq \rho_3, t \in R, j = 1, 2$ . 由命题 5.3 推出

$$\|A^{\frac{1}{2}} u_j(t)\|_{G(a_3)} \leq 2\rho_2, t \in R, j = 1, 2.$$

而命题 5.4 推出

$$\|A^{\frac{1}{2}}(u_1(t) - u_2(t))\|_{L^2} \leq \alpha_6 \|u_1(t) - u_2(t)\|_{L^2}, t \in R.$$

因此, 由引理 5.6 有

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_{G(a_3)} \leq \alpha_8 \|u_1(t) - u_2(t)\|_{L^2}, t \in R.$$

当  $t = 0$  时, 给出我们的结论.

现考虑水平集的 Hausdorff 长度.

**引理 5.8** 如  $\|f\|_{C(r)} \leq M, f \in H$ , 则下列情况之一成立:

(i)  $\|Re f\|_{\Gamma(r)} \leq M \|Re f\|_{L^2};$

(ii)  $\|Im f\|_{\Gamma(r)} \leq M \|Im f\|_{L^2}$ . 如  $Re f = 0$ , 则 (ii) 成立,

如  $Im f = 0$ , 则 (i) 成立.

注意到  $f = \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} f_j e^{2\pi i j \cdot x}, f_j \in \mathbb{C}$ , 则

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} f &= \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} \frac{1}{2} (f_j + f_j^*) e^{2\pi i j \cdot x}, \\ \operatorname{Im} f &= \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} \frac{1}{2} i (-f_j + f_j^*) e^{2\pi i j \cdot x}.\end{aligned}$$

证 我们有

$$\begin{aligned}& \| \operatorname{Re} f \|_{L^2(r)}^2 + \| \operatorname{Im} f \|_{L^2(r)}^2 \\&= \frac{1}{4} \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} e^{4\pi i j \cdot x} (|f_j + f_j^*|^2 + |f_j - f_j^*|^2) \\&= \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} |f_j|^2 e^{4\pi i j \cdot x} \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} |f_j|^2 e^{2(2\pi |j|^2 + 1)^{1/2} r} = \|f\|_{G(r)}^2 \\&\leq M^2 \|f\|_{L^2}^2 = M^2 (\|\operatorname{Re} f\|_{L^2}^2 + \|\operatorname{Im} f\|_{L^2}^2),\end{aligned}$$

易得引理.

对任何可微函数  $f$ ,  $f'_w$  表示  $f$  沿方向  $w \in S^1$  的方向导数.

引理 5.9 令  $v_1 = \operatorname{Re} u_0$ ,  $v_2 = \operatorname{Im} u_0$ ,  $u_0 \in \mathcal{A}$ , 则存在  $\alpha_{11} = \alpha_{11}(\nu, \mu, a)$  使得对任何  $w \in S^1$ , 如  $(u_0)'_w \neq 0$ , 有

$$\mathcal{H}^{-1}(N(v_j)'_w, \Omega) \leq \alpha_{11} \quad (5.29)$$

至少对一个  $j \in \{1, 2\}$  成立.

证  $w \in S^1$  是任意的, GL 方程对于空间变元的平移是不变的, 因此, 由定理 5.7 有

$$\begin{aligned}& \frac{1}{h} \|u_0(\cdot + hw) - u_0(\cdot)\|_{G(a_5)} \\& \leq \frac{\alpha_8}{h} \|u_0(\cdot + hw) - u_0(\cdot)\|_{L^2}, h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.\end{aligned}$$

当  $h \rightarrow 0$  时, 推出

$$\|(u_0)'_w\|_{G(a_5)} \leq \alpha_8 \|(u_0)'_w\|_{L^2}, \quad (5.30)$$

如  $(v_1)'_w \neq 0$ ,  $(v_2)'_w \neq 0$ , 则由引理 5.8 有

$$\|(v_j)'_w\|_{\Gamma(a_5)} \leq \alpha_8 \|(v_j)'_w\|_{L^2} \quad (5.31)$$

至少对一个  $j \in \{1, 2\}$  成立, 对这个  $j$ , 由定理 5.2 给出 (5.29). 其中  $\alpha_{11} = \alpha_{11}(1, \alpha_8, a_5, 2)$ . 另一方面,  $(v_k)'_w = 0$ ,  $k \in \{1, 2\}$ , 则 (5.30) 推出 (5.31),  $j = k$ . 再利用定理 5.2 给出 (5.29).

**定理 5.10** 设  $u_0 \in \mathcal{V}$  为一个非常数函数, 则存在  $\alpha_{12} = \alpha_{12}(\nu, \mu, a)$  使得

$$\min\{\mathcal{H}^{-1}(N(\operatorname{Re}(u_0 - \lambda), \Omega)), \mathcal{H}^{-1}(N(\operatorname{Im}(u_0 - \lambda), \Omega))\} \leq \alpha_{12}, \lambda \in \mathbb{C}. \quad (5.32)$$

**推论** 设  $u_0 \in \mathcal{V}$  为一个非常数函数, 则或者

$$\mathcal{H}^{-1}(N(\operatorname{Re}(u_0 - \lambda_1), \Omega)) \leq \alpha_{12}, \lambda_1 \in \mathbb{R}, \quad (5.33)$$

或者

$$\mathcal{H}^{-1}(N(\operatorname{Im}(u_0 - \lambda_2), \Omega)) \leq \alpha_{12}, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad (5.34)$$

或者两者都成立. 如  $\operatorname{Re} u_0$  是一个常数函数, 则我们有 (5.34), 如  $\operatorname{Im} u_0$  是一个常数函数, 则我们有 (5.33).

先证推论. 设不等式 (5.33) 对某  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$  失败, 对任意  $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ , 令  $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ , 则 (5.32) 推出 (5.34). 类似地, 我们如能证 (5.34) 不成立, 则 (5.33) 成立.

现设  $\operatorname{Re} u_0$  是常数函数, 令  $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ , 其中  $\lambda_1 = \operatorname{Re} u_0$ ,  $\lambda_2$  是任意的, 则由 (5.32) 推出 (5.34), 类似地我们能证, 若  $\operatorname{Im} u_0$  是常数, 则推出 (5.33) 成立.

在证明定理 5.10 之前, 我们先引入某些符号, 设  $f \in H$ ,  $w = (w^{(1)}, w^{(2)}) \in S^1$ ,  $w^- = (-w^{(2)}, w^{(1)}) \in S^1$ . 对任何  $t \in \mathbb{R}$ , 用  $l(t)$  表示  $f|_\Omega$  在通过  $tw^{(1)}$  是方向  $w$  的直线上零点的数目 ( $l(t) = 0, t > \sqrt{2}$ ). 令

$$l(w, f) = \int l(t) dt,$$

这个积分是存在的.

现证定理 5.10. 因  $u_0$  为非常数函数, 则存在  $w_1, w_2, w_3 \in S^1$  使得它们之间任何两个的夹角为  $2\pi/3$ .  $(u_0)'_{w_j}$  为非零常数,  $j \in \{1, 2, 3\}$ , 令  $u_1 = \operatorname{Re} u_0$ ,  $u_2 = \operatorname{Im} u_0$ , 令  $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \in \mathbb{C}$  ( $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ), 我们希望找到

$$m = \min_{j=1,2} \mathcal{H}^{-1}(N(u_j - \lambda_j, \Omega))$$

的上界. 如  $u_1 - \lambda_1$  和  $u_2 - \lambda_2$  均不是零函数, 集合  $N(u_1 - \lambda_1, \Omega)$

和  $N(u_2 - \lambda_2, \Omega)$  由可数多解析曲线所组成, 也可能有有限数的奇点, 这些解析曲线的两条在每点上形成夹角至少为  $\pi/6$ , 这些曲线具方向  $w_1, w_2$  和  $w_3$ , 因此

$$m \leq 2(l(w_k, u_1 - \lambda_1) + l(w_l, u_1 - \lambda_1)) \quad (5.35)$$

和

$$m \leq 2(l(w_k, u_2 - \lambda_2) + l(w_l, u_2 - \lambda_2)) \quad (5.36)$$

对一切  $k, l \in \{1, 2, 3\}, k \neq l$ , 上述结论是正确的. 如果函数  $u_1 - \lambda_1$  或  $u_2 - \lambda_2$  之一为零函数, 由(5.35)存在  $k_1, k_2 \in \{1, 2, 3\} (k_1 \neq k_2)$  使得

$$l(w_{k_j}, u_1 - \lambda_1) \geq \frac{m}{4}, \quad j = 1, 2.$$

而由(5.36), 存在  $k_3, k_4 \in \{1, 2, 3\} (k_3 \neq k_4)$ , 对它有

$$l(w_{k_j}, u_2 - \lambda_2) \geq \frac{m}{4}, \quad j = 3, 4.$$

因此取  $k \in \{k_1, k_2\} \cap \{k_3, k_4\}$  可得

$$l(w_k, u_j - \lambda_j) \geq \frac{m}{4}, \quad j = 1, 2.$$

由 Rolle 定理, 可得

$$l(w_k, (u_j)'_{w_k}) \geq \frac{m}{4} - \sqrt{2}, \quad j = 1, 2,$$

于是由[F, 2, 10.11]得

$$\mathcal{H}^1((u_j)'_{w_k}, \Omega) \geq \frac{m}{4} - \sqrt{2}, \quad j = 1, 2.$$

引理 5.9 最后给出  $m \leq 4(\alpha_{11} + \sqrt{2}) = \alpha_{12}$ . 定理证毕.

如果解的节点不属于整体吸引子, 我们有如下结果.

**定理 5.11** 设  $u_1$  和  $u_2$  为 GL 方程的解,  $v = u_1 - u_2$ , 则存在  $\alpha_{13} = \alpha_{13}(\nu, \mu, a)$  使得至少下列可能性之一成立:

$$(i) \lim_{t \rightarrow \infty} \|v(t)\|_{L^2} = 0,$$

$$(ii) \text{ 存在 } t_5 = t_5(\nu, \mu, a, u_1, u_2) \text{ 使得}$$

$$\min\{\mathcal{H}^1(N(\operatorname{Re} v(t), \Omega)), \mathcal{H}^1(N(\operatorname{Im} v(t), \Omega))\} \leq \alpha_{13}, t \geq t_5. \quad (5.37)$$



证 由命题 5.3 推出不等式(5.23), (5.24)成立,  $t \geq t_1 + t_2$ , 设(i)不成立, 则由命题 5.4 推出  $t_3 < \infty$  和不等式(5.25),  $t \geq t_1 + t_2 + t_3 = t_5$ . 定理 5.2, 引理 5.8 和引理 5.6 可推出(5.37), 对适当的  $\alpha_{13}$ .

附注 以下举一个例子, 说明很难扩展定理 5.10 的结果. 对任何  $n \in \mathbb{Z}$ , 构造 GL 方程的解  $u_n$  使得

$$\mathcal{N}^1(N(u_n(\cdot, t), \Omega)) = n + 1, \quad t \in [0, \infty). \quad (5.38)$$

考虑 ODE

$$\phi'(t) + (2n\pi)^2(1 + i\nu)\phi(t) + (1 + i\mu)|\phi(t)|^2\phi(t) - \alpha\phi(t) = 0,$$

具初值  $\phi(0) = \phi_0$ ,  $\phi_0 \in \mathbb{C}$  非零, 因

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\phi(t)|^2 + (2n\pi)^2 |\phi(t)|^2 + |\phi(t)|^4 - \alpha |\phi(t)|^2 = 0$$

具有上述问题的一个解  $\phi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . 容易验证

$$u(x, y, t) = \phi(t)e^{2\pi i n x}, x, y \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (5.39)$$

为 GL 方程满足(5.38)的一个解.

## § 6 二维广义(具导数项)Ginzburg-Landau 方程的整体吸引子

现考虑二维有界域上如下的广义 Ginzburg-Landau 方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = & \rho u + (1 + i\nu)\Delta u - (1 + i\mu)|u|^{2\sigma}u \\ & + \alpha\lambda_1 \cdot \nabla(|u|^2 u) + \beta(\lambda_2 \cdot \nabla u)|u|^2 \end{aligned} \quad (6.1)$$

具有初始条件

$$u(x, 0) = u_0(x), x \in \Omega \quad (6.2)$$

和周期边界条件

$$\Omega = (0, L_1) \times (0, L_1), u \text{ 在 } \Omega \text{ 上是周期的}, \quad (6.3)$$

其中  $u(x, t)$  为未知复值函数,  $\sigma > 0, \rho > 0, \nu, \mu, \alpha$  和  $\beta$  均为实常数,  $\lambda_1, \lambda_2$  为实向量.

1996 年, 郭柏灵和王碧祥在[5]中证明了: 如  $u_0 \in H_{\text{per}}^2(\Omega)$ , 存在  $\delta > 0$  使得

$$3 \leq \sigma \leq \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\mu - \nu \delta^2}{1 + \delta^2} \right)^2} - 1}, \quad (6.4)$$

则问题(6.1)–(6.3)存在惟一整体解  $u(x, t)$

$$u(x, t) \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^3(\Omega)),$$

并且具有整体吸引子及吸引子的 Hausdorff、分形维数的有限性.

现对问题(6.1)–(6.3)的解作一致先验估计.

**引理 6.1** 设  $u_0 \in H_{\text{per}}^2(\Omega)$ , 则对问题(6.1)–(6.3)的解有

$$\|u(t)\|^2 \leq C_1, \quad \forall t \geq t_1.$$

**证** 作(6.1)和  $u$  的  $L^2$  内积, 再取实部得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 &= \rho \int_{\Omega} |u|^2 dx - \|\nabla u\|^2 - \int_{\Omega} |u|^{2\sigma+2} dx \\ &\quad + \alpha \operatorname{Re} \int_{\Omega} (\lambda_1 \cdot \nabla (|u|^2 u)) u^* dx \\ &\quad + \beta \operatorname{Re} \int_{\Omega} (\lambda_2 \cdot \nabla u) |u|^2 u^* dx. \end{aligned} \quad (6.5)$$

证  $\lambda_2 = (a, b)$ , 则有

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} \int_{\Omega} (\lambda_2 \cdot \nabla u) |u|^2 u^* dx \\ &= \operatorname{Re} \int_{\Omega} \left( a \frac{\partial u}{\partial x_1} u^* + b \frac{\partial u}{\partial x_2} u^* \right) |u|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} a |u|^2 \frac{\partial}{\partial x_1} |u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} b |u|^2 \frac{\partial}{\partial x_2} |u|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{L_2} dx_2 \int_0^{L_1} a |u|^2 \frac{\partial}{\partial x_1} |u|^2 dx_1 \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{L_1} dx_1 \int_0^{L_2} b |u|^2 \frac{\partial}{\partial x_2} |u|^2 dx_2 = 0. \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} \int_{\Omega} (\lambda_1 \cdot \nabla (|u|^2 u)) u^* dx \\ &= \operatorname{Re} \int_{\Omega} (\lambda_1 \cdot \nabla |u|^2) |u|^2 dx + \operatorname{Re} \int_{\Omega} (\lambda_1 \cdot \nabla u) |u|^2 u^* dx \\ &= \int_{\Omega} (\lambda_1 \cdot \nabla |u|^2) |u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\lambda_1 \cdot \nabla |u|^2) |u|^2 dx = 0. \end{aligned} \quad (6.7)$$

于是从(6.5)—(6.7)得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \int_{\Omega} |u|^{2\sigma+2} dx &= \rho \int_{\Omega} |u|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u|^{2\sigma+2} dx + C, \end{aligned} \quad (6.8)$$

其中常数  $C$  依赖于参数  $\sigma, \rho$ , 今后仍用常数  $C$  表示依赖于参数资料  $(\sigma, \rho, \nu, \mu)$ , 由(6.8)有

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u|^{2\sigma+2} dx \leq C.$$

由此得

$$\frac{d}{dt} \|u\|^2 + \int_{\Omega} |u|^{2\sigma+2} dx \leq C. \quad (6.9)$$

由 Young 不等式有

$$|u|^2 = |u|^2 \cdot 1 \leq |u|^{2\sigma+2} + C. \quad (6.10)$$

积分(6.10)得

$$\|u\|^2 \leq \int_{\Omega} |u|^{2\sigma+2} dx + C. \quad (6.11)$$

于是由(6.9)和(6.10)有

$$\frac{d}{dt} \|u\|^2 + \|u\|^2 \leq C.$$

由 Gronwall 不等式得

$$\begin{aligned} \|u(t)\|^2 &\leq \|u_0\|^2 e^{-t} + C \leq R^2 e^{-t} + C, \quad \forall t \geq 0, \\ &\leq 2C, \quad \forall t \geq t_*, \end{aligned}$$

其中  $t_* = L_n \frac{R^2}{C}$ , 引理得证.

**引理 6.2** 设满足引理 6.1 的条件, 且存在  $\delta > 0$  使得(6.4)成立, 则  $\forall \epsilon > 0$ , 我们有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2(1+\sigma)} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u|^{2\sigma+2} dx &\leq -\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u|^{4\sigma+2} dx + \epsilon \|\Delta u\|^2 \\ &+ \epsilon \|\nabla u\|^4 - \frac{1}{4} \int_{\Omega} |u|^{2\sigma-2} [(1+2\sigma) |\nabla |u|^2|^2 \\ &- 2\nu \sigma \nabla |u|^2 \cdot i(u \nabla u^* - u^* \nabla u) + |u \nabla u^* \end{aligned}$$

$$-u^* \nabla |u|^2] dx + C_3 + C_2(\epsilon)(|\alpha \lambda_1| + |\beta \lambda_2|) \frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2 11\sigma-7}, \quad \forall t \geq t_2,$$

这里  $C_3$  依赖于资料  $(\sigma, \rho, \nu, \mu)$ ,  $C_2(\epsilon)$  依赖参数资料和  $\epsilon$ ,  $t_2$  依赖于参数资料和  $R$ ,  $\|u_0\| \leq R$ .

证 作(6.1) 和  $|u|^{2\sigma}u$  的  $L^2$  内积得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} |u|^{2\sigma} u^* dx &= \rho \int_{\Omega} |u|^{2\sigma+2} dx + (1 + i\nu) \int_{\Omega} \Delta u \cdot |u|^{2\sigma} u^* dx - (1 + i\mu) \int_{\Omega} |u|^{4\sigma+2} dx \\ &+ \alpha \int_{\Omega} (\lambda_1 \cdot \nabla (|u|^2 u)) |u|^{2\sigma} u^* dx \\ &+ \beta \int_{\Omega} (\lambda_2 \cdot \nabla u) |u|^{2\sigma+2} u^* dx. \end{aligned} \quad (6.12)$$

由于

$$\begin{aligned} (1 + i\nu) \int_{\Omega} \Delta u |u|^{2\sigma} u^* dx &= -(1 + i\nu) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 |u|^{2\sigma} dx \\ &- (1 + i\nu) \int_{\Omega} \sigma |u|^{2\sigma-2} u^* \nabla u \cdot \nabla |u|^2 dx, \end{aligned} \quad (6.13)$$

取(6.12) 的实部可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2(1+\sigma)} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u|^{2\sigma+2} dx &= \rho \int_{\Omega} |u|^{2\sigma+2} dx \\ &- \int_{\Omega} |\nabla u|^2 |u|^{2\sigma} dx - \frac{1}{2} \sigma \int_{\Omega} |u|^{2\sigma-2} |\nabla |u|^2|^2 dx \\ &+ \frac{1}{2} \sigma \int_{\Omega} |u|^{2\sigma-2} \nabla |u|^2 \cdot i(u \nabla u^* - u^* \nabla u) dx \\ &- \int_{\Omega} |u|^{4\sigma+2} dx + \operatorname{Re} \alpha \int_{\Omega} (\lambda_1 \cdot \nabla (|u|^2 u)) |u|^{2\sigma} u^* dx \\ &+ \operatorname{Re} \beta \int_{\Omega} (\lambda_2 \cdot \nabla u) |u|^{2\sigma+2} u^* dx. \end{aligned} \quad (6.14)$$

又由于

$$|u|^2 |\nabla u|^2 = \frac{1}{4} |\nabla |u|^2|^2 + \frac{1}{4} |u \nabla u^* - u^* \nabla u|^2, \quad (6.15)$$

由此可知

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 |u|^{2\sigma} dx - \frac{1}{2} \sigma \int_{\Omega} |u|^{2\sigma-2} |\nabla |u|^2|^2 dx \\
& + \frac{1}{2} \nu \sigma \int_{\Omega} |u|^{2\sigma-2} \nabla |u|^2 \cdot i(u \nabla u^* - u^* \nabla u) dx \\
& = - \frac{1}{4} \int_{\Omega} |u|^{2\sigma-2} [(1+2\sigma) |\nabla |u|^2|^2 \\
& - 2\nu \sigma \nabla |u|^2 \cdot i(u \nabla u^* - u^* \nabla u) + |u \nabla u^* \\
& - u^* \nabla u|^2] dx, \tag{6.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho \int_{\Omega} |u|^{2\sigma+2} dx &= \rho \int_{\Omega} |u|^{2\sigma+1} |u| dx \\
&\leq \frac{1}{6} \int_{\Omega} |u|^{4\sigma+2} dx + \frac{3}{2} \rho^2 \int_{\Omega} |u|^2 dx \\
&\leq \frac{1}{6} \int_{\Omega} |u|^{4\sigma+2} dx + C, \forall t \geq t_1. \tag{6.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| \operatorname{Re} \beta \int_{\Omega} (\lambda_2 \cdot \nabla u) |u|^{2\sigma+2} u^* dx \right| \\
& \leq |\beta \lambda_2| \int_{\Omega} |\nabla u| |u|^2 |u|^{2\sigma+1} dx \\
& \leq 3 |\beta \lambda_2| \int_{\Omega} |\nabla u|^2 |u|^4 dx + \frac{1}{12} \int_{\Omega} |u|^{4\sigma+2} dx \\
& \leq 3 |\beta \lambda_2| \|\nabla u\|_4^2 \|u\|_8^4 + \frac{1}{12} \int_{\Omega} |u|^{4\sigma+2} dx. \tag{6.18}
\end{aligned}$$

利用 Sobolev 插值不等式

$$\|u\|_4 \leq K \|u\|_{H^1}^{1/2} \|u\|^{1/2}, \forall u \in H^1(\Omega), \tag{6.19}$$

$$\|u\|_8 \leq K \|u\|_{H^2}^{\theta} \|u\|_q^{1-\theta}, \forall u \in H^2(\Omega), \tag{6.20}$$

其中

$$\theta = \frac{8-q}{4q+8}, 1 < q < 8; \theta = 0, q \geq 8. \tag{6.21}$$

于是有

$$\|\nabla u\|_4^2 \leq C \|\nabla u\|_{H^1} \|\nabla u\| \leq C \|u\|_{H^2} \|u\|_{H^1}. \tag{6.22}$$

由(6.18)–(6.22)有

$$|\operatorname{Re} \beta \int_{\Omega} (\lambda_2 \cdot \nabla u) |u|^{2\sigma+2} u^* dx| \leq C,$$

$$\begin{aligned}
& |\beta_{\lambda_2}|^2 \|u\|_{H^2}^{4\theta+1} \|u\|_{H^1} \|u\|_q^{4(1-\theta)} + \frac{1}{12} \int_{\Omega} |u|^{4\sigma+2} dx \\
& \leq \gamma \|u\|_{H^2}^2 + C(\gamma) |\beta_{\lambda_2}|^{\frac{4}{1-4\theta}} \|u\|_{H^1}^{\frac{2}{1-4\theta}} \|u\|_q^{\frac{8(1-\theta)}{1-4\theta}} \\
& \quad + \frac{1}{12} \int_{\Omega} |u|^{4\sigma+2} dx \\
& \quad (\text{如果 } q > 3, \forall 0 < \gamma \leq 1) \\
& \leq \gamma \|u\|_{H^2}^2 + \gamma \|u\|_{H^1}^4 + C(\gamma) |\beta_{\lambda_2}|^{\frac{8}{1-8\theta}} \|u\|_q^{\frac{16(1-\theta)}{1-8\theta}} \\
& \quad + \frac{1}{12} \int_{\Omega} |u|^{4\sigma+2} dx \\
& \quad \left( \text{如 } q > \frac{14}{3} \right) \\
& \leq \gamma \|u\|_{H^2}^2 + \gamma \|u\|_{H^1}^4 + \frac{1}{12} \|u\|_q^q \\
& \quad + C(\gamma) |\beta_{\lambda_2}|^{\frac{8q}{q-8q\theta-16+16\theta}} + \frac{1}{12} \int_{\Omega} |u|^{4\sigma+2} dx \\
& \quad \left( \text{如 } q > \frac{34}{3} \right) \\
& \leq \gamma \|u\|_{H^2}^2 + \gamma \|u\|_{H^1}^4 + \frac{1}{12} \|u\|_{4\sigma+2}^{4\sigma+2} + C(\gamma) \\
& \quad |\beta_{\lambda_2}|^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}} + \frac{1}{12} \int_{\Omega} |u|^{4\sigma+2} dx \\
& \quad \left( \text{由 } \sigma \geq 3, q = 4\sigma + 2 > \frac{34}{3} \right) \\
& \leq \gamma \|u\|_{H^2}^2 + \gamma \|u\|_{H^1}^4 + \frac{1}{6} \int_{\Omega} |u|^{4\sigma+2} dx \\
& \quad + C(\gamma) |\beta_{\lambda_2}|^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}} \\
& \leq \gamma C \|\Delta u\|^2 + 8\gamma \|\nabla u\|^4 + \frac{1}{6} \int_{\Omega} |u|^{4\sigma+2} dx + C \\
& \quad + C(\gamma) |\beta_{\lambda_2}|^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}. \tag{6.23}
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
\nabla(|u|^2 u) &= |u|^2 \nabla u + u \nabla |u|^2 = 2|u|^2 \nabla u + u^2 \nabla u, \\
\end{aligned} \tag{6.24}$$

类似地我们有

$$\begin{aligned}
 & \left| \operatorname{Re} \int_{\Omega} (\lambda_1 \cdot \nabla(|u|^2 u)) |u|^{2\sigma} u^* dx \right| \leq 3 |\alpha \lambda_1| \\
 & \int_{\Omega} |\nabla u| |u|^2 |u|^{2\sigma+1} dx \\
 & \leq \gamma C \|\Delta u\|^2 + 8\gamma \|\nabla u\|^4 + \frac{1}{6} \int_{\Omega} |u|^{4\sigma+2} dx \\
 & + C(\gamma) |\alpha \lambda_1| \frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}. \quad (6.25)
 \end{aligned}$$

由(6.14), (6.16), (6.17), (6.23), (6.25) 可得

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2(1+\sigma)} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u|^{2\sigma+2} dx \leq -\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u|^{4\sigma+2} dx \\
 & + \gamma C \|\Delta u\|^2 + 16\gamma \|\nabla u\|^4 + C + C(\gamma) (|\alpha \lambda_1| \\
 & + |\beta \lambda_2|) \frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7} - \frac{1}{4} \int_{\Omega} |u|^{2\sigma-2} [(1+2\sigma) \\
 & |\nabla(|u|^2)|^2 - 2\gamma \sigma \nabla(|u|^2) \cdot i(u \nabla u^* - u^* \nabla u) \\
 & + |u \nabla u^* - u^* \nabla u|^2] dx.
 \end{aligned}$$

当选取  $\gamma$  适当小, 即得引理的结论.

**引理 6.3** 设引理 6.2 条件满足, 则有

$$\|\nabla u\|^2 \leq C_3 + C_3 (|\alpha \lambda_1| + |\beta \lambda_2|) \frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}, \quad \forall t \geq t_3, \quad (6.26)$$

其中  $C_3$  依赖于参数资料,  $t_3$  依赖于参数资料和  $R$ ,  $\|u_0\|_{H^1} \leq R$ .

**证** 作(6.1) 和  $\Delta u$  的  $L^2$  内积得

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 = \rho \|\nabla u\|^2 \\
 & + \operatorname{Re}(1 + i\mu) \int_{\Omega} |u|^{2\sigma} u \Delta u^* dx \\
 & - \alpha \operatorname{Re} \int_{\Omega} (\lambda_1 \cdot \nabla(|u|^2 u)) \Delta u^* dx \\
 & - \beta \operatorname{Re} \int_{\Omega} (\lambda_2 \cdot \nabla u) |u|^2 \Delta u^* dx, \quad (6.27)
 \end{aligned}$$

$\forall \varepsilon > 0$ , 由 Young 不等式有

$$\rho \|\nabla u\|^2 \leq \varepsilon \|\nabla u\|^4 + C(\varepsilon), \quad (6.28)$$

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re}(1+i\mu) \int_{\Omega} |u|^{2\sigma} u \Delta u^* dx = -\operatorname{Re}(1+i\mu) \int_{\Omega} |u|^{2\sigma} |\nabla u|^2 dx \\
& \quad - \operatorname{Re}(1+i\mu) \int_{\Omega} \sigma |u|^{2\sigma-2} u \nabla u^* \cdot \nabla |u|^2 dx \\
& = - \int_{\Omega} |u|^{2\sigma} |\nabla u|^2 dx - \frac{\sigma}{2} \int_{\Omega} |u|^{2\sigma-2} |\nabla |u|^2|^2 dx \\
& \quad + \frac{1}{2} \mu \sigma \int_{\Omega} |u|^{2\sigma-2} \nabla |u|^2 \cdot i(u^* \nabla u - u \nabla u^*) dx \\
& = -\frac{1}{4} \int_{\Omega} |u|^{2\sigma-2} [(1+2\sigma) |\nabla |u|^2|^2 \\
& \quad - 2\mu \sigma \nabla |u|^2 i(u^* \nabla u - u \nabla u^*) \\
& \quad + |u^* \nabla u - u \nabla u^*|^2] dx, \tag{6.29}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| -\beta \operatorname{Re} \int_{\Omega} (\lambda_2 \cdot \nabla u) |u|^2 \Delta u^* dx \right| \\
& \leq |\beta \lambda_2| \int_{\Omega} |\nabla u| |u|^2 |\Delta u| dx \\
& \leq |\beta \lambda_2| \|\Delta u\| \|\nabla u\|_4 \|u\|_{\frac{8}{3}}^2 \\
& \leq C |\beta \lambda_2| \|\Delta u\| \|\Delta u\|_{H^1}^{1/2} \|\nabla u\|^{1/2} \|u\|_{H^2}^{2\theta} \|u\|_q^{2(1-\theta)} \\
& \leq C |\beta \lambda_2| \|u\|_{H^2}^{2\theta+\frac{1}{2}} \|\nabla u\|^{1/2} \|u\|_q^{2(1-\theta)} \\
& \leq \gamma \|u\|_{H^2}^2 + C(\gamma) |\beta \lambda_2|^{\frac{4}{1-4\theta}} \|\nabla u\|^{\frac{2}{1-4\theta}} \|u\|_q^{\frac{8(1-\theta)}{1-4\theta}} \\
& \quad (\text{如 } q > 3, \forall 0 < \gamma \leq 1) \\
& \leq \gamma \|u\|_{H^2}^2 + \gamma \|\nabla u\|^4 + C(\gamma) |\beta \lambda_2|^{\frac{8}{1-8\theta}} \|u\|_q^{\frac{16(1-\theta)}{1-8\theta}} \\
& \quad \left( \text{如 } q > \frac{14}{3} \right) \\
& \leq \gamma \|u\|_{H^2}^2 + \gamma \|\nabla u\|^4 + \gamma \|u\|_q^q \\
& \quad + C(\gamma) |\beta \lambda_2|^{\frac{8q}{q-8q\theta-16+16\theta}} \\
& \quad \left( \text{如 } q > \frac{34}{3} \right) \\
& \leq \gamma C \|\Delta u\|^2 + \gamma \|\nabla u\|^4 + \gamma \|u\|_q^q \\
& \quad + C(\gamma) |\beta \lambda_2|^{\frac{8q}{q-8q\theta-16+16\theta}} \leq \gamma C \|\Delta u\|^2 + \gamma \|\nabla u\|^4 \\
& \quad + \gamma \|u\|_{\frac{4\sigma+2}{4\sigma+2}}^{4\sigma+2} + C(\gamma) |\beta \lambda_2|^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \left( \sigma \geq 3, q = 4\sigma + 2 > \frac{34}{3} \right) \\
& \leq \frac{1}{2} \varepsilon \|\Delta u\|^2 + \frac{1}{2} \varepsilon \|\nabla u\|^4 + \frac{1}{2} \varepsilon \|u\|_{4\sigma+2}^{4\sigma+2} \\
& \quad + C(\varepsilon) \|\beta_2\| \frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}.
\end{aligned} \tag{6.30}$$

类似地, 由(6.24) 有

$$\begin{aligned}
& \left| -\alpha \operatorname{Re} \int (\lambda_1 \cdot \nabla(|u|^2 u)) \Delta u^* dx \right| \\
& \leq \frac{1}{2} \varepsilon \|\Delta u\|^2 + \frac{1}{2} \varepsilon \|\nabla u\|^4 + \frac{1}{2} \varepsilon \|u\|_{4\sigma+2}^{4\sigma+2} \\
& \quad + C(\varepsilon) \|\alpha \lambda_1\| \frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7},
\end{aligned} \tag{6.31}$$

由(6.27)–(6.31) 可得

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 \leq \varepsilon \|\Delta u\|^2 + 2\varepsilon \|\nabla u\|^4 \\
& \quad + \varepsilon \|u\|_{4\sigma+2}^{4\sigma+2} + C(\varepsilon) + C(\varepsilon) (\|\alpha \lambda_1\| \\
& \quad + \|\beta_2\|) \frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7} - \frac{1}{4} \int_{\Omega} |u|^{2\sigma-2} [(1+2\sigma) |\nabla |u|^2|^2 \\
& \quad - 2\mu \sigma \nabla |u|^2 \cdot i(u^* \nabla u - u \nabla u^*) + |u^* \nabla u \\
& \quad - u \nabla u^*|^2] dx.
\end{aligned} \tag{6.32}$$

利用(6.32) 和引理 6.2 可得

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \|\nabla u\|^2 + \frac{\delta^2}{1+\sigma} \int_{\Omega} |u|^{2\sigma+2} dx \right) + \|\Delta u\|^2 \\
& \quad + \frac{1}{2} \delta^2 \int_{\Omega} |u|^{4\sigma+2} dx \\
& \leq \varepsilon (1 + \delta^2) \|\Delta u\|^2 + \varepsilon (2 + \delta^2) \|\nabla u\|^4 + \varepsilon \int_{\Omega} |u|^{4\sigma+2} dx \\
& \quad + C(\varepsilon) + C(\varepsilon) (\|\lambda_1 \alpha\| + \|\beta_2\|) \frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7} \\
& \quad - \frac{1}{4} \int_{\Omega} |u|^{2\sigma-2} [(1+2\sigma)(1+\delta^2) |\nabla |u|^2|^2 \\
& \quad + 2\sigma(\nu \delta^2 - \mu) \nabla |u|^2 \cdot i(u^* \nabla u - u \nabla u^*) \\
& \quad + (1 + \delta^2) |u^* \nabla u - u \nabla u^*|^2] dx.
\end{aligned} \tag{6.33}$$

由于

$$\|\nabla u\|^2 = (-\Delta u, u) \leq \|\Delta u\| \|u\| \leq K \|\Delta u\|, \quad (6.34)$$

其中  $K$  仅依赖于参数资料,但与  $\epsilon$  无关,我们有

$$\begin{aligned} \epsilon(1+\delta^2)\|\Delta u\|^2 + \epsilon(2+\delta^2)\|\Delta u\|^4 \\ \leq \epsilon K_0 \|\Delta u\|^2 (K_0^{-1} \epsilon \text{ 无关}) \\ \leq \frac{1}{2} \|\Delta u\|^2 \left( \text{选取 } \epsilon < \frac{1}{2K_0} \right). \end{aligned} \quad (6.35)$$

考察条件(6.4),推出矩阵

$$\begin{bmatrix} (1+2\sigma)(1+\delta^2) & \sigma(\nu\delta^2 - \mu) \\ \sigma(\nu\delta^2 - \mu) & 1+\delta^2 \end{bmatrix}$$

为非负定,因此在(6.33)的右端最后一项为非正的,选取  $\epsilon$  充分小,使得(6.35)成立,因此由(6.33)和(6.35)推得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \|\nabla u\|^2 + \frac{\delta^2}{1+\sigma} \int_{\Omega} |u|^{2\sigma+2} dx \right) \\ + \frac{1}{2} \|\Delta u\|^2 \\ + \frac{1}{4} \delta^2 \int_{\Omega} |u|^{4\sigma+2} dx \\ \leq C + C(|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|) \frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{8\sigma^2 - 11\sigma - 7}. \end{aligned} \quad (6.36)$$

由(6.35)得

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|^2 &\leq K \|\Delta u\| \leq \|\Delta u\|^2 + \frac{1}{4} K^2, \quad (6.37) \\ \frac{\delta^2}{2(1+\sigma)} \int_{\Omega} |u|^{2\sigma+2} dx &= \frac{\delta^2}{2(1+\sigma)} \int_{\Omega} |u|^{2\sigma+1} |u| dx \\ &\leq \frac{1}{4} \delta^2 \int_{\Omega} |u|^{4\sigma+2} dx + C \int_{\Omega} |u|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{4} \delta^2 \int_{\Omega} |u|^{4\sigma+2} dx + C. \end{aligned} \quad (6.38)$$

由(6.36)——(6.38)得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \|\nabla u\|^2 + \frac{\delta^2}{1+\sigma} \int_{\Omega} |u|^{2\sigma+2} dx \right) + \|\nabla u\|^2 \\ + \frac{\delta^2}{1+\sigma} \int_{\Omega} |u|^{2\sigma+2} dx \end{aligned}$$

$$\leq C + C(|\alpha_1| + |\beta_2|) \frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2 - 11\sigma - 7}, \forall t \geq t_*,$$

其中  $t_* = \max\{t_1, t_2\}$ ,  $t_1, t_2$  已在引理 6.1 和引理 6.2 中出现.

再利用 Gronwall 不等式推得

$$\begin{aligned} & \|\nabla u(t)\|^2 + \frac{\delta^2}{1+\sigma} \int_{\Omega} |u(t)|^{2\sigma+2} dx \\ & \leq \left( \|\nabla u(t_*)\|^2 + \frac{\delta^2}{1+\sigma} \int_{\Omega} |u(t_*)|^{2\sigma+2} dx \right) e^{-(t-t_*)} \\ & \quad + C + C(|\alpha_1| + |\beta_2|) \frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2 - 11\sigma - 7}, \forall t \geq t_*. \end{aligned} \quad (6.39)$$

从问题(6.1)–(6.3) 整体解的存在性证明中易知

$$\|\nabla u(t_*)\|^2 + \frac{\delta^2}{1+\sigma} \int_{\Omega} |u(t_*)|^{2\sigma+2} dx \leq C(R), \quad (6.40)$$

这里  $C(R)$  依赖于资料和  $R$ ,  $\|u_0\|_{H^1} \leq R$ .

于是, 由(6.39) 和(6.40) 推得

$$\begin{aligned} & \|\nabla u(t)\|^2 + \frac{\delta^2}{1+\sigma} \int_{\Omega} |u(t)|^{2\sigma+2} dx \\ & \leq C(R) e^{-(t-t_*)} + C(|\alpha_1| + |\beta_2|) \frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2 - 11\sigma - 7} + C \\ & \leq 2C + 2C(|\alpha_1| + |\beta_2|) \frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2 - 11\sigma - 7}, \forall t \geq t_*, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} t'_* &= \max\{t_*, t_* + \text{Ln} C(R) \\ & \quad - \text{Ln}[C + C(|\alpha_1| + |\beta_2|) \frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2 - 11\sigma - 7}]\}, \end{aligned}$$

这就是推出引理的结果.

**引理 6.4** 设引理 6.2 的条件满足, 则有

$$\begin{aligned} \|\Delta u(t)\|^2 & \leq C_4 + C_4(|\alpha_1| + |\beta_2|) \frac{16(1+\sigma)(1+2\sigma)(7+8\sigma)}{3(6\sigma^2 - 11\sigma - 7)} \\ & \quad + C_4(|\alpha_1| + |\beta_2|)^{8+\frac{240(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2 - 11\sigma - 7}}, \forall t \geq t_4, \end{aligned}$$

这里  $C_4$  依赖于参数资料,  $t_4$  依赖于资料和  $R$ ,  $\|u_0\|_{H^2} \leq R$ .

**证** 作(6.1) 和  $\Delta^2 u$  的内积, 再取实部得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta u\|^2 = \rho \|\Delta u\|^2 - \|\nabla \Delta u\|^2 - \text{Re}(1 + i\mu)$$

$$\int_{\Omega} |u|^{2\sigma} u \Delta^2 u^* dx + \alpha \operatorname{Re} \int_{\Omega} (\lambda_1 \cdot \nabla (|u|^{2\sigma} u)) \Delta^2 u^* dx \\ + \beta \operatorname{Re} \int_{\Omega} (\lambda_2 \cdot \nabla u) |u|^{2\sigma} \Delta^2 u^* dx. \quad (6.41)$$

应用引理 6.1 和引理 6.3 等可得,  $\forall t \geq t_*$ ,

$$\frac{d}{dt} \|\Delta u\|^2 + \|\nabla \Delta u\|^2 + \|\Delta u\|^2 \leq C \\ + C(|\alpha \lambda_1| + |\beta \lambda_2|) \frac{16(1+\sigma)(1+2\sigma)(7+8\sigma)}{3(6\sigma^2 - 11\sigma - 7)} \\ + C(|\alpha \lambda_1| + |\beta \lambda_2|)^8 + \frac{240(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2 - 11\sigma - 7}. \quad (6.42)$$

由 Gronwall 引理推得

$$\|\Delta u(t)\|^2 \leq \|\Delta u(t_*)\|^2 e^{(t-t_*)} + C \\ + C(|\alpha \lambda_1| + |\beta \lambda_2|) \frac{16(1+\sigma)(1+2\sigma)(7+8\sigma)}{3(6\sigma^2 - 11\sigma - 7)} \\ + C(|\alpha \lambda_1| + |\beta \lambda_2|)^8 + \frac{240(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2 - 11\sigma - 7}, \quad \forall t \geq t_*. \quad (6.43)$$

由解的先验估计有

$$\|\Delta u(t_*)\|^2 \leq C(R),$$

这里  $C(R)$  依赖于参数资料,  $\|u_0\|_{H^2} \leq R$ . 当  $t$  充分大时有

$$\|\Delta u(t)\|^2 \leq 2C + 2C(|\alpha \lambda_1| + |\beta \lambda_2|) \frac{16(1+\sigma)(1+2\sigma)(7+8\sigma)}{3(6\sigma^2 - 11\sigma - 7)} \\ + 2C(|\alpha \lambda_1| + |\beta \lambda_2|)^8 + \frac{240(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2 - 11\sigma - 7}.$$

这样引理 6.4 得证.

我们注意到

$$\|u\|_{H^2}^2 \leq C(\|\Delta u\| + \|u\|)^2 \\ \leq C + C(|\alpha \lambda_1| + |\beta \lambda_2|) \frac{16(1+\sigma)(1+2\sigma)(7+8\sigma)}{3(6\sigma^2 - 11\sigma - 7)} \\ + C(|\alpha \lambda_1| + |\beta \lambda_2|)^8 + \frac{240(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2 - 11\sigma - 7}, \quad \forall t \geq t_*, \quad (6.44)$$

其中  $C$  仅依赖于参数资料  $(\sigma, \rho, \nu, \mu)$ .

$$\|u\|_{\infty}^2 \leq C \|u\| \|u\|_{H^2} \\ \leq C + C(|\alpha \lambda_1|^2 + |\beta \lambda_2|) \frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)(7+8\sigma)}{3(6\sigma^2 - 11\sigma - 7)} \\ + C(|\alpha \lambda_1| + |\beta \lambda_2|)^4 + \frac{120(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2 - 11\sigma - 7}, \quad \forall t \geq t_*. \quad (6.45)$$

引理 6.5 设引理 6.2 的条件满足, 则有

$$\|\nabla \Delta u(t)\|^2 \leq K, \forall t \geq t_*,$$

这里  $K$  依赖于参数资料  $(\sigma, \rho, \nu, \mu, \alpha, \beta, \lambda_1, \lambda_2, \Omega)$ ,  $t_*$  依赖于  $(\sigma, \rho, \nu, \mu, \alpha, \beta, \lambda_1, \lambda_2, \Omega)$  和  $R$ ,  $\|u_0\|_{H^2} \leq R$ .

证 作 (6.1) 和  $\Delta^3 u$  的内积, 再取实部得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \Delta u\|^2 &= \rho \|\nabla \Delta u\|^2 - \|\Delta^2 u\|^2 \\ &+ \operatorname{Re}(1 + i\mu) \int_{\Omega} |u|^{2\sigma} u \Delta^2 u^* dx \\ &- \operatorname{Re} \alpha \int_{\Omega} \lambda_1 \cdot (\nabla |u|^2 u) \Delta^3 u^* dx + \operatorname{Re} \beta \int_{\Omega} (\lambda_2 \cdot \nabla u) \\ &\cdot |u|^2 \Delta^3 u^* dx. \end{aligned} \quad (6.46)$$

应用引理 6.1, 6.3 和 6.4, 进行复杂的运算得

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re}(1 + i\mu) \int_{\Omega} |u|^{2\sigma} u \Delta^2 u^* dx| &\leq K \|\Delta^2 u\| \\ &\leq \frac{1}{6} \|\Delta^2 u\|^2 + K, \end{aligned} \quad (6.47)$$

$$\begin{aligned} |\alpha \int_{\Omega} (\lambda_1 \cdot \nabla (|u|^2 u)) \Delta^3 u^* dx| \\ \leq \frac{1}{6} \|\Delta^2 u\|^2 + K \|\nabla \Delta u\|^2 + K, \end{aligned} \quad (6.48)$$

$$\begin{aligned} |\beta \int_{\Omega} (\lambda_2 \cdot \nabla u) |u|^2 \Delta^3 u^* dx| \\ \leq \frac{1}{6} \|\Delta^2 u\|^2 + K \|\nabla \Delta u\|^2 + K. \end{aligned} \quad (6.49)$$

由 (6.46) — (6.49) 可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \Delta u\|^2 &\leq \rho \|\nabla \Delta u\|^2 - \|\Delta^2 u\|^2 + \frac{1}{2} \|\Delta^2 u\|^2 \\ &+ K \|\nabla \Delta u\|^2 + K \leq (K + \rho) \|\nabla \Delta u\|^2 + K, \end{aligned}$$

因此

$$\frac{d}{dt} \|\nabla \Delta u\|^2 \leq K \|\nabla \Delta u\|^2 + K. \quad (6.50)$$

由 (6.42) 有

$$\frac{d}{dt} \|\Delta u\|^2 + \|\nabla \Delta u\|^2 \leq K, \forall t \geq t_* \quad (6.51)$$

积分(6.51)从  $t$  到  $t+1$  得

$$\|\Delta u(t+1)\|^2 - \|\Delta u(t)\|^2 + \int_t^{t+1} \|\nabla \Delta u\|^2 dt \leq K,$$

$$\forall t \geq t_*,$$

再应用引理 6.4 有

$$\int_t^{t+1} \|\nabla \Delta u\|^2 dt \leq K, \forall t \geq t_*. \quad (6.52)$$

由(6.50)—(6.52) 和一致 Gronwall 引理可得

$$\|\nabla \Delta u(t)\|^2 \leq K, \forall t \geq t_* + 1.$$

引理得证.

现建立问题 (6.1)—(6.3) 整体吸引子的存在性和它的 Hausdorff 分形维数的估计. 由 (6.44) 推出球

$$B = \{u \in H^2(\Omega) : \|u\|_{H^2} \leq K_0\}$$

是  $S(t)$  在  $H^2(\Omega)$  中的吸收集, 由引理 6.5 可知半群  $S(t)$  在  $H^2(\Omega)$  对充分大的  $t$  是一致紧的, 因此由 [12] 可得整体吸引子的存在性. 即有

**定理 6.6** 设 (6.4) 成立, 则  $\omega$  极限集

$$\mathcal{A} = \omega(B) = \bigcap_{s \geq 0} \bigcup_{t \geq s} \overline{S(t)B}$$

是  $S(t)$  在  $H^2(\Omega)$  上的紧吸引子, 这里闭包是取在  $H^2(\Omega)$  上.

下面证明整体吸引子  $\mathcal{A}$  的维数是有限的. 为此, 写方程 (6.1) 为抽象形式

$$\frac{du}{dt} = F(u), \quad (6.53)$$

这里  $F(u)$  表示 (6.1) 的右端.

考虑问题 (6.1)—(6.3) 的一次变分方程

$$v_t = F'(u(t))v \quad (6.54)$$

具初值

$$v(0) = v_0 \in H, \quad (6.55)$$

其中

$$\begin{aligned}
F'(u(t))v = & \rho v + (1 + i\nu)\Delta v - (1 + i\mu)(1 + \sigma)|u|^{2\sigma}v \\
& + 2\alpha(\lambda_1 \cdot \nabla(|u|^{2\sigma}v)) + \alpha(\lambda_1 \cdot \nabla(u^2 v^*)) \\
& - (1 + i\mu)\sigma|u|^{2\sigma-2}u^2 v^* + \beta(\lambda_2 \cdot \nabla v)|u|^2 \\
& + \beta(\lambda_2 \cdot \nabla u)(vu^* + uv^*),
\end{aligned}$$

$u(t) = S(t)u_0$  为问题(6.1)–(6.3)的解,  $u_0 \in \mathcal{A}$ .

我们知道, 对  $u_0 \in \mathcal{A}$ , 存在解  $S(t)u_0 \in H^2(\Omega)$ . 用标准方法能证明  $\forall v_0 \in H$ , 线性初值问题(6.64), (6.55) 具有惟一解  $v(t)$ , 使得

$$v(t) \in L^2([0, T]; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H), \quad \forall T > 0. \quad (6.56)$$

对于  $v_0 \in H$ , 令  $G(t)$  表示问题(6.54), (6.55) 的解, 且通过复杂的计算和能量估计可以证明, 对于  $\forall w_0, u_0 \in \mathcal{A}$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{\|S(t)w_0 - S(t)u_0 - G(t)(w_0 - u_0)\|^2}{\|w_0 - u_0\|^2} \\
& \leq K \|w_0 - u_0\|, \quad \forall 0 \leq t \leq T,
\end{aligned}$$

其中  $K$  依赖于参数资料  $(\sigma, \rho, \nu, \mu, \alpha, \beta, \vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2, \Omega)$ ,  $T$  和  $R$ .  $\|\mathcal{A}\|_{H^2} \leq R$ . 这个不等式表明半群  $S(t)$  在  $\mathcal{A}$  上是一致可微的, 且  $S(t)$  在  $H^2$  上 ( $u_0 \in \mathcal{A}$ ) 的微分为算子  $L(t, u_0): v_0 \in H \rightarrow G(t)v_0 \in H$ , 我们考虑  $v_0 = v_{01}, \dots, v_{0m}$  为  $H$  中的  $m$  个元素, 相应的(6.54), (6.55) 的解  $v(t) = v_1(t), \dots, v_m(t)$ , 则由文献[12]有

$$\begin{aligned}
& |v_1(t) \wedge v_2(t) \wedge \dots \wedge v_m(t)|_{\wedge^m H} = |v_{01} \wedge \dots \\
& \wedge v_{0m}|_{\wedge^m H} \cdot \exp \int_0^t \text{ReTr} F'(u(\tau)) \cdot Q_m(\tau) d\tau, \quad (6.57)
\end{aligned}$$

这里,  $Q_m(\tau) = Q_m(\tau, u_0, v_{01}, \dots, v_{0m})$  为  $H$  在  $\{v_1(\tau), \dots, v_m(\tau)\}$  所张空间的正交投影. 设对给定时间  $\tau$ ,  $\varphi_j(\tau)$ ,  $j \in N$  为  $H$  的正交基, 且  $Q_m(\tau)H = \text{span}\{v_1(\tau), \dots, v_m(\tau)\}$ ,  $v_j(\tau) \in H^1(\Omega)$ .

$$\begin{aligned}
\text{ReTr} F'(u(\tau)) \cdot Q_m \tau &= \sum_{j=1}^{\infty} \text{Re}(F'(u(\tau)) \\
& \cdot Q_m(\tau) \varphi_j(\tau), \varphi_j(\tau)) \\
&= \sum_{j=1}^m \text{Re}(F'(u(\tau)) \varphi_j(\tau), \varphi_j(\tau)). \quad (6.58)
\end{aligned}$$

省略  $\tau$  可得

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(F'(u)\varphi_j, \varphi_j) &= \rho \|\varphi_j\|^2 - \|\nabla \varphi_j\|^2 - (1+\sigma) \\
&\int_{\Omega} |u|^{2\sigma} |\varphi_j|^2 dx - \operatorname{Re}(1+i\mu)\sigma \cdot \int_{\Omega} |u|^{2\sigma-2} u^2 (\varphi_j^*)^2 dx \\
&+ \operatorname{Re} 2\alpha \int_{\Omega} (\lambda_1 \cdot \nabla (|u|^2 \varphi_j) \varphi_j^*) dx \\
&+ \operatorname{Re} \alpha \int_{\Omega} (\lambda_1 \cdot \nabla (u^2 \varphi_j^*)) \varphi_j^* dx \\
&+ \operatorname{Re} \beta \int_{\Omega} (\lambda_2 \cdot \nabla \varphi_j) |u|^2 \varphi_j^* dx \\
&+ \operatorname{Re} \beta \int_{\Omega} (\lambda_1 \cdot \nabla u) (u^* | \varphi_j |^2 + u (\varphi_j^*)^2) dx. \quad (6.59)
\end{aligned}$$

现估计(6.59)右端各项.

$$\begin{aligned}
& - \operatorname{Re}(1+i\mu)\sigma \int_{\Omega} |u|^{2\sigma-2} u^2 (\varphi_j^*)^2 dx \\
& \leq \sigma |1+i\mu| \|u\|_{\infty}^{2\sigma} \|\varphi_j\|^2 \\
& \leq C \|\varphi_j\|^2 + C \|\varphi_j\|^2 (|\alpha \lambda_1| + |\beta \lambda_2|)^{\frac{8\sigma(1+\sigma)(1+2\sigma)(7+8\sigma)}{3(6\sigma^2-11\sigma-7)}} \\
& \quad + C \|\varphi_j\|^2 (|\alpha \lambda_1| + |\beta \lambda_2|)^{4\sigma + \frac{120\sigma(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}, \quad (6.60)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re} 2\alpha \int_{\Omega} (\lambda_1 \cdot \nabla (|u|^2 \varphi_j)) \varphi_j^* dx \\
& = -2\alpha \operatorname{Re} \int_{\Omega} (\lambda_1 \cdot \nabla \varphi_j^*), \\
& |u|^2 \varphi_j dx \\
& \leq 2 |\alpha \lambda_1| \|u\|_{\infty}^2 \|\nabla \varphi_j\| \|\varphi_j\| \\
& \leq \frac{1}{8} \|\nabla \varphi_j\|^2 + C |\alpha \lambda_1|^2 \|u\|_{\infty}^4 \|\varphi_j\|^2 \\
& \leq \frac{1}{8} \|\nabla \varphi_j\|^2 + C \|\varphi_j\|^2 (|\alpha \lambda_1| + |\beta \lambda_2|)^2 \\
& \quad + C \|\varphi_j\|^2 (|\alpha \lambda_1| + |\beta \lambda_2|)^2 + \frac{16(1+\sigma)(1+2\sigma)(7+8\sigma)}{3(6\sigma^2-11\sigma-7)} \\
& \quad + C \|\varphi_j\|^2 (|\alpha \lambda_1| + |\beta \lambda_2|)^{10 + \frac{240(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}, \quad (6.61)
\end{aligned}$$

$$\operatorname{Re} \beta \int_{\Omega} (\lambda_2 \cdot \nabla \varphi_j) |u|^2 \varphi_j^* dx \leq |\beta \lambda_1|$$

$$\|u\|_{\infty}^2 \|\nabla \varphi_j\| \|\varphi_j\| \leq \frac{1}{8} \|\nabla \varphi_j\|^2$$



$$\begin{aligned}
& + C \|\varphi_j\|^2 (|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)^2 \\
& + C \|\varphi_j\|^2 (|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)^2 + \frac{16(1+\sigma)(1+2\sigma)(7+8\sigma)}{3(6\sigma^2-11\sigma-7)} \\
& + C \|\varphi_j\|^2 (|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)^{10} + \frac{240(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}, \quad (6.62)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re} \beta \int_{\Omega} (\lambda_2 \cdot \nabla u) (u^* + \varphi_j)^2 + u + \varphi_j^* \|^2 dx \\
& \leq 2 \|\beta\lambda_2\| \cdot \|u\|_{\infty} \cdot \|\nabla u\| \cdot \|\varphi_j\| \cdot \|\varphi_j\|_{H^1} \\
& \leq \frac{1}{8} \|\varphi_j\|_{H^1}^2 + C \|\beta\lambda_2\|^2 \|u\|_{\infty}^2 \|\nabla u\|^2 \|\varphi_j\|^2 \\
& \leq \frac{1}{8} \|\varphi_j\|_{H^1}^2 + C \|\beta\lambda_2\|^2 \|u\|_{\infty}^2 (-\Delta u, u) \|\varphi_j\|^2 \\
& \leq \frac{1}{8} \|\varphi_j\|_{H^1}^2 + C \|\beta\lambda_2\|^2 \|u\| \cdot \|u\|_{H^2} \\
& \quad \cdot \|\Delta u\| \cdot \|u\| \|\varphi_j\|^2 \\
& \leq \frac{1}{8} \|\varphi_j\|_{H^1}^2 + C \|\beta\lambda_2\|^2 \|u\|_{H^2} \|\varphi_j\|^2 \\
& \leq \frac{1}{8} \|\nabla \varphi_j\|^2 + \frac{1}{8} \|\varphi_j\|^2 + C \|\varphi_j\|^2 (|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)^2 \\
& \quad + C \|\varphi_j\|^2 (|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)^2 + \frac{16(1+\sigma)(1+2\sigma)(7+8\sigma)}{3(6\sigma^2-11\sigma-7)} \\
& \quad + C \|\varphi_j\|^2 (|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)^{10} + \frac{240(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}, \quad (6.63)
\end{aligned}$$

由(6.60)–(6.63)有

$$\operatorname{Re} \operatorname{Tr} F'(u(\tau)) \circ \theta_m(\tau) \leq -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \|\nabla \varphi_j\|^2 + E \sum_{j=1}^m \|\varphi_j\|^2, \quad (6.64)$$

其中

$$\begin{aligned}
E & = C + C (|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)^2 \\
& \quad + C (|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)^2 + \frac{8\sigma(1+\sigma)(1+2\sigma)(7+8\sigma)}{3(6\sigma^2-11\sigma-7)} \\
& \quad + C (|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)^{4\sigma} + \frac{120\sigma(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7} \\
& \quad + C (|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)^{10} + \frac{240(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7} \\
& \quad + C (|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)^2 + \frac{16(1+\sigma)(1+2\sigma)(7+8\sigma)}{3(6\sigma^2-11\sigma-7)}. \quad (6.65)
\end{aligned}$$

令

$$\eta = \eta(x, \tau) = \sum_{j=1}^m |\varphi_j|^2. \quad (6.66)$$

因  $\{\varphi_j\} (j = 1, \dots, m)$  在  $H$  中是正交的, 有

$$\sum_{j=1}^m \|\varphi_j\|^2 = \int_{\Omega} \eta dx = m \quad (6.67)$$

由 Sobolev-Lieb-Thirring 不等式有

$$\int_{\Omega} \eta^2 dx \leq C_0 \int_{\Omega} \eta dx + C_0 \sum_{j=1}^m \|\nabla \varphi_j\|^2 \quad (6.68)$$

其中  $C_0$  仅依赖于  $\Omega$  的形状

由 Hölder 不等式有

$$\left( \int \eta dx \right)^2 \leq |\Omega| \int \eta^2 dx. \quad (6.69)$$

由 (6.65)–(6.69) 有

$$\begin{aligned} \text{ReTr} F'(u(\tau)) \circ \theta_m(\tau) &\leq -\frac{m^2}{2C_0 |\Omega|} + \frac{1}{2}m + Em \\ &\leq -\frac{m^2}{4C_0 |\Omega|} + C_0 |\Omega| \left(E + \frac{1}{2}\right)^2. \end{aligned} \quad (6.70)$$

对  $i = 1, 2, \dots, m$  和  $v_{oi} \in H$ , 定义

$$\begin{aligned} q_m(t) &= \sup_{u_0 \in \mathcal{A}} \sup_{\|v_{oi}\| \leq 1} \left( \frac{1}{t} \int_0^t \text{ReTr} F'(S(\tau)u_0) \circ Q_m(\tau) d\tau \right), \\ q_m &= \limsup_{t \rightarrow \infty} q_m(t), \end{aligned}$$

则从 (6.70) 得

$$q_m \leq -\frac{m^2}{4C_0 |\Omega|} + C_0 |\Omega| \left(E + \frac{1}{2}\right)^2.$$

因此, 如  $m$  满足

$$m - 1 \leq \sqrt{8}C_0 |\Omega| \left(E + \frac{1}{2}\right) \leq m, \quad (6.71)$$

则  $q_m < 0$ , 由此即得

**定理 6.7** 设  $\mathcal{A}$  为问题 (6.1)–(6.3) 的整体吸引子, 则  $\mathcal{A}$  的 Hausdorff 维数  $\leq m$ , 而它的分形维数  $\leq 2m$ , 其中  $m$  为 (6.71) 所确定.

## § 7 二维具导数 Ginzburg-Landau 方程的 Gevrey 正则性和近似惯性流形

1996 年郭柏灵,王碧祥在[6]中考虑二维 Ginzburg-Landau 方程解的时间解析性, Gevrey 正则性以及近似惯性流形.

设有如下的 Ginzburg-Landau 方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = & \rho u + (1 + i\nu)\Delta u - (1 + i\mu)|u|^{2\sigma}u + \alpha\lambda_1 \cdot \nabla(|u|^2u) \\ & + \beta(\lambda_2 \cdot \nabla u)|u|^2, (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+; \end{aligned} \quad (7.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), x \in \Omega. \quad (7.2)$$

$u$  为  $\Omega$  周期的,

$$\Omega = (0, L_1) \times (0, L_2), \quad (7.3)$$

其中  $u$  为未知复值函数,  $\sigma \in \mathbb{N}$ ,  $\rho > 0$ ,  $\mu, \alpha, \beta$  为实常数,  $\lambda_1, \lambda_2$  为实向量.

在[13]中已经证明:如  $u_0 \in H^2(\Omega)$ , 且存在  $\delta > 0$ , 使得

$$2 < \sigma \leq \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu - \nu\delta^2}{1 + \delta^2}\right)^2} - 1}, \quad \sigma \in \mathbb{N}, \quad (7.4)$$

这里  $\mathbb{N}$  为自然数集合, 则存在问题(7.1) - (7.3) 的惟一整体解  $u(x, t)$ .

$$\begin{aligned} u(x, t) \in & L^\infty(0, T; H^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^3(\Omega)), \\ & \forall T > 0, \end{aligned} \quad (7.5)$$

且存在常数  $K_1$ , 它依赖于参数资料  $(\sigma, \rho, \nu, \mu, \alpha, \beta, \lambda_1, \lambda_2, \delta, \Omega)$ , 使得

$$\|u(t)\|_{H^1} \leq K_1, \quad \forall t \geq t_1, \quad (7.6)$$

这里  $t_1$  依赖于参数资料  $(\sigma, \rho, \nu, \mu, \alpha, \beta, \lambda_1, \lambda_2, \delta, \Omega)$  和  $R$ ,  $\|u_0\|_{H^1} \leq R$ .

令  $u(t) = u_1(t) + iu_2(t)$ ,  $u_1(t)$  和  $u_2(t)$  为实函数, 则在(7.1)中分别取实部和虚部可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial t} = & \rho u_1 + \Delta u_1 - \nu \Delta u_2 - |u|^{2\sigma}(u_1 - \mu u_2) \\ & + \alpha \lambda_1 \cdot \nabla (|u|^{2\sigma} u_1) + \beta (\lambda_2 \cdot \nabla u_1) |u|^2, \quad (7.7)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_2}{\partial t} = & \rho u_2 + \nu \Delta u_1 + \Delta u_2 - |u|^{2\sigma}(\mu u_1 + u_2) \\ & + \alpha \lambda_1 \cdot \nabla (|u|^{2\sigma} u_2) + \beta (\lambda_2 \cdot \nabla u_2) |u|^2. \quad (7.8)\end{aligned}$$

为简单计,以  $u(t)$  表示向量  $(u_1(t), u_2(t))$  则(7.7),(7.8)可写为

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} = & \rho u + D \Delta u - D_1 |u|^{2\sigma} u + \alpha \lambda_1 \nabla (|u|^{2\sigma} u) \\ & + \beta (\lambda_2 \cdot \nabla u) |u|^2,\end{aligned}$$

其中

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -\nu \\ \nu & 1 \end{pmatrix}, D_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\mu \\ \mu & 1 \end{pmatrix},$$

即有

$$\frac{du(t)}{dt} + DAu(t) + R(u(t), u(t), u(t)) = 0, \quad (7.9)$$

其中  $A = -\Delta$  为无界自共轭算子,  $D(A) = \{u \in H^2(\Omega) \times H^2(\Omega): u \text{ 满足(7.3)}\}$

$$\begin{aligned}R(u, v, \omega) = & -\rho \omega + D_1(uv)^\sigma \omega - \alpha \lambda_1 \\ & \cdot \nabla ((u \cdot v) \omega) - \beta (\lambda_2 \cdot \nabla \omega)(u \cdot v),\end{aligned} \quad (7.10)$$

$$R: D(A) \times D(A) \times D(A) \rightarrow \mathcal{H} = H \times H.$$

对  $R(u, v, \omega)$  可作如下估计

**引理 7.1** 设  $u, v, \omega \in D(A)$ , 则  $R(u, v, \omega) \in \mathcal{H}$ , 且

$$\begin{aligned}\|R(u, v, \omega)\| \leq & \rho \|\omega\| + C \|u\|_{H^1}^\sigma \|v\|_{H^1}^\sigma \|\omega\|_{H^1} \\ & + C \|\omega\|_{H^1} \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \\ & + C \|\omega\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \|A\omega\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1},\end{aligned}$$

在此和今后用  $C$  和  $C_i (i = 1, 2, \dots)$  表示任何仅依赖于参数  $(\sigma, \rho, \nu, \mu, \alpha, \beta, \lambda_1, \lambda_2, \delta, \Omega)$  的常数.

证 以(7.10)可得

$$\begin{aligned} \|R(u, v, \omega)\| &\leq \rho \|\omega\| + \|D_1(u \cdot v)^2 \omega\| \\ &\quad + \|\alpha \lambda_1 \cdot \nabla((u \cdot v)\omega)\| + \|\beta(\lambda_2 \cdot \nabla \omega)(u \cdot v)\|, \end{aligned} \quad (7.11)$$

$$\begin{aligned} \|D_1(u \cdot v)^\sigma \omega\| &= \sqrt{1 + \mu^2} \left( \int_{\Omega} |u|^{2\sigma} |v|^{2\sigma} |\omega|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{1 + \mu^2} \|u\|_{8\sigma}^\sigma \|v\|_{8\sigma}^\sigma \|\omega\|_4 \\ &\leq C_1 \|u\|_{H^1}^\sigma \|v\|_{H^1}^\sigma \|\omega\|_{H^1}, \end{aligned} \quad (7.12)$$

$$\begin{aligned} &\|\beta(\lambda_2 \cdot \nabla \omega)(u \cdot v)\| \\ &\leq \|\beta \lambda_2\| \left( \int_{\Omega} |\nabla \omega|^2 |u|^2 |v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|\beta \lambda_2\| \|\nabla \omega\|_4 \|u\|_8 \|v\|_8 \\ &\leq C \|\nabla \omega\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla \omega\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \\ &\leq C \|\omega\|_{H^1}^{1/2} \|\omega\|_{H^2}^{1/2} \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \\ &\leq C \|\omega\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} (\|\omega\| + \|A\omega\|)^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \\ &\leq C \|\omega\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} (\|\omega\|^{\frac{1}{2}} + \|A\omega\|^{\frac{1}{2}}) \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \\ &\leq C_2 \|\omega\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \|A\omega\|^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \\ &\quad + C_3 \|\omega\|_{H^1} \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}. \end{aligned} \quad (7.13)$$

因  $\alpha \lambda_1 \cdot \nabla((u \cdot v)\omega) = \alpha(\lambda_1 \cdot \nabla \omega)(u \cdot v) + \alpha(\lambda_1 \cdot \nabla u) \cdot (v \cdot \omega) + \alpha(\lambda_1 \cdot \nabla v)(u \cdot \omega)$ , 类似于(7.13)可得

$$\begin{aligned} &\|\alpha \lambda_1 \cdot \nabla((u \cdot v)\omega)\| \\ &\leq C_4 \|\omega\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \|A\omega\|^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \\ &\quad + C_5 \|u\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \|Au\|^{\frac{1}{2}} \|v\|_{H^1} \|\omega\|_{H^1} \\ &\quad + C_6 \|v\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \|Av\|^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^1} \|\omega\|_{H^1} \\ &\quad + C_7 \|\omega\|_{H^1} \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

引理 7.1 由(7.11)–(7.14) 推得, 作为引理 7.1 的推论有

$$\|R(u, u, u)\| \leq \rho \|u\|_{H^1} + C_1 \|u\|_{H^1}^{2\sigma+1}$$

$$+ C_8 \|u\|_{H^1}^{\frac{5}{2}} \|Au\|^{\frac{1}{2}} + C_9 \|u\|_{H^1}^3. \quad (7.15)$$

由此可得

$$\begin{aligned} & |(R(u, u, u), Au + u)| \\ & \leq \|R(u)\| \|Au\| + \|R(u)\| \|u\| \\ & \leq \|R(u)\| \|Au\| + \|R(u)\| \|u\|_{H^1} \\ & \leq \rho \|u\|_{H^1} \|Au\| + C_1 \|u\|_{H^1}^{2\sigma+1} \|Au\| \\ & \quad + C_8 \|u\|_{H^1}^{\frac{5}{2}} \|Au\|^{\frac{3}{2}} \\ & \quad + C_9 \|u\|_{H^1}^3 \|Au\| + \rho \|u\|_{H^1}^2 + C_1 \|u\|_{H^1}^{2\sigma+2} \\ & \quad + C_8 \|u\|_{H^1}^{\frac{7}{2}} \|Au\|^{\frac{1}{2}} + C_9 \|u\|_{H^1}^4 \\ & \leq \varepsilon \|Au\|^2 + C_{10}(\varepsilon) \|u\|_{H^1}^{4\sigma+2} + C_{11}, \forall \varepsilon > 0, \end{aligned} \quad (7.16)$$

由(7.16)和(7.6)可得

**定理 7.2** 设(7.4)成立,  $u_0 \in H^2(\Omega)$ , 则存在  $\theta_0$  和  $T_0$  使得问题(7.1), (7.2) 的解的每一个分量具有  $D(A)$  值的解析延拓在以下复区域

$$\Delta_1 = \{t + se^{i\theta} : t \geq t_1, |\theta| \leq \theta_0, 0 \leq s \leq T_0\},$$

其中  $t_1$  在(7.6)中确定,  $\theta_0$  和  $T_0$  依赖于初值和  $|\theta_0| \leq \frac{\pi}{4}$ . 此外, 存在常数  $K$  依赖于初值使得

$$\|u(z)\|, \|A^{\frac{1}{2}}u(z)\|, \|Au(z)\| \leq K, \forall z \in \Delta_2, \quad (7.17)$$

这里  $\Delta_2 = \{z : \operatorname{Re} z \geq a, |\operatorname{Im} z| \leq b\}$ ,  $a, b$  为依赖于初值和  $R$  的常数,  $\|u_0\|_{H^1} \leq R$ .

**证** 注意到(7.16)和(7.6)推出[14]中的定理 1.1 条件满足, 则由定理 7.1 可得本定理.

由定理 7.2 和 Cauchy 公式可得

**命题 7.3** 设(7.4)成立,  $u_0 \in H^2(\Omega)$ , 则有

$$\left\| \frac{d}{dt}u(t) \right\|, \left\| A^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dt}u(t) \right\|, \left\| A \frac{d}{dt}u(t) \right\| \leq K_2, \forall t \geq t_2,$$

其中常数  $K_2$  依赖于初值,  $t_2 > t_1$  依赖于初值和  $R$ ,  $\|u_0\|_{H^1} \leq R$ .

以下构造问题(7.1)–(7.3)的近似惯性流形. 首先我们知道, 由  $A = -\Delta$  的特征向量所组成的在  $H$  中的正交基  $\{w_j\}_{j=1}^\infty$  使得

$A w_j = \lambda_j w_j, 0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_j \rightarrow \infty, j \rightarrow \infty$ , 给定  $m$ ,  $P = P_m: H \rightarrow$  子空间  $\{w_1, \dots, w_m\}$  的正交投影,  $Q = Q_m = I - P_m, P_m, Q_m$  作用于(7.9)有

$$\frac{dp}{dt} + DA p + P_m R(p + q, p + q, p + q) = 0, \quad (7.18)$$

$$\frac{dq}{dt} + DA q + Q_m R(p + q, p + q, p + q) = 0, \quad (7.19)$$

其中  $p = P_m u, q = Q_m u$ , 且有

$$\|A^r p\| \leq \lambda_m^r \|p\|, r > 0, p \in P_m D(A^r), \quad (7.20)$$

$$\|A^r q\| \geq \lambda_{m+1}^r \|q\|, r > 0, q \in Q_m D(A^r), \quad (7.21)$$

$$\|A^{\frac{1}{2}} u\| = \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|, u \in H^1(\Omega), \quad (7.22)$$

$$\|P_m u\| \leq \|u\|, \|Q_m u\| \leq \|u\|, \forall u \in H. \quad (7.23)$$

由(7.7)和命题 7.3 得

$$\|Au(t)\| \leq C, \|A \frac{d}{dt} u(t)\| \leq C, \forall t \geq t_*, \quad (7.24)$$

这里  $C$  和  $t_*$  类似于命题 7.3.

由(7.21), (7.23) 和(7.24) 推出

$$\begin{aligned} \|q(t)\| &\leq C \lambda_{m+1}^{-1}, \|A^{\frac{1}{2}} q(t)\| \leq C \lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}, \\ \left\| \frac{d}{dt} q(t) \right\| &\leq C \lambda_{m+1}^{-1}, \quad \forall t \geq t_*. \end{aligned} \quad (7.25)$$

为构造问题(7.1)–(7.3)的近似惯性流形, 定义映照  $\Phi: P_m H \rightarrow Q_m H$  使得  $\forall p \in P_m H, \Phi(p) = \Psi$ , 由下式给定

$$DA \Psi + Q_m R(p, p, p) = 0. \quad (7.26)$$

令  $\Sigma = \text{graph}(\Phi)$ , 我们证明  $\Sigma$  为一个近似惯性流形, 我们有:

**定理 7.4** 设(7.4)成立, 且  $u_0 \in H^2(\Omega)$ , 则存在常数  $K$  依赖于初值使得

$$\text{dist}_H(u(t), \Sigma) \leq K\lambda^{\frac{3}{m+1}}, \quad t \geq t_*. \quad (7.27)$$

其中  $u(t)$  为(7.1)–(7.3) 的解,  $t_*$  依赖于初值和  $R$ ,  $\|u_0\|_{H^1} \leq R$ .

证 由(7.19) 和(7.26) 可得

$$D(A\Psi - Aq) = \frac{dq}{dt} + Q_m R(u) - Q_m R(p), \quad (7.28)$$

$$\begin{aligned} R(u) - R(p) &= -\rho q + D_1(|u|^{2\sigma}u - |p|^{2\sigma}p) \\ &\quad - \alpha\lambda_1 \cdot \nabla(|u|^2u) + \alpha\lambda_1 \cdot \nabla(|p|^2p) \\ &\quad - \beta(\lambda_2 \cdot \nabla u)|u|^2 + \beta(\lambda_2 \cdot \nabla p)|p|^2. \end{aligned} \quad (7.29)$$

估计(7.29) 中的每一项  $f(s) = s^{2\sigma}$ ,  $\xi$  在  $|u|$  和  $|p|$  之间.

$$\begin{aligned} \|D_1(|u|^{2\sigma}u - |p|^{2\sigma}p)\| &\leq \|D_1(|u|^{2\sigma} - |p|^{2\sigma})u\| \\ &\quad + \|D_1|p|^{2\sigma}(u - p)\| \\ &\leq \sqrt{1 + \mu^2} \|u\|_\infty \| |u|^{2\sigma} - |p|^{2\sigma} \| \\ &\quad + \sqrt{1 + \mu^2} \|p\|_\infty^{2\sigma} \|q\| \\ &\leq \sqrt{1 + \mu^2} \|u\|_\infty \|f'(\xi)(|u| - |p|)\| \\ &\quad + \sqrt{1 + \mu^2} \|p\|_\infty^{2\sigma} \|q\| \\ &\leq \sqrt{1 + \mu^2} \|u\|_\infty \|f'(\xi)\|_\infty \|q\| \\ &\quad + \sqrt{1 + \mu^2} \|p\|_\infty^{2\sigma} \|q\|. \end{aligned} \quad (7.30)$$

由(7.17) 和  $C_1 \|u\|_{H^2} \leq \|u\| + \|\Delta u\| \leq C_2 \|u\|_{H^2}$ ,  $\forall u \in H^2(\Omega)$ , 推出

$$\|u\|_{H^2} \leq C, \quad \forall t \geq t_*, \quad (7.31)$$

其中  $t_*$  依赖于初值和  $R$ ,  $\|u_0\|_{H^1} \leq R$ , 由此

$$\|u\|_\infty \leq C \|u\|^{\frac{1}{2}} \|u\|^{\frac{1}{2}}_{H^2} \leq C, \quad \forall t \geq t_*. \quad (7.32)$$

类似地,

$$\begin{aligned} \|p\|_\infty &\leq C_2 \|p\|^{\frac{1}{2}} \|p\|^{\frac{1}{2}}_{H^2} \\ &\leq C_2 \|p\|^{\frac{1}{2}} (\|p\| + \|Ap\|)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$



$$\leq C_2 \|u\|^{\frac{1}{2}} (\|u\| + \|Au\|)^{\frac{1}{2}} \leq C_3, \quad (7.33)$$

由(7.33)和(7.32)得

$$\|\xi\|_{\infty} \leq \|p\|_{\infty} + \|u\|_{\infty} \leq C, \forall t \geq t_0. \quad (7.34)$$

由(7.30), (7.32)–(7.34) 推得

$$\|D_1(|u|^2 u - D_1(|p|^2 p))\| \leq C_5 \|q\| \quad (7.35)$$

$$\begin{aligned} & \|\beta(\lambda_2 \cdot \nabla u)|u|^2 - \beta(\lambda_2 \cdot \nabla p)|p|^2\| \\ & \leq \|\beta(\lambda_2 \cdot (\nabla u - \nabla p))|u|^2\| + \|\beta(\lambda_2 \cdot \nabla p)(|u|^2 - |p|^2)\| \\ & \leq \|\beta\lambda_2\| \|u\|_{\infty}^2 \|\nabla q\| + \|\beta(\lambda_2 \cdot \nabla p) \cdot (u+p)(u-p)\| \\ & \leq \|\beta\lambda_2\| \|u\|_{\infty}^2 \|\nabla q\| + \|\beta\lambda_2\| \|u \\ & \quad + p\|_{\infty} \left( \int_{\Omega} (\nabla p)^2 |q|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq C_6 \|\nabla q\| + C_7 \|\nabla p\|_4 \|q\|_4 \\ & \leq C_6 \|\nabla q\| + C_8 \|\nabla p\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla p\|^{\frac{1}{2}}_{H^1} \|q\|_{H^1} \\ & \leq C_6 \|A^{\frac{1}{2}} q\| + C_8 \|A^{\frac{1}{2}} u\|^{\frac{1}{2}} (\|A^{\frac{1}{2}} p\| + \|AP\|)^{\frac{1}{2}} \\ & \quad \cdot (\|q\| + \|A^{\frac{1}{2}} q\|) \leq C_6 \|A^{\frac{1}{2}} q\| + C_8 \|A^{\frac{1}{2}} u\|^{\frac{1}{2}} \\ & \quad \cdot (\|A^{\frac{1}{2}} u\| + \|Au\|)^{\frac{1}{2}} (\|q\| + \|A^{\frac{1}{2}} q\|) \\ & \leq C_9 \|q\| + C_{10} \|A^{\frac{1}{2}} q\|, \end{aligned} \quad (7.36)$$

$$\alpha \lambda_1 \cdot \nabla (|u|^2 u) = \alpha (\lambda_1 \cdot \nabla u) |u|^2 + 2\alpha (\lambda_1 \cdot \nabla u) u u. \quad (7.37)$$

利用(7.37), 类似于(7.36) 可得

$$\begin{aligned} & \|\alpha \lambda_1 \cdot \nabla (|u|^2 u) - \alpha \lambda_1 \cdot \nabla (|p|^2 p)\| \\ & \leq C_{11} \|q\| + C_{12} \|A^{\frac{1}{2}} q\|. \end{aligned} \quad (7.38)$$

由(7.29), (7.35), (7.36) 和(7.38) 可知, 存在常数  $C$  使得

$$\|R(u) - R(p)\| \leq C \|q\| + C \|A^{\frac{1}{2}} q\|. \quad (7.39)$$

由(7.28) 和(7.39) 可得

$$\|D(A\Psi - Aq)\| \leq \left\| \frac{dq}{dt} \right\| + \|R(u) - R(p)\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq C\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}} + C\lambda_{m+1}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\lambda_2^{-\frac{1}{2}}\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}} + C\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}. \quad (7.40)
\end{aligned}$$

由关系式

$$\begin{aligned}
\|D(A\Psi - Aq)\| &= \sqrt{1+\nu^2} \|A\Psi - Aq\| \\
&\geq \sqrt{1+\nu^2} \cdot \lambda_{m+1} \|\Psi - q\|, \quad (7.41)
\end{aligned}$$

可知

$$\|\Psi - q\| \leq C\lambda_{m+1}^{\frac{3}{2}}, \quad \forall t \geq t_*, \quad (7.42)$$

其中  $t_*$  如同在(7.31)中的, 则有

$$\begin{aligned}
d_H(u(t), \Sigma) &\leq \|u(t) - (p(t) + \Phi(p(t)))\| \\
&\leq \|\Psi(t) - q(t)\| \leq C\lambda_{m+1}^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

定理证毕.

现考虑问题(7.1)–(7.3) 解的 Gevrey 正则性, 用此改善近似惯性流形的收敛速度, 设  $\Omega = (0, 2\pi)^2$ , 且

$$\int_{\Omega} u(x, t) dx = 0, \quad \forall t > 0. \quad (7.43)$$

**引理 7.5** 设  $u, v, w \in D(e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A)$ ,  $\tau > 0$ , 则对  $R(u, v, w)$  有如下估计

$$\begin{aligned}
&(e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} R(u, v, w), e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} Ay) \leq \rho \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} w\| \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} Ay\| \\
&\quad + C \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} u\|^{\sigma} \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} v\|^{\sigma} \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} w\| \\
&\quad \cdot \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} Ay\| + C \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} u\|^{\sigma} \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} v\|^{\sigma} \\
&\quad \cdot \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} w\|^{\frac{1}{2}} \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} Aw\|^{\frac{1}{2}} \cdot \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} Ay\| \\
&\quad + C \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} u\|^{\frac{1}{2}} \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} v\|^{\frac{1}{2}} \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} Au\| \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} w\| \\
&\quad \cdot \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} Ay\| + C \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} u\| \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} v\| \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} Av\|^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\cdot \| e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} w \|_{\frac{1}{2}} \| e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A y \|.$$

证 令

$$u = \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} u_j e^{ijx}, u^* = e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} u = \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} u_j^* e^{ijx}, u_j^* = e^{\tau |j|^1} u_j, \quad (7.44)$$

$$v = \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} v_j e^{ijx}, v^* = e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} v = \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} v_j^* e^{ijx}, v_j^* = e^{\tau |j|^1} v_j, \quad (7.45)$$

$$w = \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} w_j e^{ijx}, w^* = e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} w = \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} w_j^* e^{ijx}, w_j^* = e^{\tau |j|^1} w_j, \quad (7.46)$$

$$y = \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} y_j e^{ijx}, y^* = e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} y = \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} y_j^* e^{ijx}, y_j^* = e^{\tau |j|^1} y_j. \quad (7.47)$$

我们有

$$(R(u, v, w), y) = -\rho(w, y) + ((u \cdot v)^\sigma D_1 w, y) - (\alpha \lambda_1 \cdot \nabla((u \cdot v)w), y) - \beta((\lambda_2 \cdot \nabla w)(u \cdot v), y). \quad (7.48)$$

估计(7.48)中的每一项

$$\begin{aligned} -\rho(w, y) &= -\rho \int_{\Omega} \sum_l w_l e^{ilx} \cdot \sum_s \bar{y}_s e^{-isx} dx \\ &= 4\pi^2 \rho \sum_{l=s} w_l \cdot \bar{y}_s, \end{aligned} \quad (7.49)$$

$$\begin{aligned} ((u \cdot v)^\sigma D_1 w, y) &= \int_{\Omega} \left( \sum_{j_1} u_{j_1} e^{ij_1 x} \cdot \sum_{k_1} v_{k_1} e^{ik_1 x} \right) \cdots \\ &\quad \left( \sum_{j_\sigma} u_{j_\sigma} e^{ij_\sigma x} \cdot \sum_{k_\sigma} v_{k_\sigma} e^{ik_\sigma x} \right) \times (D_1 \sum_l w_l e^{ilx} \cdot \sum_s \bar{y}_s e^{-isx}) dx \\ &= 4\pi^2 \sum_{j_1+k_1+\cdots+j_\sigma+k_\sigma+l=s} (u_{j_1} \cdot v_{k_1}) \cdots (u_{j_\sigma} \cdot v_{k_\sigma}) (D_1 w_l \cdot \bar{y}_s), \end{aligned} \quad (7.50)$$

$$-(\beta(\lambda_2 \cdot \nabla w)(u \cdot v), y) = -\beta \int_{\Omega} (u \cdot v)(\lambda_2 \cdot \nabla w) \bar{y} dx$$

$$\begin{aligned}
&= -\beta \int_{\Omega} \left( \sum_j u_j e^{ijx} \cdot \sum_k v_k e^{ikx} \right) \cdot \left( \sum_l (\lambda_2 \cdot il) w_l e^{ilx} \right. \\
&\quad \left. \cdot \sum_s \bar{y}_s e^{-isx} \right) dx \\
&= -4\pi^2 \beta \sum_{j+k+l=s} (u_j \cdot v_k) (\lambda_2 \cdot il) (w_l \cdot \bar{y}_s), \quad (7.51)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&- \alpha (\lambda_1 \cdot \nabla ((u \cdot v) w), y) = -\alpha ((\lambda_1 \cdot \nabla w) (u \cdot v), y) \\
&- \alpha ((\lambda_1 \cdot \nabla u) w, y) - \alpha (((\lambda_1 \cdot \nabla u) u) w, y). \quad (7.52)
\end{aligned}$$

类似于(7.51)可得

$$\begin{aligned}
&- \alpha ((\lambda_1 \cdot \nabla w) (u \cdot v), y) \\
&= -4\pi^2 \alpha \sum_{j+k+l=s} (u_j \cdot v_k) \cdot (\lambda_1 \cdot il) (w_l \cdot \bar{y}_s) \quad (7.53) \\
&- \alpha (((\lambda_1 \cdot \nabla u) v) w, y) \\
&= -4\pi^2 \alpha \sum_{j+k+l=s} (\lambda_1 \cdot ij) \cdot (u_j \cdot v_k) (w_l \cdot \bar{y}_s) \\
&= -\alpha \int \left( \sum_j (\lambda_1 \cdot ij) u_j e^{ijx} \cdot \sum_k v_k e^{ikx} \right) \\
&\quad \times \left( \sum_l w_l e^{ilx} \cdot \sum_s \bar{y}_s e^{-isx} \right) dx. \quad (7.54)
\end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned}
&- \alpha (((\lambda_1 \cdot \nabla u) u) w, y) \\
&= -4\pi^2 \alpha \sum_{j+k+l=s} (\lambda_1 \cdot ik) \cdot (u_j \cdot v_k) (w_l \cdot \bar{y}_s). \quad (7.55)
\end{aligned}$$

由(7.48)–(7.55)可得

$$\begin{aligned}
(R(u, v, w), y) &= -4\pi^2 \rho \sum_{l=s} w_l \cdot \bar{y}_s \\
&+ 4\pi^2 \sum_{j_1+k_1+\dots+j_s+k_s+l=s} (u_{j_1} \cdot v_{k_1}) \cdots (u_{j_s} \cdot v_{k_s}) (D_1 w_l \cdot \bar{y}_s) \\
&- 4\pi^2 \alpha \sum_{j+k+l=s} (u_j \cdot v_k) (\lambda_1 \cdot il) (w_l \cdot \bar{y}_s) \\
&- 4\pi^2 \alpha \sum_{j+k+l=s} (\lambda_1 \cdot ij) (u_j \cdot v_k) (w_l \cdot \bar{y}_s) \\
&- 4\pi^2 \alpha \sum_{j+k+l=s} (\lambda_1 \cdot ik) (u_j \cdot v_k) (w_l \cdot \bar{y}_s) \\
&- 4\pi^2 \beta \sum_{j+k+l=s} (u_j \cdot v_k) (\lambda_2 \cdot il) (w_l \cdot \bar{y}_s), \quad (7.56)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} R(u, v, w), e^{2\tau A^{\frac{1}{2}}} Ay) = (R(u, v, w), e^{2\tau A^{\frac{1}{2}}} Ay) \\
& = -4\pi^2 \rho \sum_{l+s} (w_l^* \cdot \bar{y}_s^*) |s|^2 \\
& \quad + 4\pi^2 \sum_{j_1+k_1+\dots+j_\sigma+k_\sigma+l=s} (u_{j_1}^* \cdot v_{k_1}^*) \cdots (u_{j_\sigma}^* \cdot v_{k_\sigma}^*) \\
& \quad \cdot (D_1 w_l^* \cdot \bar{y}_s^*) |s|^2 \cdot e^{\tau(|s|-|j_1|-|k_1|-\dots-j_\sigma|-k_\sigma|-|l|)} \\
& \quad - 4\pi^2 \alpha \sum_{j+k+l=s} (u_j^* \cdot v_k^*) (\lambda_1 \cdot il) (w_l^* \cdot \bar{y}_s^*) \\
& \quad \cdot |s|^2 e^{\tau(|s|-|j|-|k|-|l|)} \\
& \quad - 4\pi^2 \alpha \sum_{j+k+l=s} (\lambda_1 \cdot i_j) (u_j^* \cdot v_k^*) (w_l^* \cdot \bar{y}_s^*) \\
& \quad \cdot |s|^2 e^{\tau(|s|-|j|-|k|-|l|)} \\
& \quad - 4\pi^2 \alpha \sum_{j+k+l=s} (\lambda_1 \cdot ik) (u_j^* \cdot v_k^*) (w_l^* \cdot \bar{y}_s^*) \\
& \quad \cdot |s|^2 e^{\tau(|s|-|j|-|k|-|l|)} \\
& \quad - 4\pi^2 \beta \sum_{j+k+l=s} (u_j^* \cdot v_k^*) (\lambda_2 \cdot il) (w_l^* \cdot \bar{y}_s^*) \\
& \quad \cdot |s|^2 e^{\tau(|s|-|j|-|k|-|l|)}. \tag{7.57}
\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}
|s| &= |j_1 + k_1 + \dots + j_\sigma + k_\sigma + l| \leq |j_1| + |k_1| + \dots \\
&\quad + |j_\sigma| + |k_\sigma| + |l|,
\end{aligned}$$

因此

$$e^{\tau(|s|-|j_1|-|k_1|-\dots-j_\sigma-k_\sigma-|l|)} \leq 1. \tag{7.58}$$

类似地, 对  $s = j + k + l$  有

$$e^{\tau(|s|-|j|-|k|-|l|)} \leq 1, \tag{7.59}$$

则从(7.57)–(7.59)有

$$\begin{aligned}
& |(e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} R(u, v, w), e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} Ay)| \leq 4\pi^2 \rho \sum_{l+s} |w_l^*| |\bar{y}_s^*| |s|^2 \\
& \quad + 4\pi^2 \sqrt{1 + \mu^2} \sum_{j_1+k_1+\dots+j_\sigma+k_\sigma+l=|s|} |u_{j_1}^*| |v_{k_1}^*| \cdots |u_{j_\sigma}^*| \\
& \quad |v_{k_\sigma}^*| |w_l^*| |\bar{y}_s^*| |s|^2 \\
& \quad + 4\pi^2 \alpha |\lambda_1| \sum_{j+k+l=s} |u_j^*| |v_k^*| |l| |w_l^*| |\bar{y}_s^*| |s|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4\pi^2 \alpha \|\lambda_1\| \sum_{j+k+l=s} \|j\| \|u_j^*\| \|v_k^*\| \|w_l^*\| \|\bar{y}_s^*\| \|s\|^2 \\
& + 4\pi^2 \alpha \|\lambda_1\| \sum_{j+k+l=s} \|u_j^*\| \|k\| \|v_k^*\| \|w_l^*\| \|\bar{y}_s^*\| \|s\|^2 \\
& + 4\pi^2 \beta \|\lambda_2\| \sum_{j+k+l=s} \|u_j^*\| \|v_k^*\| \|l\| \|w_l^*\| \|\bar{y}_s^*\| \|s\|^2.
\end{aligned} \tag{7.60}$$

显然

$$4\pi^2 \rho \sum_{l=s} \|w_l^*\| \|\bar{y}_s^*\| \|s\|^2 = \rho \int_{\Omega} \xi(x) \theta(x) dx, \tag{7.61}$$

其中

$$\xi(x) = \sum_l \|w_l^*\| e^{ilx}, \theta(x) = \sum_s \|s\|^2 \|\bar{y}_s^*\| e^{isx}. \tag{7.62}$$

因此

$$\begin{aligned}
& 4\pi^2 \rho \sum_{l=s} \|w_l^*\| \|\bar{y}_s^*\| \|s\|^2 \leq \rho \left| \int_{\Omega} \xi(x) \theta(x) dx \right| \\
& \leq \rho \|\xi\| \|\theta\| = \rho \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} w\| \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} Ay\|, \tag{7.63} \\
& 4\pi^2 \sqrt{1+\mu^2} \sum_{j_1+k_1+\dots+j_\sigma+k_\sigma+l=s} \|u_{j_1}^*\| \|v_{k_1}^*\| \dots \\
& \|u_{j_\sigma}^*\| \|v_{k_\sigma}^*\| \|w_l^*\| \|\bar{y}_s^*\| \|s\|^2 \\
& = \sqrt{1+\mu^2} \int_{\Omega} \varphi_{j_1}(x) \Psi_{k_1}(x) \dots \varphi_{j_\sigma}(x) \Psi_{k_\sigma}(x) \xi(x) \theta(x) dx,
\end{aligned} \tag{7.64}$$

这里  $\xi(x), \theta(x)$  如(7.62)所示,且

$$\begin{aligned}
\varphi_{j_1} &= \|u_{j_1}^*\| e^{ij_1 x}, \Psi_{k_1}(x) = \|v_{k_1}^*\| e^{ik_1 x}, \\
&\vdots \\
\varphi_{j_\sigma}(x) &= \|u_{j_\sigma}^*\| e^{ij_\sigma x}, \Psi_{k_\sigma}(x) = \|v_{k_\sigma}^*\| e^{ik_\sigma x}.
\end{aligned} \tag{7.65}$$

由(7.64)可得

$$\begin{aligned}
& 4\pi^2 \sqrt{1+\mu^2} \sum_{j_1+k_1+\dots+j_\sigma+k_\sigma+l=s} \|u_{j_1}^*\| \\
& \cdot \|v_{k_1}^*\| \dots \|u_{j_\sigma}^*\| \|v_{k_\sigma}^*\| \|w_l^*\| \|\bar{y}_s^*\| \|s\|^2 \\
& \leq \sqrt{1+\mu^2} \left| \int_{\Omega} \varphi_{j_1}(x) \Psi_{k_1}(x) \dots \varphi_{j_\sigma}(x) \Psi_{k_\sigma}(x) \xi(x) \theta(x) dx \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sqrt{1+\mu^2} \|\varphi_{j_1}\|_{4\sigma+2} \|\Psi_{k_1}\|_{4\sigma+2} \cdots \|\varphi_{j_s}\|_{4\sigma+2} \\
&\quad \cdot \|\Psi_{k_s}\|_{4\sigma+2} \|\xi\|_{4\sigma+2} \|\theta\| \\
&\leq \sqrt{1+\mu^2} \|\varphi_{j_1}\|_{H^1} \|\Psi_{k_1}\|_{H^1} \cdots \|\varphi_{j_s}\|_{H^1} \\
&\quad \cdot \|\Psi_{k_s}\|_{H^1} \|\xi\|_{H^1} \|\theta\| \\
&\leq C_1 \|A^{\frac{1}{2}}\varphi_{j_1}\| \|A^{\frac{1}{2}}\Psi_{k_1}\| \cdots \|A^{\frac{1}{2}}\varphi_{j_s}\| \|A^{\frac{1}{2}}\Psi_{k_s}\| \\
&\quad \cdot \|A^{\frac{1}{2}}\xi\| \|\theta\| \\
&\leq C_2 \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}}y\|^\sigma \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}}v\|^\sigma \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}}w\| \\
&\quad \cdot \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} Ay\|. \tag{7.66}
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
&4\pi^2\alpha \|\lambda_1\| \sum_{j+k+l=s} \|u_j^*\| \|v_k^*\| \|l\| \|w_l^*\| \|\bar{y}_s^*\| \|s\|^2 \\
&= \alpha \|\lambda_1\| \int_{\Omega} \varphi(x) \Psi(x) \eta(x) \theta(x) dx, \tag{7.67}
\end{aligned}$$

其中  $\theta(x)$  为(7.62)所定义,且

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \|u_j^*\| e^{ijx}, \Psi(x) = \|v_k^*\| e^{ikx}, \\
\eta(x) &= \|l\| \|w_l^*\| e^{ilx}, \tag{7.68}
\end{aligned}$$

由(7.67)可得

$$\begin{aligned}
&4\pi^2\alpha \|\lambda_1\| \sum_{j+k+l=s} \|u_j^*\| \|v_k^*\| \|l\| \|w_l^*\| \|\bar{y}_s^*\| \|s\|^2 \\
&\leq \|\alpha\| \|\lambda_1\| \int_{\Omega} \varphi(x) \Psi(x) \eta(x) \theta(x) dx \\
&\leq \|\alpha\lambda_1\| \|\varphi\|_8 \|\Psi\|_8 \|\eta\|_4 \|\theta\| \\
&\leq C_3 \|\varphi\|_{H^1} \|\Psi\|_{H^1} \|\eta\|_{\frac{1}{2}} \|\eta\|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \|\theta\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_4 \|A^{\frac{1}{2}}\varphi\| \|A^{\frac{1}{2}}\Psi\| \|\eta\| \|A^{\frac{1}{2}}\eta\|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \|\theta\| \\
&\leq C_5 \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}}u\| \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}}v\| \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}}w\|^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} Aw\|^{\frac{1}{2}} \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} Ay\|. \tag{7.69}
\end{aligned}$$

类似于(7.69)有

$$\begin{aligned}
& 4\pi^2\alpha \|\lambda_1\| \sum_{j+k+l=s} \|u_j^*\| \|v_k^*\| \|w_l^*\| \|\bar{y}_s^*\| \|s\|^2 \\
& \leq C_6 \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} u\|^{\frac{1}{2}} \cdot \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} Au\|^{\frac{1}{2}} \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} v\| \\
& \quad \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} w\| \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} Ay\|, \quad (7.70)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4\pi^2\alpha \|\lambda_1\| \sum_{j+k+l=s} \|u_j^*\| \|k\| \|v_k^*\| \|w_l^*\| \|\bar{y}_s^*\| \|s\|^2 \\
& \leq C_7 \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} u\| \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} v\|^{\frac{1}{2}} \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} Av\|^{\frac{1}{2}} \\
& \quad \cdot \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} w\| \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} Ay\|, \quad (7.71)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4\pi^2\beta \sum_{j+k+l=s} \|u_j^*\| \|v_k^*\| \|l\| \|w_l^*\| \|\bar{y}_s^*\| \|s\|^2 \\
& \leq C_8 \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} u\| \cdot \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} v\| \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} w\|^{\frac{1}{2}} \\
& \quad \cdot \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} Aw\|^{\frac{1}{2}} \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} Ay\|. \quad (7.72)
\end{aligned}$$

由(7.60), (7.63), (7.66) — (7.69) 推得引理的结论.

由引理 7.5 可得

$$\begin{aligned}
& |(e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} R(u, u, u), e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} Au)| \leq \rho \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} u\| \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} Au\| \\
& \quad + C \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} u\|^{2\sigma+1} \cdot \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} Au\| \\
& \quad + C \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} u\|^{\frac{5}{2}} \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} Au\|^{\frac{3}{2}} \\
& \leq \epsilon \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} Au\|^2 + C_1(\epsilon) \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} u\|^2 \\
& \quad + C_2(\epsilon) \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} u\|^{4\sigma+2} + C_3(\epsilon) \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} u\|^{10} \\
& \leq \epsilon \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} Au\|^2 + C_4(\epsilon) \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} u\|^{4\sigma+2} \\
& \quad + C_5(\epsilon) \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} u\|^{4\sigma+2} + C_6 \\
& \leq \epsilon \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} Au\|^2 + C_7(\epsilon) \|e^{\tau A^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} u\|^{4\sigma+2} + C_6. \quad (7.73)
\end{aligned}$$

**定理 7.6** 设条件(7.4)满足,  $u_0 \in H^2(\Omega)$ , 则存在常数  $k$  依赖于初值, 使得问题 (7.1) — (7.3) 解的每个分量具有  $D(A^{\frac{1}{2}} \exp(kA^{\frac{1}{2}}))$  值的解析延拓在如下复区域



$$\Delta = \{t + se^{i\theta}, t \geq t_*, |\theta| \leq \theta_0, 0 \leq s \leq T_0\}, \quad (7.74)$$

且

$$\|e^{k\Lambda^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} u(z)\| \leq K, z \in \Delta, \quad (7.75)$$

这里  $\theta_0, T_0$  和  $K$  依赖于初值,  $|\theta_0| \leq \frac{\pi}{4}, t_*$  依赖于初值和  $R$ ,  $\|u_0\|_{H^1} \leq R$ .

证 由(7.6)和(7.73)可知[14]的定理3.1成立,因此定理得证.

由定理7.6和Cauchy公式可得

$$\|e^{k\Lambda^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} u(t)\| \leq K_1, \quad \forall t \geq t_1. \quad (7.76)$$

由(7.75)和(7.76)可得,当  $t$  充分大时有

$$\|e^{k\Lambda^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} q(t)\| \leq K, \quad \|e^{k\Lambda^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} q(t)\| \leq K_1, \quad (7.77)$$

其中  $q(t) = Q_m u(t)$ . 因此当  $t \geq t_*$  时

$$\begin{aligned} \|A^{\frac{1}{2}} q(t)\| &\leq K e^{-k\lambda_{m+1}^{\frac{1}{2}}}, \quad \|q(t)\| \leq K \lambda_{m+1}^{\frac{1}{2}} e^{-k\lambda_{m+1}^{\frac{1}{2}}}, \\ \left\| \frac{dq(t)}{dt} \right\| &\leq K_1 \lambda_{m+1}^{\frac{1}{2}} e^{-k\lambda_{m+1}^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (7.78)$$

应用(7.78)代替(7.25),类似于定理7.4有

**定理7.7** 设(7.4)成立,  $u_0 \in H^2(\Omega)$ , 则存在常数  $E$  依赖于初值,使得

$$\text{dist}_H(\Sigma, u(t)) \leq E \lambda_{m+1} e^{-k\lambda_{m+1}^{\frac{1}{2}}}, t \geq t_*, \quad (7.79)$$

其中,  $u(t)$  为问题(7.1)–(7.3)的解,  $\Sigma$  为它的近似惯性流形,  $t_*$  依赖于初值和  $R$ ,  $\|u_0\|_{H^1} \leq R$ .

## §8 无界域上广义 Ginzburg-Landau 方程的整体吸引子

前面已提到,郭柏灵和王碧祥在[5]中考虑了如下的二维具

导数 Ginzburg-Landau 方程:

$$u_t = \rho u + (1 + i\nu)\Delta u - (1 + i\mu) |u|^{2\sigma} u + \alpha \lambda_1 \cdot \nabla (|u|^2 u) + \beta (\lambda_2 \cdot \nabla u) |u|^2, \quad (8.1)$$

其中  $\rho > 0, \alpha, \beta, \nu, \mu$  均为实数,  $\lambda_1, \lambda_2$  为实常数向量. 他们证明了方程(8.1) 具周期条件整体吸引子的有限维性质. 对方程的参数作了如下的假定

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\mu - \nu\delta^2}{1 + \delta^2} \right)^2}} \geq \sigma \geq 3 \quad (8.2)$$

之后, 高洪俊, 段金桥在[15] 中证明了(8.1) 解的存在性. 他们证明 Cauchy 问题

$$u_t = \alpha_0 u + \alpha_1 \Delta u + \alpha_2 |u|^2 u_x + \alpha_3 |u|^2 u_y + \alpha_4 u^2 u_x + \alpha_5 u^2 u_y - \alpha_6 |u|^{2\sigma} u, \quad (8.3)$$

$H^2$  整体解的存在性, 其中  $\alpha_0 > 0, \alpha_j = a_j + ib_j, 1 \leq j \leq 6, a_1 > 0, a_6 > 0, \sigma > 0$ . 他们假设当  $b_1 b_6 > 0$  时,  $\sigma \geq \frac{1 + \sqrt{10}}{2}$  或者如  $b_6 = 0$  或  $b_1 b_6 < 0$ , 则存在一个正数  $\delta > 0$ , 使得

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(b_1 \delta - b_6)^2}{(1 + \delta)(a_1 \delta + a_4)}}} \geq \sigma \geq \frac{1 + \sqrt{10}}{2}. \quad (8.4)$$

郭柏灵、李用声在[16] 中对参数更为广泛的条件和初值更弱的条件下证明整体解的存在性.

在[16] 中, 郭柏灵、李用声考虑二维具导数 Ginzburg-Landau 方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_t = \gamma u + (1 + i\nu)\Delta u - (1 + i\mu) |u|^{2\sigma} u + \lambda_1 \cdot \nabla (|u|^2 u) \\ \quad + (\lambda_2 \cdot \nabla u) |u|^2, t \geq 0, x \in \mathbb{R}^2; \end{cases} \quad (8.5)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), x \in \mathbb{R}^2; \quad (8.6)$$

其中  $\gamma > 0, \nu, \mu$  为实数,  $\lambda_1, \lambda_2$  为具复分量的常数向量. 我们研究问题(8.5), (8.6) 的长时间行态, 关于  $\sigma, \nu, \mu$  的主要假设为

$$(A)(i) \sigma > 2, (ii) -1 - \nu\mu < \frac{\sqrt{2\sigma+1}}{\sigma} |\nu - \mu|.$$

得到主要定理如下.

**定理 8.1** 设  $\sigma, \nu, \mu$  满足 (A), 则 GL 方程的 Cauchy 问题 (8.5), (8.6) 形成一个半群  $S(t)$ , 它具有整体吸引子  $\mathcal{A} \subset H_{lu}^1$ , 具有性质

(1) (不变性)  $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}, \forall t \geq 0$ ;

(2) (紧性)  $\mathcal{A}$  在  $H_{lu}^2$  中有界, 在空间  $H_{\rho}^1$  中紧;

(3) (吸引性) 对任何有界集  $B \subset H_{lu}^1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}_{\rho}(S(t)B, \mathcal{A}) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{v \in B} \text{dist}_{\rho}(S(t)v, \mathcal{A}) = 0.$$

**附注 (i)** 加权空间  $H_{\rho}^m, H_{lu}^m$  的定义即将在下面给出,  $\text{dist}_{\rho}$  表示在空间  $H_{\rho}^1$  中的距离,  $\mathcal{A}$  常称之为  $(H_{lu}^1, H_{\rho}^1)$  吸引子.

(ii) 在  $(\nu, \mu)$  平面上区域

$$|\nu| < \frac{\sqrt{2\sigma+1}}{\sigma}, \quad |\mu| < \frac{\sqrt{2\sigma+1}}{\sigma}$$

是被包含在 (A) (ii) 的双曲线区域的.

(iii) 当  $\sigma = 2$  时, 如设  $|\lambda_1|, |\lambda_2|$  适当小, 则主要定理仍成立.

先给出局部解的存在性.

设  $\rho > 0$  为适当加权函数, 满足

$$|\nabla \rho(x)|, |\Delta \rho(x)| \leq \rho_0 \rho(x), \quad \int \rho(x) dx = \rho_0 < +\infty. \quad (8.7)$$

例如可取  $\rho = \frac{1}{\cosh|x|}$  或  $\rho = e^{-|x|}$ , 令  $T_y \rho(x) = \rho(x-y)$ , 加权  $L^p$  模为

$$\|u\|_{p, \rho} = \left( \int \rho |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 < p < \infty.$$

一致局部模  $\|u\|_{p, lu} = \sup_{v \in R^2} \|u\|_{p, T_v \rho}.$

$L_{\rho}^p$  表示加权  $L^p$  空间,  $\|u\|_{p, \rho} < +\infty$ ,  $L_{lu}^p$  表示一致局部空间

$$\|u\|_{p,lu} < +\infty, \|T_y u - u\|_{p,lu} \rightarrow 0, y \rightarrow 0.$$

易知空间  $L^p_\rho, L^p_{lu}$  为 Banach 空间, 定义加权 Sobolev 空间  $W^{m,p}_\rho$

$$\|u\|_{W^{m,p}_\rho} = \left( \sum_{k \leq m} \|D^k u\|_{p,\rho}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

一致局部 Sobolev 空间  $W^{m,p}_{lu}$  为  $C^\infty_b$  空间在模  $\|u\|_{W^{m,p}_{lu}} = \sup_{y \in K^2} \|u\|_{W^{m,p}_\rho}$

的完备化, 特别  $H^m_\rho = W^{m,2}_\rho, H^m_{lu} = W^{m,2}_{lu}$ .

对任何加权函数  $\rho^*$  具有性质 (8.7),  $\rho_0$  模为  $k$ , 则有

$$\|u\|_{p,\rho^*} \leq C(\rho_0, k) \|u\|_{p,lu}.$$

可以得到广义的 Gagliardo-Nirenberg 型插值不等式,

$$\|u\|_{W^{j,r}_{lu}} \leq C \|u\|_{L^{1/q}_{lu}}^{\frac{j}{\theta}} \|u\|_{W^{m,p}_{lu}}^{\frac{\theta-j}{\theta}}, u \in L^q_{lu} \cap W^{m,p}_{lu}(R^n),$$

其中  $\frac{1}{r} - \frac{j}{n} = \theta \left( \frac{1}{p} - \frac{m}{n} \right) + \frac{1-\theta}{q}, 1 < p, q, r < \infty, j, m$  为整数,  $0$

$\leq j \leq m, \frac{j}{m} \leq \theta \leq 1$ . 常数  $C$  依赖于  $\rho$  仅通过它的积分  $\rho_0$ . 我们有紧嵌入

$$W^{m,p}_{lu}(R^n) \rightarrow W^{j,r}_{lu}(R^n), \frac{1}{r} > \frac{1}{p} - \frac{m-j}{n},$$

$1 < p, r < \infty$ . 我们注意到由于平移不变性, 嵌入  $W^{m,p}_{lu}(R^n) \rightarrow W^{j,r}_{lu}(R^n)$  不是紧的.

对任何  $1 < p < \infty, X_p = L^p_{lu}$ , 定义线性算子  $A_p: D(A_p) \subset X_p \rightarrow X_p$ ,

$$A_p u = (1 + i\nu) \Delta u, D(A_p) = W^{2,p}_{lu}.$$

能证明 [16] 当  $p \geq 2, A_p$  具有如下性质:

存在  $C_0(\nu) > 0, C_1(\nu, p) > 0$  使得

$$\|(Z - A_p)f\|_{p,lu} \leq \frac{C_1}{|Z - R|} \|f\|_{p,lu}, \forall f \in L^p_{lu}. \quad (8.8)$$

对每个  $Z$  在扇形

$$\begin{aligned} S(\nu, R) &= \{Z \in \mathbb{C} \mid Z \neq R, |\arg(Z - R)| \\ &\leq \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2} \arg(1 + i\nu)\} \end{aligned} \quad (8.9)$$

其中  $\tilde{R} = C_0(\nu)\rho_0^2$ , 从(8.8)中可知

$$\|(Z - A_p)f\|_{p,\rho} \leq -\frac{C_1}{|Z - R|} \|f\|_{p,\rho}, \forall f \in L_\rho^p. \quad (8.10)$$

我们将证明上述估计对于  $A_p$  的预解式也成立,  $1 < p < 2$ . 注意到  $L_\rho^p$  对偶空间为  $L_\rho^{p'}$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, 1 < p, p' < \infty$ , 对偶内积为

$$(u, v)_\rho = \int \rho u \bar{v} dx, u \in L_\rho^p, v \in L_\rho^{p'}.$$

因此,  $L_\rho^p$  为自反 Banach 空间, 对任何  $u \in L_\rho^p, 1 < p < 2$ , 存在一个非零函数  $f \in L_\rho^{p'}$ , 使得

$$\langle u, f \rangle_\rho = \|u\|_{p,\rho} \|f\|_{p',\rho}.$$

注意到当  $Z \in S(\nu, k)$  时, (8.8), (8.10) 对  $\bar{Z}, \bar{A}_p = (1 - i\nu)/\Delta$  也成立, 因此存在  $v \in W_\rho^{2,p'}$  使得

$$(\bar{Z} - \bar{A}_p)v = f.$$

于是  $\langle u, (\bar{Z} - \bar{A}_p)v \rangle_\rho = \|u\|_{p,\rho} \|(\bar{Z} - \bar{A}_p)v\|_{p',\rho}$ , 由分部积分得

$$\begin{aligned} & \|u\|_{p,\rho} \|(\bar{Z} - \bar{A}_p)v\|_{p',\rho} = \langle u, (\bar{Z} - \bar{A}_p)v \rangle_\rho \\ &= \langle (Z - A_p)u, v \rangle_\rho + 2 \int (1 + i\nu) \nabla \rho \nabla \bar{u} dx \\ & \quad + \int (1 + i\nu) \Delta \rho u \bar{v} dx \\ & \leq \langle (Z - A_p)u, v \rangle_\rho + 2\rho_\nu \|u\|_{p,\rho} \|v\|_{W_\rho^{1,p}}, \end{aligned} \quad (8.11)$$

其中  $\rho_\nu = \rho_0 \sqrt{1 + \nu^2}$ , 由插值得

$$\begin{aligned} & \|v\|_{W_\rho^{1,p'}} \leq \varepsilon \|\bar{A}_p v\|_{p',\rho} + C(\varepsilon) \|v\|_{p',\rho} \\ & \leq \varepsilon \|(\bar{Z} - \bar{A}_p)v\|_{p',\rho} \\ & \quad + (\varepsilon |Z| + C(\varepsilon)) \|v\|_{p',\rho}, \forall \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

选取  $\varepsilon$  充分小, 使  $\varepsilon \rho_\nu < \frac{1}{4}$ , 将上面不等式代入(8.11)得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|u\|_{p,\rho} \|(Z - A_p)v\|_{p',\rho} \leq \langle (Z - A_p)u, v \rangle_\rho \\ & \quad + 2\rho_\nu (\varepsilon |Z| + C(\varepsilon)) \|u\|_{p,\rho} \|v\|_{p',\rho}. \end{aligned}$$

从  $\bar{A}_{p'}$  的预解式估计(8.10)有

$$\|(\bar{Z} - \bar{A}_{p'})v\|_{p', \rho} \geq \frac{\|Z - R\|}{C_1} \|v\|_{p', \rho},$$

由此可得

$$\begin{aligned} \frac{\|Z - R\|}{2C_1} \|u\|_{p, \rho} \|v\|_{p, \rho} &\leq \langle (Z - A_p)u, v \rangle_\rho \\ &\quad + 2\rho_\nu(\epsilon \|Z\| + C(\epsilon)) \|u\|_{p, \rho} \|v\|_{p', \rho} \\ &\leq \langle (Z - A_p)u, v \rangle_\rho + 2\rho_\nu(\epsilon \|Z - R\| \\ &\quad + \epsilon R + C(\epsilon)) \|u\|_{p, \rho} \|v\|_{p', \rho}. \end{aligned}$$

选取  $\epsilon = \min \left\{ \frac{1}{4\rho_\nu}, \frac{1}{8C_1\rho_\nu} \right\}$ , 则有

$$\begin{aligned} \frac{\|Z - \tilde{R}\|}{4C_1} \|u\|_{p, \rho} \|v\|_{p', \rho} &\leq \langle (Z - A_p)u, v \rangle_\rho \\ &\quad + \frac{R_0}{4C_1} \|u\|_{p, \rho} \|v\|_{p', \rho}, \end{aligned} \quad (8.12)$$

其中  $R_0 = 8C_1\rho_\nu(\epsilon\tilde{R} + C(\epsilon))$ . 取  $R_1 = R + 2\sqrt{2}R_0$ , 则对任何  $Z \in S(\nu, R_1)$ ,  $|Z - \tilde{R}| \geq 2R_0$ . (注意扇形  $S(\nu, R_1)$  的半角小于  $\frac{3\pi}{4}$ ), 因此

$$|Z - R_1| \leq |Z - \tilde{R}| + R_1 - \tilde{R} \leq |Z - \tilde{R}|(1 + \sqrt{2})R_0,$$

或

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} |Z - R_1| \leq |Z - \tilde{R}|.$$

于是

$$|Z - R| - R_0 \geq \frac{1}{2} |Z - \tilde{R}| \geq \frac{1}{2(\sqrt{2}+1)} |Z - R_1|.$$

因此, 从上面和(8.12)有

$$\begin{aligned} \frac{\|Z - R_1\|}{C_2} \|u\|_{p, \rho} \|v\|_{p', \rho} &\leq \langle (Z - A_p)u, v \rangle_\rho \\ &\leq \|(Z - A_p)u\|_{p, \rho} \|v\|_{p', \rho}, \end{aligned}$$

这里  $C_2 = 8(\sqrt{2} + 1)C_1$  与  $\rho$  无关, 故

$$\frac{|Z - R_1|}{C_2} \|u\|_{p, \rho} \leq \| (Z - A_\rho) u \|_{p, \rho},$$

$$\forall Z \in S(\nu, R_1). \quad (8.13)$$

以  $T_{y\rho}$  代替  $\rho$ , 再在  $y \in \mathbb{R}^n$  上取上界有

$$\frac{|Z - R_1|}{C_2} \|u\|_{p, lu} \leq \| (Z - A_\rho) u \|_{p, lu},$$

$$\forall Z \in S(\nu, R_1). \quad (8.14)$$

因此我们得到  $A_p (1 < p < 2)$  预解式的估计

$$\| (Z - A_\rho)^{-1} u \|_{p, \rho} \leq \frac{C_2}{|Z - R_1|} \|u\|_{p, \rho},$$

$$\forall Z \in S(\nu, R_1), \quad (8.15)$$

$$\| (Z - A_\rho)^{-1} u \|_{p, lu} \leq \frac{C_2}{|Z - R_1|} \|u\|_{p, lu},$$

$$\forall Z \in S(\nu, R_1), \quad (8.16)$$

这是  $A_p$  形成一个在  $L_{lu}^p$  上的解析半群的重要条件.

令  $B_p = A_p - (R_1 + 1)$ , 则  $0 \in S(\nu, -1)$  包含在  $B_p$  的预解式中, 且  $B_p$  在  $X_p$  上形成解析半群  $e^{B_p t} (t \geq 0)$ , 具有性质:

$$\| e^{B_p t} u \|_{X_p} \leq M e^{-\omega t} \|u\|_{X_p}, \quad \forall u \in X_p, t \geq 0, \quad (8.17)$$

$$\| e^{B_p t} u \|_{W_{lu}^{s, p}} \leq M t^{-s/2} e^{-\omega t} \|u\|_{X_p},$$

$$\forall u \in X_p, s = 0, 1, 2, t > 0, \quad (8.18)$$

$$\| e^{B_p t} u \|_{W_{lu}^{q+1, q}} \leq M t^{-\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)} e^{-\omega t} \|u\|_{W_{lu}^{s, p}},$$

$$\forall u \in W_{lu}^{s, p}, \quad 1 < p \leq q, \quad t > 0, \quad (8.19)$$

其中  $M$  和  $\omega$  为某正数. 上面最后不等式由插值得到的, 令

$$F(u) = (\gamma + R_1 + 1)u + (1 + i\mu)|u|^{2\sigma}u$$

$$+ (\lambda_1 \cdot \nabla)(|u|^2 u) + (\lambda_2 \cdot \nabla u)|u|^2. \quad (8.20)$$

我们能写问题(8.5), (8.6)为泛函形式

$$u_t = B_p u + F(u), \quad u(0) = u_0. \quad (8.21)$$

不难看出,非线性映照  $F(u)$  是一个局部 Lipschitz 连续的:  $D(B^{\frac{1}{2}}) = H_{lu}^1 \rightarrow X_p, p = \frac{3}{2}$ . (8.21) 的解能写成积分方程形式

$$u(t) = e^{B_p t} u_0 + \int_0^t e^{B_p(t-s)} F(u(s)) ds. \quad (8.22)$$

设  $u_0 \in H_{lu}^1$ , 定义映照  $\bar{\mathcal{J}}: C([0, T]; H_{lu}^1) \ni \varphi \rightarrow u(t) = \mathcal{J}_\varphi$  为

$$u(t) = e^{B_p t} u_0 + \int_0^t e^{B_p(t-s)} F(\varphi(s)) ds, t \in [0, T].$$

如我们能证明,  $\exists T > 0$ ,  $\bar{\mathcal{J}}$  在  $C([0, T]; H_{lu}^1)$  上是压缩的, 则  $\mathcal{J}$  的不动点为 (8.22) 的局部解, 事实上, 对任何  $\varphi \in C([0, T]; H_{lu}^1)$ ,

$$\begin{aligned} L &= \sup_{[0, T]} \|\varphi\|_{H_{lu}^1}, \\ \|F(\varphi)\|_{L_{lu}^{\frac{3}{2}}} &\leq C(\|\varphi\|_{H_{lu}^1}^{\frac{3}{2}} + \|\varphi\|_{H_{lu}^1}^{2\sigma+1} \\ &\quad + \|\varphi\|_{H_{lu}^1}^2 \|\nabla \varphi\|_{L_{lu}^2}) \leq C(L^{2\sigma+1} + 1). \end{aligned}$$

由 (8.22) 和不等式 (8.19) 可得

$$\begin{aligned} \|\mathcal{J}\varphi(t)\|_{H_{lu}^1} &\leq Me^{-wt} \|u_0\|_{H_{lu}^1} \\ &\quad + \int_0^t \|e^{B_p(t-s)} F(\varphi(s))\|_{H_{lu}^1} ds \\ &\leq Me^{-wt} \|u_0\|_{H_{lu}^1} + \int_0^t M(t-s)^{-\frac{2}{3}} e^{-w(t-s)} \\ &\quad \times \|F(\varphi(s))\|_{L_{lu}^{\frac{3}{2}}} ds \\ &\leq Me^{-wt} \|u_0\|_{H_{lu}^1} + \int_0^t CM(t-s)^{-\frac{2}{3}} e^{-w(t-s)} (L^{2\sigma+1} + 1) ds \\ &\leq Me^{-wt} \|u_0\|_{H_{lu}^1} + CMT^{\frac{1}{3}} (L^{2\sigma+1} + 1). \end{aligned}$$

于是  $\mathcal{J}\varphi \in C([0, T]; H_{lu}^1)$ , 对  $L > 0, \varphi, \psi \in C([0, T]; H_{lu}^1)$  具有  $\sup_{[0, T]} \|\varphi\|_{H_{lu}^1} \leq L, \sup_{[0, T]} \|\psi\|_{H_{lu}^1} \leq L$ ,

$$\begin{aligned} &\|F(\varphi(s)) - F(\psi(s))\|_{L_{lu}^{\frac{3}{2}}} \\ &\leq C(L^{2\sigma} + 1) \|\varphi(s) - \psi(s)\|_{H_{lu}^1}. \end{aligned}$$

于是

$$\|\bar{\mathcal{J}}\varphi(t) - \bar{\mathcal{J}}\psi(t)\|_{H_{lu}^1}$$



$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^t \| e^{B_p(t-s)} (F(\varphi(s)) - F(\psi(s))) \|_{H_{lu}^1} ds \\
&\leq \int_0^t M(t-s)^{\frac{2}{3}} e^{-w(t-s)} \| F(\varphi(s)) - F(\psi(s)) \|_{L_{lu}^{\frac{3}{2}}} ds \\
&\leq \int_0^t MC(t-s)^{\frac{2}{3}} e^{-w(t-s)} (L^{2\sigma} + 1) \| \varphi(s) - \psi(s) \|_{H_{lu}^1} ds \\
&\leq CMT^{\frac{1}{3}} (L^{2\sigma} + 1) \sup_{[0, T]} \| \varphi(t) - \psi(t) \|_{H_{lu}^1}.
\end{aligned}$$

因此, 当  $CMT^{\frac{1}{3}}(L^{2\sigma} + 1) \leq \frac{1}{2}$ ,  $\bar{\varphi}$  在  $C([0, T]; H_{lu}^1)$  上是压缩的, 我们有

**定理 8.2 (局部存在性)** 如  $u_0 \in H_{lu}^1$ , 则存在抽象 Cauchy 问题 (8.21) 在区间  $[0, T_*)$  上的惟一解.

$u(t) \in C([0, T_*), H_{lu}^1) \cap C([0, T_*), H_{lu}^2)$ , 若  $T^* < \infty$ , 则

$$\lim_{t \rightarrow T^*} \| u(t) \|_{H_{lu}^1} = +\infty.$$

由下面光滑性证明可知  $u(t) \in C([0, T_*), H_{lu}^2)$ .

以下作解的加权估计.

**引理 8.3** 设 (A) 成立且

$$2 \leq p < \frac{2\sqrt{1+\nu^2}}{\sqrt{1+\nu^2}-1}, \quad (8.23)$$

则存在常数  $C$  与  $R$  无关和  $t_0(R) > 0$  使得当  $\| u_0 \|_{p, \rho} \leq R$  时有

$$\| u \|_{p, \rho} \leq C, t \geq t_0(R).$$

**证** 直接计算得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p} \frac{d}{dt} \| u \|_{p, \rho}^p &= \operatorname{Re} \int \rho |u|^{p-2} \bar{u} u_t dx \\
&= \operatorname{Re} \int \rho |u|^{p-2} \bar{u} [\gamma u + (1 + i\nu) \Delta u - (1 + i\mu) |u|^{2\sigma} u \\
&\quad + (\lambda_1 \cdot \nabla)(|u|^2 u) + (\lambda_2 \cdot \nabla u) |u|^2] dx \\
&= \gamma \| u \|_{p, \rho}^p - \| u \|_{p+2\sigma, \rho}^{p+2\sigma} + I_1 + I_2, \quad (*)
\end{aligned}$$

其中  $I_1 = \operatorname{Re} \int (1 + i\nu) \rho |u|^{p-2} \bar{u} \Delta u dx$ ,

$$I_2 = \operatorname{Re} \int \rho |u|^{p-2} \bar{u} ((\lambda_1 \cdot \nabla)(|u|^2 u) + (\lambda_2 \cdot \nabla u) |u|^2) dx.$$

分部积分得:

$$\begin{aligned} I_1 &= -\operatorname{Re} \int (1 + i\nu) \nabla \rho |u|^{p-2} \bar{u} \nabla u dx - \operatorname{Re} \int (1 + i\nu) \\ &\quad \rho \nabla(|u|^{p-2} \bar{u}) \nabla u dx \\ &= -\operatorname{Re} \int (1 + i\nu) \nabla \rho |u|^{p-2} \bar{u} \nabla u dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int \rho |u|^{p-4} [p |u|^2 |\nabla u|^2 + (1 + i\nu) \\ &\quad (p-2) \bar{u}^2 (\nabla u)^2] dx \\ &= -\operatorname{Re} \int (1 + i\nu) \nabla \rho |u|^{p-2} u \nabla u dx \\ &\quad - \frac{1}{4} \int \rho |u|^{p-4} \sum_{j=1}^2 (\bar{u} \partial_j u, u \partial_j \bar{u}) M(\nu, p) \left( \frac{u \partial_j \bar{u}}{\bar{u} \partial_j u} \right) dx, \end{aligned} \quad (8.24)$$

这里

$$M(\nu, p) = \overline{M(\nu, p)}^{\nu} = \begin{pmatrix} p(1+i\nu)(p-2) \\ * & p \end{pmatrix}. \quad (8.25)$$

当(8.23)满足时,  $M(\nu, p)$  的最小特征值

$$\lambda_M(\nu, p) = p - |p-2| \sqrt{1+\nu^2} > 0. \quad (8.26)$$

因此  $M(\nu, p)$  是正定的, 我们有

$$\begin{aligned} I_1 &< \rho_\nu \int \rho |u|^{p-1} |\nabla u| dx - \frac{1}{4} \lambda_M(\nu, p) \int \rho |u|^{p-2} |\nabla u|^2 dx \\ &\leq \frac{2\rho_\nu^2}{\lambda_M(\nu, p)} \int \rho |u|^p dx - \frac{1}{8} \lambda_M(\nu, p) \int \rho |u|^{p-2} |\nabla u|^2 dx. \end{aligned}$$

由 Cauchy 不等式

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq (3|\lambda_1| + |\lambda_2|) \int \rho |u|^{p+1} |\nabla u| dx \\ &\leq \frac{1}{8} \lambda_M(\nu, p) \int \rho |u|^{p-2} |\nabla u|^2 dx \\ &\quad + \frac{2(3|\lambda_1| + |\lambda_2|)^2}{\lambda_M(\nu, p)} \int \rho |u|^{p+4} dx, \end{aligned}$$

因  $\sigma > 2$ , 由 Hölder 不等式有

$$\begin{aligned} & \frac{2(3|\lambda_1| + |\lambda_2|)^2}{\lambda_M(\nu, p)} \int \rho |u|^{p+4} dx \\ & \leq \frac{2(3|\lambda_1| + |\lambda_2|)^2}{\lambda_M(\nu, p)} \left( \int \rho |u|^p dx \right)^{1-\frac{2}{\sigma}} \left( \int \rho |u|^{p+2\sigma} dx \right)^{\frac{2}{\sigma}} \\ & \leq \frac{1}{2} \|u\|_{p+2\sigma, \rho}^{p+2\sigma} + C_1 \|u\|_{p, \rho}^p, \end{aligned}$$

其中

$$C_1 = \frac{\sigma-2}{\sigma} \left( \frac{\sigma}{4} \right)^{\frac{2(\sigma-2)}{\sigma^2}} \left( \frac{2(3|\lambda_1| + |\lambda_2|)^2}{\lambda_M(\nu, p)} \right)^{\frac{2\sigma}{\sigma-2}},$$

于是可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|u\|_{p, \rho}^p & \leq C_2 \|u\|_{p, \rho}^p - \frac{1}{2} \|u\|_{p+2\sigma, \rho}^{p+2\sigma} \\ & \leq -\frac{C_2}{p} \|u\|_{p, \rho}^p + \frac{C_3}{p}, \end{aligned}$$

这里  $C_2 = \gamma + \frac{2\rho^2}{\lambda_M(\nu, \rho)} + C_1, C_3 = \sigma_{\rho_0} \left( \frac{2C_2(p+1)}{p+2\sigma} \right)^{\frac{p+2\sigma}{2\sigma}}.$

由 Gronwall 不等式有

$$\|u\|_{p, \rho}^p \leq \|u_0\|_{p, \rho}^p e^{-C_2 t} + \frac{C_3}{C_2}, \quad t \geq 0.$$

引理得证.

**附注** 当  $\sigma = 2$  时, 设  $6|\lambda_1| + 2|\lambda_2| < \lambda_M(\nu, p)$ , 则引理仍然成立.

**引理 8.4** 在假设 (A) 下, 存在常数  $C$  与  $R$  无关和  $t_1(R) > 0$ , 使得当  $\|u_0\|_{H_\rho^1} \leq R$  时,

$$\|\nabla u(t)\|_{2, \rho}^2 \leq C, \quad t \geq t_1(R).$$

**证** 由方程 (8.5) 和分部积分得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int \rho |\nabla u|^2 dx & = \operatorname{Re} \int \rho \nabla \bar{u} \nabla u_i dx \\ & = \operatorname{Re} \int \rho \nabla \bar{u} \nabla [\gamma u + (1 + i\nu)\Delta u - (1 + i\mu)|u|^{2\sigma} u] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\lambda_1 \cdot \nabla)(|u|^2 u) + (\lambda_2 \cdot \nabla u) |u|^2 dx \\
= & \gamma \|\nabla u\|_{\frac{2}{2}, \rho}^2 - \|\Delta u\|_{\frac{2}{2}, \rho}^2 - \operatorname{Re} \int (1 + i\nu) \nabla \rho \nabla \bar{u} \Delta u dx \\
& + \operatorname{Re} \int (1 + i\mu) \rho |u|^{2\sigma} u \Delta \bar{u} dx \\
& + \operatorname{Re} \int (1 + i\mu) \nabla \rho \Delta \bar{u} |u|^{2\sigma} u dx \\
& - \operatorname{Re} \int \rho \Delta \bar{u} [(\lambda_1 \cdot \nabla)(|u|^2 u) + (\lambda_2 \cdot \nabla u) |u|^2] dx \\
& - \operatorname{Re} \int \nabla \rho \nabla \bar{u} [(\lambda_1 \cdot \nabla)(|u|^2 u) + (\lambda_2 \cdot \nabla u) |u|^2] dx \\
= & \gamma \|\nabla u\|_{\frac{2}{2}, \rho}^2 - \|\Delta u\|_{\frac{2}{2}, \rho}^2 + \sum_{k=3}^7 I_k, \tag{8.27}
\end{aligned}$$

其中  $|I_3| = |-\operatorname{Re} \int (1 + i\nu) \nabla \rho \nabla \bar{u} \Delta u dx| \leq \rho_\nu \int \rho |\nabla u| |\Delta u| dx$ ,

$$I_4 = \operatorname{Re} \int \rho (1 - i\mu) |u|^{2\sigma} \bar{u} \Delta u dx,$$

$$\begin{aligned}
|I_5| &= |-\operatorname{Re} \int (1 + i\mu) \nabla \rho \nabla \bar{u} |u|^{2\sigma} \Delta u dx| \\
&\leq \rho_\mu \int \rho |u|^{2\sigma+1} |\nabla u| dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|I_6| &= |-\operatorname{Re} \int \nabla \rho \nabla \bar{u} [(\lambda_1 \cdot \nabla)(|u|^2 u) \\
&\quad + (\lambda_2 \cdot \nabla u) |u|^2] dx| \\
&\leq (3|\lambda_1| + |\lambda_2|) \rho_0 \int \rho |u|^2 |\nabla u|^2 dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|I_7| &= |-\operatorname{Re} \int \rho \Delta \bar{u} [(\lambda_1 \cdot \nabla)(|u|^2 u) + (\lambda_2 \cdot \nabla u) |u|^2] dx| \\
&\leq (3|\lambda_1| + |\lambda_2|) \int \rho |u|^2 |\nabla u| |\Delta u| dx.
\end{aligned}$$

令  $\delta > 0$  (待定), 定义

$$V_\delta(u(t)) = \int \rho \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{\delta}{2\delta+2} |u|^{2\sigma+2} \right) dx, \tag{8.28}$$

从(8.27)和(\*)具  $p = 2\sigma + 2$  得

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} V_\delta(u(t)) &= \gamma (\|\nabla u\|_{\frac{2}{2}, \rho}^2 + \delta \|u\|_{\frac{2\sigma+2}{2}, \rho}^{2\sigma+2}) \\
&\quad - (\|\Delta u\|_{\frac{2}{2}, \rho}^2 + \delta \|u\|_{\frac{4\sigma+2}{2}, \rho}^{4\sigma+2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\delta I_1 + I_4) + I_3 + I_5 + I_6 + \delta I_2 + I_7 \\
\leq & \gamma (\|\nabla u\|_{2,\rho}^2 + \delta \|u\|_{\frac{2\sigma+2}{2},\rho}^2) \\
& - (\|\Delta u\|_{2,\rho}^2 + \delta \|u\|_{\frac{4\sigma+2}{2},\rho}^2) \\
& + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int \rho (|u|^{2\sigma} u, \Delta u) \cdot N_0 \cdot \begin{pmatrix} |u|^{2\sigma} \bar{u} \\ \Delta u \end{pmatrix} dx \\
& + \rho_\nu \int \rho |\nabla u| |\Delta u| dx + \rho_\mu \int \rho |u|^{2\sigma+1} |\nabla u| dx \\
& + (3\|\lambda_1\| + \|\lambda_2\|) \rho_0 \int \rho |u|^2 |\nabla u|^2 dx \\
& + \delta (3\|\lambda_1\| + \|\lambda_2\|) \int \rho |u|^{2\sigma+3} |\nabla u| dx \\
& + (3\|\lambda_1\| + \|\lambda_2\|) \int \rho |u|^2 |\nabla u| |\Delta u| dx, \quad (8.29)
\end{aligned}$$

其中

$$N_0 = \overline{N_0}^{tr} = \begin{pmatrix} 0 & 1 + \delta - i(\delta\nu - \mu) \\ * & 0 \end{pmatrix}.$$

类似于(8.24)——(8.26), 对任何  $\alpha$

$$|\alpha| < \frac{\sqrt{2\sigma+1}}{\sigma},$$

$M(\alpha, 2\sigma+2)$  的特征值  $\lambda_M(\alpha, 2\sigma+2)$  是正的, 因此,  $M(\alpha, 2\sigma+2)$  是正定的, 于是我们有

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re} \int (1 + i\alpha) \rho |u|^{2\sigma} \bar{u} \Delta u dx \\
& = - \operatorname{Re} \int (1 + i\alpha) \nabla \rho |u|^{2\sigma} \bar{u} \nabla u dx \\
& \quad - \int \rho |u|^{2\sigma-2} \sum_{j=1}^2 (\bar{u} \partial_j u, u \partial_j \bar{u}) M(\alpha, 2\sigma+2) \begin{pmatrix} u \partial_j \bar{u} \\ \bar{u} \partial_j u \end{pmatrix} dx \\
& \leq - \lambda_M(\alpha, \rho) \int \rho |u|^{2\sigma} |\nabla u|^2 dx + \rho_\alpha \int \rho |u|^{2\sigma+1} |\nabla u| dx.
\end{aligned}$$

等价地有

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re} \int (1 + i\alpha) \rho |u|^{2\sigma} \bar{u} \Delta u dx + \lambda_M(\alpha, 2\sigma) \int \rho |u|^{2\sigma} |\nabla u|^2 dx \\
& \quad - \rho_\alpha \int \rho |u|^{2\sigma+1} |\nabla u| dx \leq 0. \quad (8.30)
\end{aligned}$$

乘(8.30)以  $-\eta$  ( $\eta > 0$  待定) 再和(8.29) 相加得

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} V_\delta(u(t)) &\leq \gamma (\|\nabla u\|_2^2 + \delta \|u\|_{\frac{2\sigma+2}{2\sigma}}^2) \\
&- (1-k) (\|\nabla u\|_2^2 + \delta \|u\|_{\frac{4\sigma+2}{4\sigma}}^2) \\
&- \eta \lambda_M(\alpha, 2\sigma+2) \int \rho |u|^{2\sigma} |\nabla u|^2 dx \\
&+ \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int \rho (|u|^{2\sigma} u, \Delta u) \cdot N \cdot \left( \frac{|u|^{2\sigma} \bar{u}}{\Delta \bar{u}} \right) dx \\
&+ (\rho_\mu + \eta \rho_\alpha) \int \rho |u|^{2\sigma+1} |\nabla u| dx + \rho_\nu \int \rho |\nabla u| |\Delta u| dx \\
&+ (3|\lambda_1| + |\lambda_2|) \rho_0 \int \rho |u|^2 |\nabla u|^2 dx \\
&+ \delta (3|\lambda_1| + |\lambda_2|) \int \rho |u|^{2\sigma+3} |\nabla u| dx \\
&+ (3|\lambda_1| + |\lambda_2|) \int \rho |u|^2 |\nabla u| |\Delta u| dx, \quad (8.31)
\end{aligned}$$

其中  $0 \leq k < 1$  给定.

$$N = \overline{N}^{tr} = \begin{pmatrix} -2\delta k & 1 + \delta - \eta - i(\delta\nu - \mu - \alpha\eta) \\ * & -2k \end{pmatrix}.$$

对矩阵  $N$  有

**断言** 当  $\sigma, \nu$  和  $\mu$  满足 (A), 我们能选取  $\delta, \eta$  为正的,  $k \in (0, 1)$ ,  $|\alpha| < \frac{\sqrt{2\sigma+1}}{\sigma}$ , 使得  $N$  为非正, 即有

$$\operatorname{Re} \int \rho (|u|^{2\sigma} u, \Delta u) \cdot N \cdot \left( \frac{|u|^{2\sigma} \bar{u}}{\Delta \bar{u}} \right) dx \leq 0.$$

(8.31) 最后 5 个积分能为如下控制

$$\begin{aligned}
&(\rho_\mu + \eta \rho_\alpha) \int \rho |u|^{2\sigma+1} |\nabla u| dx \\
&\leq \frac{1}{8} (1-k) \int \rho |u|^{4\sigma+2} dx + \frac{2(\rho_\mu + \eta \rho_\alpha)^2}{1-k} \int \rho |\nabla u|^2 dx, \\
&\rho_\nu \int \rho |\nabla u| |\Delta u| dx \\
&\leq \frac{1}{8} (1-k) \int \rho |\Delta u|^2 dx + \frac{2\rho_\nu^2}{1-k} \int \rho |\nabla u|^2 dx, \\
&(3|\lambda_1| + |\lambda_2|) \rho_0 \int \rho |u|^2 |\nabla u|^2 dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (3|\lambda_1| + |\lambda_2|)\rho_0 \int \rho^{\frac{1}{\sigma}} |u|^2 |\nabla u|^{\frac{2}{\sigma}} \rho^{1-\frac{1}{\sigma}} |\Delta u|^{2-\frac{2}{\sigma}} dx \\
&\leq (3|\lambda_1| + |\lambda_2|)\rho_0 \left( \int \rho |u|^{2\sigma} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{\sigma}} \left( \int \rho |\nabla u|^2 dx \right)^{1-\frac{1}{\sigma}} \\
&\leq \frac{1}{2} \eta \lambda_M(\alpha, 2\sigma + 2) \int \rho |u|^{2\sigma} |\nabla u|^2 dx \\
&\quad + \frac{(\sigma-1)[(3|\lambda_1| + |\lambda_2|)\rho_0]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \left(\frac{2}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma}}}{\sigma} \int \rho |\nabla u|^2 dx, \\
&\quad \int \rho |u|^2 |\nabla u| |\Delta u| dx \\
&\leq \varepsilon_1 \int \rho |\Delta u|^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon_1} \int \rho |u|^4 |\nabla u|^2 dx, \\
&\quad \int \rho |u|^{2\sigma+3} |\nabla u| dx \\
&\leq \varepsilon_2 \int \rho |u|^{4\sigma+2} dx + \frac{1}{4\varepsilon_2} \int \rho |u|^4 |\nabla u|^2 dx,
\end{aligned}$$

其中  $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$  为任意, 因  $\sigma > 2$ , 由 Young 不等式有

$$\begin{aligned}
&\int \rho |u|^4 |\nabla u|^2 dx = \int \rho |u|^4 |\nabla u|^{\frac{4}{\sigma}} |\nabla u|^{2(1-\frac{2}{\sigma})} dx \\
&\leq \varepsilon_3 \int \rho |u|^{2\sigma} |\nabla u|^2 dx + \frac{\sigma-2}{\sigma} \left( \frac{2}{\sigma\varepsilon_3} \right)^{\frac{2}{\sigma-2}} \int \rho |\nabla u|^2 dx, \\
&\quad \forall \varepsilon_3 > 0.
\end{aligned}$$

现选取  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0$ , 使得

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1(3|\lambda_1| + |\lambda_2|) &\leq \frac{1}{2}(1-k), \\
\varepsilon_1 \delta(3|\lambda_1| + |\lambda_2|) &\leq \frac{1}{2}(1-k), \\
\varepsilon_3 \left( \frac{1}{4\varepsilon_1} + \frac{\delta}{4\varepsilon_2} \right) (3|\lambda_1| + |\lambda_2|) &\leq \frac{1}{2} \eta \lambda_M(\alpha, 2\sigma + 2).
\end{aligned}$$

因此得到

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} V_\delta(u(t)) &\leq (\gamma + C_4) \|\nabla u\|_{\frac{3}{2}, \rho}^2 + \delta \gamma \|u\|_{\frac{3\sigma+2}{2}, \rho}^{2\sigma+2} \\
&\quad - \frac{1}{2}(1-k) (\|\Delta u\|_{\frac{3}{2}}^2 + \delta \|u\|_{\frac{4\sigma+2}{4\sigma+2}, \rho}^{4\sigma+2}), \quad (8.32)
\end{aligned}$$

其中  $C_4$  为出现在上面不等式中  $\int \rho \|\nabla u\|_{2,\rho}^2 dx$  的系数之和, 注意到存在  $C_5 = C_5(\gamma, \sigma, k) > 0$  使得

$$\begin{aligned} & \delta\gamma \|u\|_{\frac{2\sigma+2}{2\sigma+2},\rho}^2 - \frac{1}{2}(1-k) \|u\|_{\frac{4\sigma+2}{4\sigma+2},\rho}^2 \\ & \leq \delta \int \rho \left( C_5 - \frac{2\gamma}{2\sigma+2} \|u\|_{2\sigma+2}^{2\sigma+2} \right) dx \\ & = \frac{-2\delta\gamma}{2\sigma+2} \|u\|_{\frac{2\sigma+2}{2\sigma+2},\rho}^2 + \delta C_5 \rho_0. \end{aligned}$$

利用分部积分和 Cauchy 不等式,

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_{2,\rho} &= \int \rho \nabla u \nabla \bar{u} dx = - \int \nabla \rho \nabla u \bar{u} dx - \int \rho \Delta u \bar{u} dx \\ &\leq \rho_0 \|u\|_{2,\rho} \|\nabla u\|_{2,\rho} + \|\nabla \rho\|_{2,\rho'} \|\Delta u\|_{2,\rho} \\ &\leq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{2,\rho}^2 + \frac{1-k}{4(2\gamma+C_4)} \|\Delta u\|_{2,\rho}^2 \\ &\quad + \left( \frac{\rho_0^2}{2} + \frac{(2\gamma+C_4)}{1-k} \right) \|u\|_{\frac{2}{2},\rho'}^2. \end{aligned}$$

由引理 8.3,  $\|u\|_{2,\rho} \leq C_0$ , 于是

$$\begin{aligned} (\gamma + C_4) \|\nabla u\|_{2,\rho} &\leq C_6 + \frac{1}{2}(1-k) \|\Delta u\|_{2,\rho}^2 \\ &\quad - \gamma \|\nabla u\|_{2,\rho}^2, \end{aligned}$$

其中  $C_6 = [\rho_0^2(2\gamma + C_4) + \frac{2(2\gamma + C_4)^2}{1-k}]C_0$ , 我们有

$$\frac{d}{dt} V_\delta(u(t)) \leq -2\gamma V_\delta(u(t)) + \delta C_5 \rho_0 + C_6. \quad (8.33)$$

由 Gronwall 不等式, 有

$$V_\delta(u(t)) \leq V(u_0) e^{-2\gamma t} + \frac{\delta C_5 \rho_0 + C_6}{2\gamma}, t \geq 0. \quad (8.34)$$

引理证毕.

**推论 8.5** 在引理 8.4 的相同假设下, 且  $\|u_0\|_{H_{lu}^1} \leq R$ , 则

$$\|u(t)\|_{H_{lu}^1} \leq C, t \geq t_1(R),$$

其中常数  $C$  与  $R$  无关.

**附注** 当  $\sigma = 2$  时 ( $3 + |\lambda_1| + |\lambda_2|$ ) 充分小, 引理 8.4 和推



论 8.5 也是正确的.

现证明整体吸引子和整体解的存在性.

**定理 8.6(整体存在性)** 设(A)成立, 则对任何  $u_0 \in H_{lu}^1$ , 问题(8.5) 和(8.6) 具有惟一解,

$$u(t) \in C([0, \infty); H_{lu}^1) \cap C((0, +\infty); H_{lu}^2).$$

由 GL 方程形成的半群算子  $S(t)$  在  $H_{lu}^1$  中是连续的( $t > 0$ ), 存在常数  $L_1$  和  $t_1(R) > 0$  使得

$$\|u(t)\|_{H_{lu}^1} \leq L_1, t \geq t_1(R).$$

此时  $\|u_0\|_{H_{lu}^1} \leq R$ . 即  $B(0, L_1)$  为  $H_{lu}^1$  中的一个吸收集, 更进一步, 对任何  $q > 2$ , 存在常数  $L_2$  和  $t_*(R) > 0$  使得

$$\|u(t)\|_{W_{lu}^{1,q}} \leq L_2, t \geq t_*(R).$$

我们首先证明解的  $H_{lu}^2$  的正则性. 因  $1 < p < 2, M_1 = \sup_{t \geq 0} \|u(t)\|_{H_{lu}^1} < \infty$ ,

$$\|F(u(t))\|_{L_{lu}^p} \leq C(p)(M_1 + M_1^{2r+1} + M_1^3) \stackrel{\Delta}{=} M_2, t \geq 0.$$

因此, 对任何  $q > 2$ , 由插值(设  $p = \frac{2q}{1+q} \in (1, 2), \theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{2q} \in (0, 1)$ ) 和(8.19)

$$\begin{aligned} & \|e^{B_q(t-s)} F(u(s))\|_{W_{lu}^{1,q}} \\ & \leq (\|e^{B_p(t-s)} F(u(s))\|_{L_{lu}^p})^{1-\theta} (\|e^{B_p(t-s)} F(u(s))\|_{W_{lu}^{2,p}})^\theta \\ & \leq M(t-s)^{-\theta} e^{-\omega(t-s)} \|F(u(s))\|_{L_{lu}^p} \\ & \leq MM_2(t-s)^{-\theta} e^{-\omega(t-s)}, t > s \geq 0. \end{aligned}$$

由  $u(t) = e^{B_q t} u(0) + \int_0^t e^{B_q(t-s)} F(u(s)) ds$ , 可得

$$\begin{aligned} & \|u(t)\|_{W_{lu}^{1,q}} \leq Mt^{-\frac{1}{2}} e^{-\omega t} \|u(0)\|_{L_{lu}^q} \\ & \quad + \int_0^t \|e^{B_p(t-s)} F(u(s))\|_{W_{lu}^{1,q}} ds \\ & \leq CMt^{-\frac{1}{2}} e^{-\omega t} \|u_0\|_{H_{lu}^1} + \int_0^t MM_2(t-s)^{-\theta} e^{-\omega(t-s)} ds \end{aligned}$$

$$\leq MM_1 t^{-\frac{1}{2}} e^{-wt} + \frac{MM_2 \Gamma\left(\frac{1}{2q}\right)}{w}, t > 0.$$

特别有  $\|u(t)\|_{W_{lu}^{1,4}} \leq M_3(t_0), \forall t \geq t_0, t_0 > 0$  任意固定, 因此可得

$$\begin{aligned} & \|F(u(t))\|_{H_{lu}^1} \leq C(\|u(t)\|_{H_{lu}^1} \\ & + \|u(t)\|_{W_{lu}^{1,4}}^{2\sigma+1} + \|u(t)\|_{W_{lu}^{1,4}}^2 \|u(t)\|_{H_{lu}^2}) \\ & \leq C(M_3 + 1)^{2\sigma+1}(1 + \|u(t)\|_{H_{lu}^1}) \\ & \leq M_4(1 + \|u(t)\|_{H_{lu}^2}), t \geq t_0. \end{aligned}$$

由解的积分表达式有

$$\begin{aligned} & \|u(t)\|_{H_{lu}^2} \leq \|e^{B_2(t-t_0)}u(t_0)\|_{H_{lu}^2} \\ & + \int_{t_0}^t \|e^{B_2(t-s)}F(u(s))\|_{H_{lu}^2} ds \\ & \leq M(t-t_0)^{-\frac{1}{2}} e^{-w(t-t_0)} \|u(t_0)\|_{H_{lu}^1} \\ & + \int_0^t M(t-s)^{-\frac{1}{2}} e^{-w(t-s)} \|F(u(s))\|_{H_{lu}^1} ds \\ & \leq M(t-t_0)^{-\frac{1}{2}} e^{-w(t-s)} \|u(t_0)\|_{H_{lu}^1} \\ & + \int_{t_0}^t MM_4(t-s)^{-\frac{1}{2}} e^{-w(t-s)} (1 + \|u(s)\|_{H_{lu}^2}) ds, t > t_0. \end{aligned}$$

因此, 由带奇性的 Gronwall 不等式, 对任何  $T > 0$  有

$$\|u(t)\|_{H_{lu}^2} \leq M_5(t-t_0)^{\frac{1}{2}}, \quad t_0 < t \leq T.$$

因  $t_0 > 0$  为任意的, 故对  $t > 0, u(t) \in H_{lu}^2$  是连续的.

其次, 我们证明存在  $t_* > 0$  使得  $u(t)$  在  $W_{lu}^{1,q}$  中一致有界 ( $\|u_0\|_{H_{lu}^1} \leq R$ ), 由此推出  $B(0, L_2)$  (这球在  $W_{lu}^{1,q}$  中具半径  $L_2$ ) 为  $H_{lu}^1$  中  $S(t)$  的紧的吸收集.

因  $\sup_{t \geq t_1(R)} \|u(t)\|_{H_{lu}^1} \leq L_1, 1 < p < 2$ , 则

$$\|F(u(t))\|_{L_{lu}^p} \leq C(p)(L_1 + L_1^{-\sigma+1} + L_1^3) \equiv C_1(p),$$

$t \geq t_1(R)$ , 这里  $C_1(p)$  与  $R$  无关, 类似于上面, 对任何  $q > 2$ , 由

插值( $p = \frac{2q}{1+q}, \theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{2q}$ ) 和(8.19) 有

$$\begin{aligned} & \| e^{B_q(t-s)} F(u(s)) \|_{W_{lu}^{1,q}} \leq (\| e^{B_p(t-s)} F(u(s)) \|_{L_{lu}^p})^{1-\theta} \\ & \quad \cdot \left( \| e^{B_p(t-s)} F(u(s)) \|_{W_{lu}^{2,p}} \right)^\theta \\ & \leq M(t-s)^{-\theta} e^{-\omega(t-s)} \| F(u(s)) \|_{L_{lu}^p} \\ & \leq MC_1(p) t^{-\theta} e^{-\omega t}, t > s \geq t_1. \end{aligned}$$

由  $u(t) = e^{B_q(t-t_1)} u(t_1) + \int_{t_1}^t e^{B_q(t-s)} F(u(s)) ds$  可得

$$\begin{aligned} & \| u(t) \|_{W_{lu}^{1,q}} \leq M(t-t_1)^{-\frac{1}{2}} e^{-\omega(t-t_1)} \| u(t_1) \|_{L_{lu}^q} \\ & \quad + \int_{t_1}^t MC_1(p) (t-s)^{-\theta} e^{-\omega(t-s)} ds \\ & \leq M(t-t_1)^{-\frac{1}{2}} e^{-\omega(t-t_1)} \| u(t_1) \|_{H_{lu}^1} + \frac{MC_1(p) \Gamma\left(\frac{1}{2q}\right)}{\omega}, t > t_1. \end{aligned}$$

取  $t_* = t_1 + 1 + \frac{1}{\omega} \log(ML_1)$ , 则有

$$\| u(t) \|_{W_{lu}^{1,q}} \leq L_2 = 1 + \frac{MC_1(p) \Gamma\left(\frac{1}{2q}\right)}{\omega}, t \geq t_*(R).$$

主要定理 8.1 来自  $H_{lu}^2$  到  $H_\rho^1$  的紧嵌入, 整体吸引子  $\mathcal{A}$  可表为 GL 方程(8.5) 的半群  $S(t)$  的  $\omega$  极限集

$$\mathcal{A} = \omega(B(0, L_1)) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t) B(0, L_1)},$$

这里的闭包是取  $H_\rho^1$  中的拓扑,  $\mathcal{A}$  具有如下性质:

- (1)  $\mathcal{A}$  是平移不变的;
- (2)  $\mathcal{A}$  是旋转不变的;

(3) 如  $\sigma$  是一个整数, 且权重函数  $\rho$  是光滑的,  $|D^m \rho(x)| \leq \rho_m \rho(x), \forall m \geq 1$ , 则

$$\mathcal{A} \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} H_{lu}^m.$$

## § 9 广义 Ginzburg-Landau 方程的时间周期解

考虑如下二维广义具非齐次项的 GL 方程

$$u_t = \rho u + (1 + i\nu)\Delta u - (1 + i\mu)|u|^{2\sigma}u + \alpha\lambda_1 \cdot \nabla(|u|^2u) \\ + \beta(\lambda_2 \cdot \nabla u)|u|^2 + f(x, t), (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+; \quad (9.1)$$

$$u(x + L, t) = u(x, t), (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+; \quad (9.2)$$

其中  $\Omega = [0, L] \times [0, L]$ ,  $\rho, \sigma, L$  为正数,  $\alpha, \beta, \nu, \mu$  为实数,  $\lambda_1, \lambda_2$  为实向量,  $f(t)$  为  $\omega$  周期函数, 即  $f(t + \omega) = f(t)$ ,  $\forall t \geq 0$ . 我们要证明问题(9.1), (9.2)在一定条件下具有对时间的周期解.

令

$$L_{\text{per}}^2(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), u \text{ 为 } \Omega \text{ 周期函数}\},$$

$$H_{\text{per}}^k(\Omega) = \{u \in H^k(\Omega), u \text{ 为 } \Omega \text{ 周期函数}\}.$$

设  $X$  为 Banach 空间, 让

$$C^k(\omega, X) = \{f: (0, \infty) \rightarrow X, f^{(j)} \text{ 是连续函数}, j = 0, 1, \dots, k, \\ f \text{ 为 } \omega \text{ 周期函数}\}.$$

记  $C^0(\omega, X) = C(\omega, X)$ , 令

$$A = -[(1 + i\nu)\Delta + d],$$

$$D(A) = H_{\text{per}}^2, N(u) = (\rho - d)u - (1 + i\mu)|u|^{2\sigma}u \\ + \alpha\lambda_1 \cdot \nabla(|u|^2u) + \beta(\lambda_2 \cdot \nabla u)|u|^2,$$

这里  $d$  为实数. 问题(9.1), (9.2)能写成泛函形式

$$\begin{cases} u_t + Au = N(u) + f, \\ u(\cdot, t) = u(\cdot, t + \omega). \end{cases} \quad (9.3)$$

我们采用 Galerkin 方法, 设  $\{\phi_j\}_{j=1}^\infty$  为  $H_{\text{per}}^2$  的标准正交基,  $\phi_j$  为算子  $A$  的特征函数, 令近似解

$$u_n(t) = \sum_{k=1}^n d_{kn}(t) \phi_k \quad (9.4)$$

依 Galerkin 方法, 问题(9.3)的近似解  $u_n(t)$  必须满足如下非线性常微分方程组

$$(u_{nt} + Au_n, \phi_j) = (N(u_n) + f, \phi_j), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (9.5)$$

为了证明近似解  $u_n(t)$  的存在性, 我们应用 Leray-Schauder 不动点原理, 定义映照  $F_\lambda: v_n \rightarrow u_n$  为

$$(u_{nt} + Au_n, \phi_j) = (\lambda(N(v_n) + f), \phi_j), j = 1, \dots, n, \quad (9.6)$$

$0 \leq \lambda \leq 1$ , 易知  $F_\lambda$  为空间  $C^1(\omega, H_n)$  的连续紧映象.  $\lambda = 0$  时, 显然可解. 为证 (9.5) 可解,  $F_\lambda u_n = u_n, \lambda = 1$ , 仅需证明成立以下不等式:

$$\sup_{0 \leq t \leq \omega} \|u_n(t)\| \leq K_1, \quad (9.7)$$

其中常数  $K_1$  与  $\lambda$  无关, 仅依赖于系数  $\alpha, \beta, \nu, \mu, \sigma, \lambda_1, \lambda_2$ .

**引理 9.1** 设  $F_\lambda u_n = u_n, 0 \leq \lambda \leq 1, d < 0, f \in C(\omega, L^2)$  则存在常数  $C_1$  使得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_n\|^2 + \|\nabla u_n\|^2 - d \|u_n\|^2 \leq C_1,$$

这里常数  $C_1$  与  $n, \lambda$  无关, 仅依赖于  $\alpha, \beta, \rho, \mu, \nu, \sigma, \lambda_1, \lambda_2, L$  和  $\|f\|$

**证** 由  $F_\lambda u_n = u_n$  有

$$(u_{nt} + Au_n, u_n) = (\lambda(N(u_n) + f), u_n).$$

两边取实部得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_n\|^2 + \|\nabla u_n\|^2 - d \|u_n\|^2 + \lambda \int_{\Omega} |u_n|^{2\sigma+2} dx \\ &= \lambda(\rho - d) \|u_n\|^2 + \lambda \alpha \operatorname{Re} \int_{\Omega} (\lambda_1 \cdot \nabla(|u_n|^2 u_n)) \bar{u}_n dx \\ & \quad + \lambda \beta \operatorname{Re} \int_{\Omega} (\lambda_2 \cdot \nabla u_n) |u_n|^2 \bar{u}_n dx + \lambda \operatorname{Re}(f, u_n). \quad (9.8) \end{aligned}$$

注意到  $u_n$  是  $\Omega$  周期的, 有

$$\operatorname{Re} \int_{\Omega} (\lambda_1 \cdot \nabla(|u_n|^2 u_n)) \bar{u}_n dx = 0,$$

$$\operatorname{Re} \int_{\Omega} (\lambda_2 \cdot \nabla u_n) |u_n|^2 \bar{u}_n dx = 0.$$

用  $D$  表示一常数, 它依赖于  $\alpha, \beta, \rho, \mu, \nu, \sigma, L, \lambda_1$  和  $\lambda_2$ , 但与  $n, \lambda$  无关. 于是有

$$|u_n|^2 = |u_n|^2 \cdot 1 \leq |u_n|^{2\sigma+2} + D,$$

$$|u_n|^2 \leq \int_{\Omega} |u_n|^{2\sigma+2} dx + D.$$

因此,对  $0 \leq \lambda \leq 1$  有

$$\begin{aligned} \lambda \operatorname{Re}(f, u_n) &\leq \lambda \|f\| \|u_n\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|f\|^2 + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |u_n|^{2\sigma+2} dx + D \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_n|^{2\sigma+2} dx + D. \end{aligned} \quad (9.9)$$

因

$$\begin{aligned} |u_n|^2 &= \frac{1}{2(\rho-d)} |u_n|^2 \cdot 2(\rho-d) \\ &\leq \frac{1}{2(\rho-d)} |u_n|^{2\sigma+2} + D, \end{aligned} \quad (9.10)$$

由(9.8), (9.9) 可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_n\|^2 + \|\nabla u_n\|^2 - d \|u_n\|^2 + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |u_n|^{2\sigma+2} dx \\ \leq \lambda(\rho-d) \|u_n\|^2 + D. \end{aligned}$$

由(9.10) 可知存在常数  $C_1$  使得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_n\|^2 + \|\nabla u_n\|^2 - d \|u_n\|^2 \leq C_1.$$

由引理 9.1 可得不等式(9.7),事实上,因

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_n\|^2 - d \|u_n\|^2 \leq C_1, \quad (9.11)$$

注意到  $u_n$  为  $\omega$  对  $t$  周期函数,有

$$-d \int_0^{\omega} \|u_n\|^2 dt \leq C_1 \omega.$$

因此存在  $t^* \in [0, \omega]$ , 使得

$$\|u_n(t^*)\|^2 \leq -C_1/d.$$

由不等式(9.11), 对  $t$  积分从  $t^*$  到  $t \in [t^*, t^* + \omega]$  可得

$$\begin{aligned} \|u_n(t)\|^2 &\leq 2C_1\omega + \|u_n(t^*)\|^2 \\ &\leq 2C_1\omega - C_1/d. \end{aligned}$$

**定理 9.2** 设  $f \in C(w, L^2)$ , 则问题(9.5)具有近似解  $u_n(t) \in C^1(w, H_n)$ .

**引理 9.3** 设存在  $\delta > 0$  使得

$$\frac{7}{3} \leq \sigma \leq \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu + \nu\delta^2}{1 + \delta^2}\right)^2} - 1}, \quad (9.12)$$

则对任何  $\epsilon > 0$ , 存在常数  $K_2$  和  $K_3$  (它们依赖方程的系数、 $L$  和  $\|f\|_{L^2}$ ,  $K_2$  还依赖于  $\epsilon$ ) 使得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2(1+\sigma)} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_n|^{2\sigma+2} dx \\ & \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_n|^{4\sigma+2} dx + \epsilon \|\Delta u_n\|^2 + \epsilon \|\nabla u_n\|^4 \\ & \quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_n|^{2\sigma+2} [(1+2\sigma) |\nabla |u_n|^2|^2 - 2\nu\sigma \nabla |u_n|^2 \\ & \quad \cdot i(u_n \nabla \bar{u}_n - \bar{u}_n \nabla u_n) + |u_n \nabla \bar{u}_n - \bar{u}_n \nabla u_n|^2] dx \\ & \quad + K_2 + K_3 + \operatorname{Re}(f, |u_n|^{2\sigma} u_n), \end{aligned} \quad (9.13)$$

其中  $F_{\lambda} u_n = u_n$ .

**证** 类似于[5]中的引理 2.2.

**引理 9.4** 设引理 9.3 的条件满足, 则存在常数  $K_4$  使得

$$\sup_{0 \leq t \leq w} \|\nabla u_n\| \leq K_4,$$

这里  $K_4$  与  $n, \lambda$  无关.

**证** 由(9.5)可得

$$(u_{nt} + Au_n, \Delta u_n) = (N(u_n) + f, \Delta u_n).$$

上式取实部, 且注意到  $u_n$  为  $\Omega$  周期函数得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_n\|^2 + \|\Delta u_n\|^2 \\ & = \operatorname{Re}(1 + i\mu) \int |u_n|^{2\sigma} u_n \Delta \bar{u}_n dx \\ & \quad - \alpha \operatorname{Re} \int (\lambda_1 \cdot \nabla (|u_n|^2 u_n)) \Delta \bar{u}_n dx \\ & \quad - \beta \operatorname{Re} \int (\lambda_2 \cdot \nabla u_n) |u_n|^2 \Delta \bar{u}_n dx \end{aligned}$$

$$+ \operatorname{Re}(f, \Delta u_n) + \rho \|\nabla u_n\|^2.$$

因

$$|u_n|^2 |\nabla u_n|^2 = \frac{1}{4} |\nabla |u_n|^2|^2 + \frac{1}{4} |u_n \nabla \bar{u}_n - \bar{u}_n \nabla u_n|^2,$$

我们有

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}(1 + i\mu) \int_{\Omega} |u_n|^{2\sigma} u_n \Delta \bar{u}_n dx \\ &= -\frac{1}{4} \int_{\Omega} |u|^{2\sigma-2} [(1+2\sigma) |\nabla |u_n|^2|^2 + |u_n \nabla \bar{u}_n - \bar{u}_n \nabla u_n|^2 \\ &\quad - 2\mu \sigma \nabla |u_n|^2 \cdot i(\bar{u}_n \nabla u_n - u_n \nabla \bar{u}_n)] dx. \end{aligned} \quad (9.14)$$

我们以下要用到如下 Sobolev 插值不等式

$$\|u\|_4 \leq K \|u\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \|u\|_2^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in H^1(\Omega), \quad (9.15)$$

$$\|u\|_8 \leq K \|u\|_{H^2}^{\frac{\theta}{2}} \|u\|_q^{1-\frac{\theta}{2}}, \quad \forall u \in H^2(\Omega), \quad (9.16)$$

其中  $\theta = \frac{8-q}{4q+8}$ ,  $1 < q < 8$ ;  $\theta = 0$ ,  $q \geq 8$ ,  $K$  为 Sobolev 常数.

为了简化运算,我们列举以下一些不等式:

$$\|\Delta u\| \|\nabla u\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^2}^{2\theta} \leq \|u\|_{H^2}^{2\theta + \frac{3}{2}}, \quad (9.17)$$

$$D \|u\|_{H^2}^{2\theta + \frac{3}{2}} J(u) \leq \gamma \|u\|_{H^2}^2 + D(\gamma) J(u)^{\frac{4}{1-4\theta}}, \quad (9.18)$$

$\forall \gamma \in (0, 1]$ ,  $D, \tilde{D}(\gamma)$  均为正常数,  $J(u)$  为任意非负函数, 如置

$$\theta = \frac{8-q}{4q+3}, \text{ 因 } \frac{2}{\left(2\theta + \frac{3}{2}\right)} > 1, q > 3,$$

$$D \|\nabla u\|_{H^2}^{\frac{2}{1-4\theta}} J(u) \leq \gamma \|\nabla u\|^4 + \tilde{D}(\gamma) J(u)^{\frac{2-8\theta}{1-8\theta}}, \quad (9.19)$$

$$\text{若置 } \theta = \frac{8-q}{4q+8}, \text{ 因 } \frac{4}{\left(\frac{2}{1-4\theta}\right)} > 1, q > \frac{14}{3},$$

$$D \|u\|_q^{\frac{16(1-\theta)}{1-8\theta}} J(u) \leq \gamma \|u\|_q^8 + \tilde{D}(\gamma) J(u)^{\frac{8q}{1-8\theta} \cdot \frac{16}{16+16\sigma}}, \quad (9.20)$$

$$\theta = \frac{8-q}{4q+8}, q \nearrow \left(\frac{16(1-\theta)}{1-8\theta}\right) > 1, q > \frac{34}{3}.$$



我们也用如下的 Agmon 不等式

$$\|u\|_{\infty} \leq C \|u\|^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^2}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in H^2(\Omega), \quad (9.21)$$

$$\|u\|_{H^2} \leq C \|u\| + \|\Delta u\|, \quad \forall u \in H^2(\Omega). \quad (9.22)$$

利用上述不等式有

$$\begin{aligned} & | -\beta \operatorname{Re} \int_{\Omega} (\lambda_2 \cdot \nabla u_n) | u_n |^2 \Delta \bar{u}_n dx | \\ & \leq |\beta \lambda_2| \int_{\Omega} |\nabla u_n| |u_n|^2 |\Delta u_n| dx \\ & \leq D \|\Delta u_n\| \|\nabla u_n\|_4 \|u_n\|_{\frac{8}{3}} \quad (\text{由(9.15), (9.16)}) \\ & \leq D \|\Delta u_n\| \|\nabla u_n\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \|\nabla u_n\|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \|u_n\|_{H^2}^{2\theta} \|u_n\|_{\frac{q}{2}}^{2(1-\theta)} \\ & \leq D \|u_n\|_{H^2}^{2\theta + \frac{3}{2}} \|\nabla u_n\|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \|u_n\|_{\frac{q}{2}}^{2(1-\theta)} \quad (\text{由(9.17)}) \\ & \leq \gamma \|u_n\|_{H^2}^2 + \bar{D}(\gamma) \|\nabla u_n\|_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{1-4\theta}} \|u_n\|_{\frac{q}{2}}^{\frac{8(1-\theta)}{1-4\theta}} \\ & \quad (\text{利用(9.18), } J(u) = \|\nabla u_n\|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \|u_n\|_{\frac{q}{2}}^{2(1-\theta)}, \\ & \quad q > 3, 0 < \gamma \leq 1) \\ & \leq \gamma \|u_n\|_{H^2}^2 + \gamma \|\nabla u_n\|^4 + \bar{D}(\gamma) \|u_n\|_{\frac{q}{2}}^{\frac{16(1-\theta)}{1-8\theta}} \\ & \quad (\text{利用(9.19), } J(u) = \|u_n\|_{\frac{q}{2}}^{\frac{8(1-\theta)}{1-4\theta}}, q > \frac{14}{3}, 0 < \gamma \leq 1) \\ & \leq \gamma \|u_n\|_{H^2}^2 + \gamma \|\nabla u_n\|^4 + \gamma \|u_n\|_{\frac{q}{2}}^q + \bar{D}(\gamma) \quad (\text{由(9.20),} \\ & \quad q > \frac{14}{3}, 0 < \gamma \leq 1) \\ & \leq \gamma C \|\Delta u_n\|^2 + \gamma \|\nabla u_n\|^4 + \gamma \|u_n\|_{\frac{q}{2}}^q + \bar{D}(\gamma) \quad (\text{利用} \\ & \quad (9.20)) \\ & = \gamma C \|\Delta u_n\|^2 + \gamma \|\nabla u_n\|^4 + \gamma \|u_n\|_{\frac{4\sigma+2}{4\sigma+2}}^{4\sigma+2} + \bar{D}(\gamma) \\ & \quad (q = 4\sigma + 2 > \frac{34}{3}) \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2} (\|\Delta u_n\|^2 + \|\nabla u_n\|^4 + \|u_n\|_{\frac{4\sigma+2}{4\sigma+2}}^{4\sigma+2}) + \bar{D}(\varepsilon) \\ & \quad (0 < \varepsilon < 1, \sigma > \frac{7}{3}). \end{aligned} \quad (9.23)$$

类似地有

$$\begin{aligned}
 \nabla(|u_n|^2 u_n) &= |u_n|^2 \nabla u_n + u_n \nabla |u_n|^2 \\
 &= 2|u_n|^2 \nabla u_n + u_n^2 \nabla u_n, \\
 | -\alpha \operatorname{Re} \int_{\Omega} (\lambda_1 \cdot \nabla(|u_n|^2 u_n)) \Delta \bar{u}_n dx | \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{2} (\|\Delta u_n\|^2 + \|\nabla u_n\|^4 + \|u_n\|_{4\sigma+2}^{4\sigma+2}) + \tilde{D}(\varepsilon), \\
 0 < \varepsilon &\leq 1
 \end{aligned} \tag{9.24}$$

和

$$\rho \|\nabla u_n\|^2 \leq \varepsilon \|\nabla u_n\|^4 + C(\varepsilon). \tag{9.25}$$

因此可得不等式

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_n\|^2 + \|\Delta u_n\|^2 &\leq \varepsilon \|\Delta u_n\|^2 + 2\varepsilon \|\nabla u_n\|^4 \\
 &+ \varepsilon \|u_n\|_{4\sigma+2}^{4\sigma+2} - \frac{1}{4} \int_{\Omega} |u_n|^{2\sigma+2} [(1+2\sigma)|\nabla|u_n|^2|^2 \\
 &+ |\bar{u}_n \nabla u_n - u_n \nabla \bar{u}_n|^2 \\
 &- 2\mu\sigma \nabla|u_n|^2 \cdot i(\bar{u}_n \nabla u_n - u_n \nabla \bar{u}_n)] dx + \tilde{D}(\varepsilon). \tag{9.26}
 \end{aligned}$$

用  $\delta^2$  乘以引理 9.1 中的不等式(9.13), 再和(9.26) 相加:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \|\nabla u_n\|^2 + \frac{\delta^2}{1+\sigma} \int_{\Omega} |u_n|^{2\sigma+2} dx \right) &+ \|\Delta u_n\|^2 \\
 &+ \frac{1}{2} \delta^2 \int_{\Omega} |u_n|^{4\sigma+2} dx \\
 &\leq \varepsilon(1+\delta^2) \|\Delta u_n\|^2 + \varepsilon(2+\delta^2) \|\nabla u_n\|^4 \\
 &+ \varepsilon \int_{\Omega} |u_n|^{4\sigma+2} dx + \tilde{D}(\varepsilon) + \operatorname{Re}(f, |u_n|^{2\sigma} u_n) + \operatorname{Re}(f, \Delta u_n) \\
 &- \frac{1}{4} \int_{\Omega} |u_n|^{2\sigma+2} [(1+2\sigma)(1+\delta^2)|\nabla|u_n|^2|^2 \\
 &+ 2\sigma(\delta^2 - \mu) \nabla|u_n|^2 \cdot i(\bar{u}_n \nabla u_n - u_n \nabla \bar{u}_n) \\
 &+ (1+\delta^2)|\bar{u}_n \nabla u_n - u_n \nabla \bar{u}_n|^2] dx. \tag{9.27}
 \end{aligned}$$

由于  $\operatorname{Re}(f, |u_n|^{2\sigma} u_n) \leq \varepsilon \int_{\Omega} i(\bar{u}_n \nabla u_n) |u_n|^{4\sigma+2} dx + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} |f|^2 dx$

$$\leq \varepsilon \int_{\Omega} |u_n|^{4\sigma+2} dx + D(\varepsilon),$$

$$\operatorname{Re}(f, \Delta u_n) \leq \varepsilon \|\Delta u_n\|^2 + \tilde{D}(\varepsilon),$$

$$\|\nabla u_n\|^2 = (-\Delta u_n, u_n)$$

$$\leq \|\Delta u_n\| \|u_n\| \leq K_1 \|\Delta u_n\|,$$

选取  $\varepsilon$  充分小使得

$$\varepsilon(1 + \delta^2) + \varepsilon(2 + \delta^2) + \varepsilon < \frac{1}{2},$$

$$2\varepsilon < \frac{1}{4}\delta^2.$$

记(9.27)右端最后积分为  $I$ , 则(9.27)为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \|\nabla u_n\|^2 + \frac{\delta^2}{1+\sigma} \int_{\Omega} |u_n|^{2\sigma+2} dx \right) \\ & + \frac{1}{2} \|\Delta u_n\|^2 + \frac{1}{4} \delta^2 \int_{\Omega} |u_n|^{4\sigma+2} dx \leq \tilde{D} + I. \end{aligned}$$

显然, 如矩阵

$$E = \begin{pmatrix} (1+2\sigma)(1+\delta^2) & \sigma(\nu\delta^2 - \mu) \\ \sigma(\nu\delta^2 - \mu) & 1+\delta^2 \end{pmatrix}$$

为非负的, 则  $I \leq 0$ . 当满足条件(9.12)时, 矩阵  $E$  为非负, 于是可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \|\nabla u_n\|^2 + \frac{\delta^2}{1+\sigma} \int_{\Omega} |u_n|^{2\sigma+2} dx \right) \\ & + \frac{1}{2} \|\Delta u_n\|^2 + \frac{1}{4} \delta^2 \int_{\Omega} |u_n|^{4\sigma+2} dx \leq \tilde{D}. \end{aligned}$$

因

$$\|\nabla u_n\|^2 \leq K_1 \|\Delta u_n\| \leq \|\Delta u_n\|^2 + \frac{1}{4} K_1^2,$$

又由于  $\|u_n(t)\| \leq K$ , 有

$$\frac{\delta^2}{2(1+\sigma)} \int_{\Omega} |u_n|^{2\sigma+2} dx \leq \frac{1}{4} \delta^2 \int_{\Omega} |u_n|^{4\sigma+2} dx + \tilde{D}.$$

因此

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \|\nabla u_n\|^2 + \frac{\delta^2}{1+\sigma} \int_{\Omega} |u_n|^{2\sigma+2} dx \right) \\ & + \frac{1}{2} \left( \|\nabla u_n\|^2 + \frac{\delta^2}{1+\sigma} \int_{\Omega} |u_n|^{2\sigma+2} dx \right) \leq \tilde{D}. \quad (9.28) \end{aligned}$$

对  $t$  从 0 到  $\omega$  积分得

$$\int_0^\omega \left( \|\nabla u_n\|^2 + \frac{\delta^2}{1+\sigma} \int_\Omega |u_n|^{2\sigma+2} dx \right) dt \leq D \omega$$

因此存在  $t^* \in [0, \omega]$ , 使得

$$\|\nabla u_n(t^*)\|^2 + \frac{\delta^2}{1+\sigma} \int_\Omega |u_n(t^*)|^{2\sigma+2} dx \leq C.$$

(9.28) 对  $t$  从  $t^*$  到  $t^* + w$  积分,  $t \in [t^*, t^* + w]$ , 我们有

$$\|\nabla u_n(t)\|^2 + \frac{\delta^2}{1+\sigma} \int_\Omega |u_n(t)|^{2\sigma+2} dx \leq \bar{C}.$$

故存在常数  $K_4$  与  $n$  无关, 使得

$$\sup_{0 \leq t \leq w} \|\nabla u_n(t)\| \leq K_4.$$

**引理 9.5** 设引理 9.1 条件满足且设  $f \in (w, H^1)$ , 则存在正常数  $K_5$ , 与  $n$  无关, 仅依赖于方程 (9.1) 的系数和  $\|f\|_{H^1}$ , 使得

$$\sup_{0 \leq t \leq w} \|\nabla u_n(t)\| \leq K_5. \quad (9.29)$$

**证** 由 Galerkin 积分等式 (9.5) 可得

$$(u_{nt} + Au_n, \Delta^2 u_n) = (N(u_n) + f, \Delta^2 u_n),$$

上式取实部可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta u_n\|^2 &= \rho \|\Delta u_n\|^2 - \|\nabla \Delta u_n\|^2 - \operatorname{Re}(1 + i\mu) \\ &\quad \cdot \int |u_n|^{2\sigma} u_n \Delta^2 \bar{u}_n dx + \alpha \operatorname{Re} \int_\Omega (\lambda_1 \cdot \nabla (|u_n|^2 u_n)) \Delta^2 \bar{u}_n dx \\ &\quad + \beta \operatorname{Re} \int_\Omega (\lambda_2 \cdot \nabla u_n) |u_n|^2 \Delta^2 \bar{u}_n dx + \operatorname{Re}(f, \Delta^2 u_n). \end{aligned}$$

利用不等式 (9.7) 和引理 9.4 可得

$$\frac{d}{dt} \|\Delta u_n\|^2 + \|\nabla \Delta u_n\|^2 + \|\Delta u_n\|^2 \leq \hat{C} + \|f\|_{H^1}^2, \quad (9.30)$$

其中常数  $\hat{C}$  与  $n$  无关, 由此可得

$$\int_0^\omega \|\Delta u_n\|^2 dt \leq (\hat{C} + \sup_{0 \leq t \leq w} \|f(\cdot, t)\|_{H^1}^2) \omega.$$

应用积分平均值定理, 存在  $t^{**} \in [0, \omega]$  使得

$$\|\Delta u_n(t^{**})\|^2 \leq (\hat{C} + \sup_{0 \leq t \leq \omega} \|f(\cdot, t)\|_{H^2}^2). \quad (9.31)$$

由不等式(9.30) 可得

$$\frac{d}{dt} \|\Delta u_n\|^2 \leq \hat{C} + \|f\|_{H^1}^2, \quad (9.32)$$

对(9.32) 从  $t^{**}$  到  $t \in [t^{**}, t^{**} + \omega]$  积分可得

$$\begin{aligned} \|\Delta u_n(t)\|^2 &\leq \|\Delta u_n(t^{**})\|^2 \\ &\quad + (\hat{C} + \sup_{0 \leq t \leq \omega} \|f(\cdot, t)\|_{H^1}^2) \omega. \end{aligned}$$

令  $K_5 = (\hat{C} + \sup_{0 \leq t \leq \omega} \|f(\cdot, t)\|_{H^1}^2)(\omega + 1)$  有

$$\sup_{0 \leq t \leq \omega} \|\Delta u_n(t)\| \leq K_5.$$

引理证毕.

**附注 9.6** 在引理 9.5 条件下, 存在正常数  $K_6$  与  $n$  无关, 使得

$$\sup_{0 \leq t \leq \omega} \|u_n(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq K_6. \quad (9.33)$$

**引理 9.7** 设引理 9.5 条件满足, 则存在常数  $K_7$  与  $n$  无关, 使得

$$\sup_{0 \leq t \leq \omega} \|u_{nt}(t)\| \leq K_7. \quad (9.34)$$

**证** 由 Galerkin 积分等式(9.5) 可得

$$(u_{nt} + Au_n, u_{nt}) = (N(u_n) + f, u_{nt}).$$

上式取实部得

$$\begin{aligned} \|u_{nt}\|^2 &\leq \sqrt{1 + \nu^2} \|u_n\| \|u_{nt}\| \\ &\quad + \|N(u_n) + f + du_{nt}\| \|u_{nt}\|, \end{aligned} \quad (9.35)$$

因  $\|u_n\|_\infty \leq K_6$  和  $N(u_n)$  的表达式可得

$$\begin{aligned} \|N(u_n) + f + du_{nt}\| &\leq \rho K_6 + K_6^{2\sigma+1} + |\alpha \lambda_1| \\ &\quad + 3K_6^2 \|\nabla u_n\| + |\beta \lambda_2| K_6^2 \|\nabla u_n\| + \|f\| \leq D. \end{aligned}$$

由不等式(9.34) 可得

$$\sup_{0 \leq t \leq \omega} \|u_{nt}\| \leq K_7,$$

其中常数  $K_7$  与  $n$  无关.

下面可得到我们的主要定理.

**定理 9.8** 设  $f(x, t) \in C^1(\omega, H_{\text{per}}^1)$ , 且满足条件

$$\frac{7}{3} \leq \sigma \leq \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\mu}{1 + \delta^2} \right)^2 - 1}},$$

则存在二维 GL 方程周期问题(9.1), (9.2) 的时间周期解  $u(x, t)$ ,

$$u(x, t) \in L^\infty(\omega, H_{\text{per}}^2) \cap C^1(\omega, L_2).$$

**证** 由以上关于近似解  $u_n(t)$  的一致先验估计, 可知存在子序列  $u_{n_k}(x, t)$ ,

$$u_{n_k}(\cdot, t) \rightharpoonup u(x, t), \text{ 依 } L^\infty(\omega, H^2) \text{ 弱收敛,}$$

$$u_{n_k t}(\cdot, t) \rightharpoonup u_t(x, t), \text{ 依 } L^\infty(\omega, L^2) \text{ 弱收敛,}$$

$$\|u_{n_k}\|^{2\sigma} u_{n_k} \rightarrow \|u\|^{2\sigma} u, \text{ 依 } L^\infty \text{ 一致收敛,}$$

$$\nabla u_{n_k} \rightarrow \nabla u, \text{ 依 } L^\infty(\omega, L^2) \text{ 强收敛.}$$

从(9.5)中, 令  $k \rightarrow \infty$  可知

$$(u_t + Au, v) = (N(u) + f, v), \forall v \in \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}.$$

由于  $\text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  在  $L_{\text{per}}^2$  中是稠密的, 因此有

$$u_t + Au = N(u) + f, u \in C^1(\omega, H_{\text{per}}^2).$$

故  $u$  为周期问题(9.1), (9.2) 的解.

## § 10 Ginzburg-Landau 方程逼近 NLS 方程

考虑如下 GL 方程

$$\partial_t u = (a + i\nu)\Delta u - (b + i\mu)|u|^{2\sigma}u, (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \quad (10.1)$$

其中  $u$  为  $x \in \mathbb{R}^n, t \in (0, \infty)$  的复值函数, 设  $\sigma > 0, a > 0, b > 0, \nu > 0, \mu$  为实参数, 当  $a = b = 0$  时, (10.1) 变为非线性 Schrödinger(NLS) 方程

$$i\partial_t v = -\nu\Delta v + \mu|v|^{2\sigma}v. \quad (10.2)$$

很自然地, 要去考虑  $a \rightarrow 0, b \rightarrow 0$  时的极限问题, 即 GL 方程的解是否逼近于 NLS 方程的解? 其逼近程度如何?

**定理 10.1** 设  $u_0 = u(x, 0) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , 则 GL 方程 (10.1) 具初值  $u_0$  存在整体解  $u$  满足

$$\begin{aligned} u \in C([0, \infty); L^2) \cap L^2_{\text{loc}}([0, \infty); H^1) \\ \cap L^{2\sigma+2}_{\text{loc}}([0, \infty); L^{2\sigma+2}) \end{aligned} \quad (10.3)$$

和  $u(0) = u_0$ , 更进一步,  $u$  满足能量关系

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2}^2 + a \int_0^t \|\nabla u(t')\|_{L^2}^2 dt' \\ + b \int_0^t \|u(t')\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2} dt' = \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2}^2, \quad \forall t \in [0, \infty). \end{aligned} \quad (10.4)$$

这个定理已在 § 2 中由 J. Ginibre 和 G. Velo 所证, 也可由 Fado-Galerkin 方法或黏性消去法证明. 对于解在 (10.3) 中惟一性也在 § 2 中证明. 条件是

$$|1 + i\mu/b| \leq \frac{\sigma+1}{\sigma}. \quad (10.5)$$

(10.5) 的假设, 对于考虑我们的极限问题也是重要的, GL 方程的  $H^1$  解在 § 2 中也已证明.

**定理 10.2** 设或者  $\mu \geq 0$  或  $(n-2)\sigma < 2$ , 且如  $n\sigma > 2$ ,

$$\left| 1 + i \frac{\nu}{a} \right| \leq \frac{n\sigma}{n\sigma - 2},$$

$u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{2\sigma+2}(\mathbb{R}^n)$ , 则 GL 方程 (10.1) 具有惟一解  $u$  满足

$$u \in C([0, \infty); H^1 \cap L^{2\sigma+2}) \cap L^2_{\text{loc}}([0, \infty); H^2) \cap L^{4\sigma+2}_{\text{loc}}([0, \infty); L^{4\sigma+2}), u(0) = u_0, \text{ 且 } u \text{ 满足 (10.4).}$$

关于 NLS 方程在  $L^2, H^1, H^2$  的结果已有许多研究, 我们有

**定理 10.3** 设  $(n-2)\sigma \leq 2, n \geq 3$ , 则对任何  $v_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ , 存在  $T^* = T^*(\|v_0\|_{H^1}) > 0$  和方程 (10.2) 的解  $v$  在  $[0, T^*]$  上使得

$$\begin{aligned} v \in C([0, T^*]; H^1) \cap C^1([0, T^*]; H^1) \\ \cap L^{2\sigma+2}_{\text{loc}}([0, T^*]; L^{2\sigma+2}), v(0) = v_0. \end{aligned}$$

更进一步, 对任何  $t < T^*$  有

$$E(v(t)) = E(v_0), \|v(t)\|_{L^2}^2 = \|v_0\|_{L^2}^2, \quad (10.6)$$

其中  $E(v)$  为 Hamilton

$$E(v) = \frac{\nu}{2} \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \frac{\mu}{2\sigma+2} \|v\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2}. \quad (10.7)$$

附之,在不聚焦情况( $\mu \geq 0$ )或在  $L^2$  亚临界聚焦情况( $\mu < 0$  和  $\sigma < \frac{2}{n}$ )或在  $L^2$  临界聚焦情况( $\mu < 0, \sigma = \frac{2}{n}$ ),具小初值  $\|v_0\|_{L^2}$ ,局部解是整体的(即  $T^* = \infty$ ).

**定理 10.4** 设  $(n-4)\sigma \leq 2, n \geq 5$ ,则对任何  $v_0 \in H^2(\mathbb{R}^n)$ ,存在  $T^* = T^*(\|v_0\|_{H^2}) > 0$  和 NLS 方程(10.2)的惟一解  $v \in C([0, T^*]; H^2)$ ,  $v(0) = v_0$ .更进一步,对任何  $T < T^*$ ,有

$$\|v(t)\|_{H^2} \leq K \|v_0\|_{H^2}, t \leq T, \quad (10.8)$$

这里常数  $K$  依赖于  $T$  和  $\sup\{\|u(t)\|_{H^1}, t < T\}$ .

附之,在不聚焦情况( $\mu \geq 0$ )下或在  $L^2$  亚临界聚焦情况( $\mu < 0, \sigma < \frac{2}{n}$ )下或在  $L^2$  临界聚焦情况( $\mu < 0, \sigma = \frac{2}{n}$ )下,对于小初值  $\|v_0\|_{H^2}$ ,局部解实际上是整体的( $T^* = \infty$ ).

**引理 10.5** 如  $\frac{1}{p} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ ,则有

$$\|v\|_{L^p} \leq C(p) \|\nabla v\|_{L^2}^\theta \|v\|_{L^2}^{1-\theta}, \theta = n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right), \quad (10.9)$$

其中  $C(p)$  为某常数.

对于  $(n-2)\sigma \leq 2, p = 2\sigma + 2$ ,则由引理 10.5 有

$$\|v\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2} \leq C(\sigma) \|\nabla v\|_{L^2}^{n\sigma} \|v\|_{L^2}^{2\sigma+2-n\sigma}.$$

现考虑方程(10.1)的无黏极限.  $v_0 \in L^2$ ,可得到两个无黏极限结果.首先,  $v_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ , NLS 方程的解  $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$ ,能量具有意义.其次,得到了  $v_0 \in H^2$  最优收敛率.

先给出第一个无黏极限结果.

**定理 10.6** 设  $\sigma \leq 2/(n-2)$  ( $n \geq 3$ ),如  $\mu \geq 0, \sigma \leq \frac{2}{n}$  或  $\mu < 0, b, \mu$  满足



$$\left| 1 + i \frac{\mu}{b} \right| \leq \frac{\sigma+1}{\sigma}, \quad (10.10)$$

让  $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ,  $v_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$  (如  $\mu < 0$ ,  $\sigma = \frac{2}{n}$ ,  $\|v_0\|_{L^2}$  充分小).

考虑差

$$W(x, t) = u(x, t) - v(x, t),$$

这是 GL 方程(10.1)满足  $u(x, 0) = u_0$  的解  $u$  和 NLS 方程满足  $v(x, 0) = v_0$  的解  $v$  之差, 则  $W$  满足估计

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\|_{L^2}^2 &\leq \|u_0 - v_0\|_{L^2}^2 + a \tilde{f}(v_0)t \\ &\quad + C_1(\sigma) b^{\frac{(2\sigma+1)}{(2\sigma+2)}} (1+b) \varphi(v_0)t \\ &\quad + C_2(\sigma) b^{\frac{(2\sigma+1)}{(2\sigma+2)}} \|u_0\|_{L^2}^2, \end{aligned} \quad (10.11)$$

其中  $C_1, C_2$  为仅依赖于  $\sigma$  的常数,  $\tilde{f}(v_0)$  和  $\varphi(v_0)$  (与  $a, b$  无关) 为含有  $v_0$  的  $\|\nabla v\|_{L^2}^2, \|v\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2}$  的有界项.

特别, 如  $\|u_0 - v_0\|_{L^2}^2$  具有阶  $O(a) + O(b^{\frac{(2\sigma+1)}{(2\sigma+2)}})$ , 则对于小的  $a, b$

$$\|u - v\|_{L^2} = O(\sqrt{a}) + O(b^{\frac{(2\sigma+1)}{(2\sigma+2)}}). \quad (10.12)$$

为了证明定理 10.6, 我们需要 NLS 方程  $\|\nabla v\|_{L^2}, \|v\|_{L^{2\sigma+2}}$  的估计.

**命题 10.7** 设  $\sigma > 0, \sigma \leq 2/(n-2), n \geq 3 (\mu \leq 0); \sigma \leq 2/n (\mu < 0), v_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$  (若  $\mu < 0, \sigma = \frac{2}{n}$ ,  $\|v_0\|_{L^2}$  充分小), 则 NLS 方程(10.2)具初值  $v_0$  的解  $v$  满足

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 dx \leq \tilde{f}(v_0), \quad (10.13)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |v|^{2\sigma+2} dx \leq \varphi(v_0), \quad (10.14)$$

这里  $\tilde{f}(v_0)$  和  $\varphi(v_0)$  由初值  $v_0$  所定, 与  $a, b$  无关.

**证** 证明(10.13), (10.14)的想法是利用能量和  $L^2$  守恒律, 但我们必须区分  $\mu \geq 0$  和  $\mu < 0$  的情况.

对  $\mu \geq 0$ , 由守恒律易控制  $H^1$  模和  $L^{2\sigma+2}$  模, 事实上, 由引理 10.5

$$\|\nabla v\|_{L^2}^2 \leq \frac{2}{\nu} E(v_0),$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{2\sigma+2} dx &\leq C(\sigma) \|\nabla v\|_{L^2}^{n\sigma} \|v\|_{L^2}^{2\sigma+2-n\sigma} \\ &\leq C(\sigma) \left( \frac{E(v_0)}{\nu} \right)^{\frac{n\sigma}{2}} \|v_0\|_{L^2}^{2\sigma+2-n\sigma}, \end{aligned}$$

其中常数  $C(\sigma)$  仅依赖于  $\sigma$ .

对  $\mu < 0$ , 我们仍能得到  $L^2$  亚临界 ( $\sigma < 2/n$ ) 和  $L^2$  临界 ( $\sigma = \frac{2}{n}$ ),  $\|v_0\|_{L^2}$  充分小的界, 事实上, 由引理 10.5,

$$\begin{aligned} E(v_0) &= \frac{\nu}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 dx + \frac{\mu}{2\sigma+2} \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{2\sigma+2} dx \\ &\geq \frac{\nu}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 dx + C(\sigma)\mu \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 dx \right)^{\frac{n\sigma}{2}} \\ &\quad \|v\|_{L^2}^{2\sigma+2-n\sigma}. \end{aligned} \quad (10.15)$$

如  $n\sigma = 2$ ,  $\|v_0\|_{L^2}$  充分小, 若

$$\frac{\nu}{2} + C(\sigma)\mu \|v_0\|_{L^2}^{2\sigma+2-n\sigma} > 0,$$

则由 (10.15) 可得

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 dx \leq \left[ \frac{\nu}{2} + C(\sigma)\mu \|v_0\|_{L^2}^{2\sigma+2-n\sigma} \right]^{-1} E(v_0).$$

若  $n\sigma < 2$ , 可用如下引理.

**引理 10.8** 设  $P, Q$  和  $\beta < 2$  为正常数, 如  $y \geq 0$  满足

$$y^2 - Py\beta \leq Q,$$

则  $y$  是有界的,

$$y \leq \max \{ (2P)^{\frac{1}{2-\beta}}, \sqrt{2Q} \}.$$

应用引理 10.8 于 (10.15) 可得

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 dx &\leq \max \{ [C(\sigma)\nu^{-1}(-\mu) \|v_0\|_{L^2}^{2\sigma+2-n\sigma}]^{\frac{2}{2-n\sigma}}, \\ &\quad 4\nu^{-1}E(v_0) \}. \end{aligned}$$

如果我们用  $\tilde{\kappa}(v_0)$  和  $\varphi(v_0)$  表示  $\int |\nabla v|^2 dx, \int |v|^{2\sigma+2} dx$  的界对于  $\mu \geq 0$  或  $\mu < 0$  情况, 我们即得命题 (10.7).

引理 10.8 的证明: 证明是容易的, 反之则有

$$y > (2P)^{\frac{1}{2-\beta}}, \quad y > \sqrt{2Q}.$$

由  $y > (2P)^{\frac{1}{2-\beta}}$  推出  $Py^{\beta-2} < \frac{1}{2}$ , 因此

$$y^2 \leq Py^\beta + Q \leq Py^{\beta-2} y^2 + Q \leq \frac{1}{2} y^2 + Q,$$

它和  $y > \sqrt{2Q}$  矛盾.

定理 10.6 的证明: 设  $u$  为 GL 方程的解,  $v$  为 NLS 方程 (10.2) 的解, 则差  $W = u - v$  满足

$$\begin{aligned} \partial_t W &= (a + i\nu)\Delta W + a\Delta v - (b + i\mu)(f(u) \\ &\quad - f(v)) - bf(v), \end{aligned} \quad (10.16)$$

其中  $f(u) = |u|^{2\sigma}u$ .

取非负、光滑截断函数  $\phi, \phi(x) \equiv 1, |x| \leq 1; \phi(x) \equiv 0, |x| \geq 2$ .

$$\phi_k(x) = \phi\left(\frac{x}{k}\right), k > 0.$$

以  $2\overline{W}\phi_k^2$  乘方程 (10.16), 对  $x$  积分可得

$$\begin{aligned} \partial_t \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 |W|^2 dx &= 2\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 \partial_t W \overline{W} dx \\ &= 2\operatorname{Re}[(a + i\nu)(\phi_k^2 \Delta W, W)] + 2a\operatorname{Re}(\phi_k^2 \Delta v, W) \\ &\quad - 2\operatorname{Re}[(b + i\mu)(\phi_k^2(f(u) - f(v)), W)] \\ &\quad - 2b\operatorname{Re}(\phi_k^2 f(v), W), \end{aligned} \quad (10.17)$$

这里  $(F, G) = \int_{\mathbb{R}^n} F \overline{G} dx, \overline{G}$  表示  $G$  的复数共轭,  $\operatorname{Re}$  表示实部.

为简单起见, 令 (10.17) 右端的四个积分为 I, II, III, IV, 因此

$$\begin{aligned} |I| &\leq a \|\phi_k \nabla W\|_{L^2}^2 + 4 \frac{a^2 + \nu^2}{a} \|W \nabla \phi_k\|_{L^2}^2 \\ &\quad - 2a \|\phi_k \nabla W\|_{L^2}^2, \\ |II| &\leq (a + \varepsilon) \|\phi_k \nabla v\|_{L^2}^2 + 4a^2 \varepsilon^{-1} \|W \nabla \phi_k\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

$$+ a \|\phi_k \nabla W\|_{L^2}^2,$$

$\varepsilon > 0$  充分小, 由 I + II 的估计, 利用  $\|\nabla \phi_k\|_{L^\infty} \leq k^{-1}$   $\|\nabla \phi\|_{L^\infty}$  可得

$$\begin{aligned} |I| + |II| &\leq (a + \varepsilon) \|\phi_k \nabla v\|_{L^2}^2 \\ &+ \left( 4 \cdot \frac{a^2 + \nu^2}{a} + 4a^2 \varepsilon^{-1} \right) k^{-2} \|\nabla \phi\|_{L^\infty}^2 \|W\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (10.18)$$

利用假设  $\left| 1 + i \frac{\mu}{b} \right| \leq \frac{\sigma+1}{\sigma}$ , 能证

$$III = -2\operatorname{Re}[(b + i\mu)(\phi_k^2(f(u) - f(v)), W)] \leq 0. \quad (10.19)$$

事实上, 注意到  $f(u) = |u|^{2\sigma}u$  和

$$\begin{aligned} f(u) - f(v) &= \int_0^1 [(\sigma+1)(u-v)|z|^{2\sigma} \\ &+ \sigma(\bar{u} - \bar{v})z^2|z|^{2\sigma-2}]d\lambda, \end{aligned}$$

其中  $z = \lambda u + (1-\lambda)v$ , 写 III 为

$$\begin{aligned} III &= -2\operatorname{Re}\{ (b + i\mu) \int_0^1 d\lambda \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 [(\sigma+1)|W|^2|Z|^{2\sigma} \\ &+ \sigma W^2 Z^2 |Z|^{2\sigma-2}] dx \} \\ &\leq 2\sigma b \max \left\{ 0, \left| 1 + i \frac{\mu}{b} \right| - \frac{\sigma+1}{\sigma} \right\} \int_0^1 d\lambda \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 |W|^2 |Z|^{2\sigma} dx = 0. \end{aligned}$$

对于第四项 IV, 利用 Young 不等式,

$$AB \leq (A^p/p) + (B^q/q), \quad A, B \geq 0, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

可得  $(f(v) = |v|^{2\sigma}v)$

$$\begin{aligned} |IV| &= 2b |(\phi_k^2 f(v), W)| \\ &\leq \frac{2\sigma+1}{\sigma+1} b^{(2\sigma+1)/(2\sigma+2)} \int_{\mathbb{R}^n} (\phi_k^{\frac{2}{2\sigma+1}} |v|)^{2\sigma+2} dx \\ &+ \frac{1}{\sigma+1} b^{(2\sigma+1)/(2\sigma+2)} b \int_{\mathbb{R}^n} |W|^{2\sigma+2} dx. \end{aligned} \quad (10.20)$$

联系(10.18), (10.19), (10.20), 让  $k \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0$ , 可得

$$\begin{aligned} \partial_t \int_{\mathbb{R}^n} |W|^2 dx &\leq a \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \frac{2\sigma+1}{\sigma+1} b^{\frac{2\sigma+1}{2\sigma+2}} \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{2\sigma+2} dx \\ &+ \frac{1}{\sigma+1} b^{\frac{2\sigma+1}{2\sigma+2}+1} \int_{\mathbb{R}^n} |W|^{2\sigma+2} dx. \end{aligned}$$

利用命题 10.7 的估计, 上式对  $t$  积分得

$$\begin{aligned} \|W\|_{L^2}^2 \leq & \|u_0 - v_0\|_{L^2}^2 + a \cdot \mathcal{K}(v_0) + C_1(\sigma) b^{\frac{2\sigma+1}{2\sigma+2}} (1+b) \varphi(v_0) t \\ & + C_2(\sigma) b^{(2\sigma+1)/(2\sigma+2)} \left( b \int_0^t \|u(t')\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2} dt' \right), \quad (10.21) \end{aligned}$$

这里常数  $C_1, C_2$  仅与  $\sigma$  有关, 要求的估计 (10.11) 由应用 (10.4) 于 (10.21) 的最后一项即得.

如  $v_0 \in H^2$ , NLS 方程 (10.2) 具初值  $v_0$  的解  $v \in C([0, T]; H^2)$  由定理 10.4 满足估计 (10.8), 此时可估计 II, IV 为

$$\begin{cases} |II| = 2a \left| \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 \Delta v, W \right| \\ \leq \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 |W|^2 dx + a^2 \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 |\Delta v|^2 dx, \\ |IV| = 2b \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 |f(v)| |W| dx \\ \leq \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 |W|^2 dx + b^2 \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{4\sigma+2} dx. \end{cases} \quad (10.22)$$

应用 Gagliardo-Nirenberg 不等式于  $\int_{\mathbb{R}^n} |v|^{4\sigma+2} dx$  有

$$\|v\|_{L^{4\sigma+2}} \leq C(\sigma) \|\Delta v\|_{L^2}^\theta \|v\|_{L^2}^{1-\theta},$$

其中常数  $C(\sigma)$  依赖于  $\sigma, \theta \geq 0$  为

$$\theta = \frac{n}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4\sigma+2} \right).$$

设  $\sigma \leq 2/(n-4)$ , 则  $\theta \leq 1$ , 估计 I, III 没有改变, 联系这些估计并令  $k \rightarrow \infty$  得

$$\begin{aligned} \partial_t \int_{\mathbb{R}^n} |W|^2 dx \leq & 2 \int_{\mathbb{R}^n} |W|^2 dx + a^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta v|^2 dx \\ & + b^2 C(\sigma) \|\Delta v\|_{L^2}^{n\sigma} \|v_0\|_{L^2}^{4\sigma+2-n\sigma}. \end{aligned} \quad (10.23)$$

为求  $\|\Delta v\|_{L^2}$  的界, 利用 (10.8), 对  $t \leq T$

$$\|\Delta v(t)\|_{L^2} \leq K^2 \|\Delta v_0\|_{H^2}^2 \equiv \mathcal{A}(v_0), \quad (10.24)$$

这里  $K$  为  $T$  和  $\mathcal{K}(v_0)$  的上界, 令

$$\mathcal{L}(v_0) \equiv C(\sigma) \mathcal{A}(v_0)^{n\sigma/2} \|v_0\|_{L^2}^{4\sigma+2-n\sigma}, \quad (10.25)$$

积分(10.23)可得.

**定理 10.9** 设  $\sigma > 0, \sigma \leq 2/(n-4), n \geq 5, \mu \leq 0; \sigma \leq \frac{2}{n}, \mu < 0$ , 设  $b, \mu$  满足条件(10.10), 让  $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$  和  $v_0 \in H^2(\mathbb{R}^n)$  ( $\|v_0\|_{L^2}$  充分小,  $\mu < 0, \sigma = \frac{2}{n}$ ). 考虑差

$$W(x, t) = u(x, t) - v(x, t),$$

它为 GL 方程(10.1)具  $u(x, 0) = u_0(x)$  的解  $u(x, t)$  和 NLS 方程(10.2),  $v(x, 0) = v_0$  的解  $v(x, t)$  之差, 则  $W(x, t)$  具有估计

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\|_{L^2}^2 &\leq \|u_0 - v_0\|_{L^2}^2 e^{2t} + \frac{1}{2} a^2 \mathcal{A}(v_0)(e^{2t} - 1) \\ &\quad + \frac{1}{2} b^2 \mathcal{B}(v_0)(e^{2t} - 1), \end{aligned}$$

对  $t < T, T < \infty$  成立, 其中  $\mathcal{A}(v_0)$  为  $\|v\|_{C([0, T]; H^2)}$  作为  $v_0$  的界 (见(10.24),  $\mathcal{B}(v_0)$  为(10.25)所给定).

特别, 对于小的  $a$  和  $b$ ,  $\|u_0 - v_0\|_{L^2} = O(a) + O(b)$ , 则

$$\|u - v\|_{L^2} = O(a) + O(b).$$

现考虑  $L^{2\sigma+2}$  无黏极限.

**定理 10.10**  $\sigma \leq 2/(n-4) (n \geq 5), \mu \geq 0$  和  $\sigma \leq \frac{2}{n}, \mu < 0$ , 且

$$(2\sigma+1)(2\sigma+2) \leq \frac{2n}{n-4}, n \geq 5. \quad (10.26)$$

又设  $a, \nu$  和  $b, \mu$  满足

$$\left| 1 + i \frac{\nu}{a} \right| \leq \frac{\sigma+1-\delta}{\sigma}, \left| 1 + i \frac{\mu}{b} \right| \leq \frac{\sigma+1}{\sigma}, \quad (10.27)$$

其中  $\delta \in (0, 1)$  为任意参数,  $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^{2\sigma+2}(\mathbb{R}^n)$ ,  $v_0 \in H^2(\mathbb{R}^n)$  ( $\|v_0\|_{L^2}$  充分小,  $\mu < 0, \sigma = \frac{n}{2}$ ), 则差

$$W = u - v$$

为 GL 方程(10.1)具  $u(0) = u_0$  的解和 NLS 方程(10.2)具  $v(0) = v_0$  的解  $v(x, t)$  之差, 满足  $L^{2\sigma+2}$  估计

$$\|W(t)\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2} \leq \|u_0 - v_0\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2} e^{C(\sigma)t}$$

$$\begin{aligned}
& + C_1(\sigma)b^{2\sigma+2}\mathcal{H}(v_0)(e^{C(\sigma)t}-1) \\
& + C_2(\sigma)(a\delta^{-1})^{\sigma+1}\chi(v_0)(e^{C(\sigma)t}-1)
\end{aligned} \tag{10.28}$$

对任何  $T < \infty, t \leq T$  成立, 其中  $C_1, C_2, C$  为仅依赖于  $\sigma, \mathcal{H}, \chi$  的界, 而与  $a, b$  无关.

特别, (10.28) 表示  $L^{2\sigma+2}$  的收敛率具有阶  $O(\sqrt{a}) + O(\sqrt{b})$ , 如  $\delta$  接近于 1.

证 令  $W = u - v$ , 则满足方程

$\partial_t W = (a + i\nu)\Delta W + a\Delta v - (b + i\mu)(f(u) - f(v)) - bf(v)$ , 其中  $f(u) = |u|^{2\sigma}u$ , 让  $\phi_k(x)$  为如前的截断函数, 可得

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2(\sigma+1)}\partial_t \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 |W|^{2\sigma+2} dx = \operatorname{Re}(a + i\nu) \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 \\
& |W|^{2\sigma} \Delta W \overline{W} dx + a \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 |W|^{2\sigma} (\Delta v) \overline{W} dx \\
& - \operatorname{Re}(b + i\mu) \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 |W|^{2\sigma} [f(u) - f(v)] \overline{W} dx \\
& - b \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 |W|^{2\sigma} f(v) \overline{W} dx.
\end{aligned}$$

为简单计, 令上式右端的四项积分为 I, II, III, IV, 分部积分得:

$$\begin{aligned}
\text{I} = & -\operatorname{Re}(a + i\nu) \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 [(\sigma+1)|W|^{2\sigma} |\nabla W|^2 \\
& + \sigma |W|^{2\sigma-2} (\overline{W} \nabla W)^2] dx \\
& - \operatorname{Re}(a + i\nu) \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k |W|^{2\sigma} \overline{W} \nabla W \phi_k dx.
\end{aligned}$$

选取  $\varepsilon > 0$  使得

$$|1 + i\nu/a| \leq \frac{\sigma + 1 - \varepsilon - \delta}{\sigma}.$$

分 I 为  $I_1$  和  $I_2$ ,

$$\begin{aligned}
I_1 = & -\operatorname{Re}(a + i\nu) \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 [(\sigma+1-\varepsilon-\delta)|W|^{2\sigma} |\nabla W|^2 \\
& + \sigma |W|^{2\sigma-2} (\overline{W} \cdot \nabla W)^2] dx.
\end{aligned}$$

容易验证

$$|I_1| \leq \sigma a \max \left\{ 0, |a + i\nu| - \frac{\sigma + 1 - \delta - \varepsilon}{\sigma} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 |W|^{2\sigma} |\nabla W|^2 dx = 0, \\
I_2 &= -a(\delta + \varepsilon) \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 |W|^{2\sigma} |\nabla W|^2 dx - \operatorname{Re}(a + i\nu) \\
& \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 |W|^{2\sigma} \overline{W} \nabla W \nabla \phi_k dx.
\end{aligned}$$

对  $I_2$  第二项应用 Young 不等式得

$$\begin{aligned}
|I_2| &\leq -a\delta \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 |W|^{2\sigma} |\nabla W|^2 dx \\
&+ \frac{|a + i\nu|^2}{4a\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} |W|^{2\sigma+2} |\nabla \phi_k|^2 dx.
\end{aligned}$$

分部积分 II 可得

$$\begin{aligned}
II &= -a \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 [(\sigma + 1) |W|^{2\sigma} \nabla v \nabla \overline{W} \\
&+ \sigma |W|^{2\sigma-2} \overline{W}^2 \nabla v \nabla W] dx \\
&- 2a \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k |W|^{2\sigma} \nabla \phi_k \nabla v \overline{W} dx.
\end{aligned}$$

应用 Young 不等式有

$$\begin{aligned}
|II| &\leq C_1(\sigma) \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 |W|^{2\sigma+2} dx + C_2(\sigma)(a\delta^{-1})^{\sigma+1} \\
&\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^{2\sigma+2} dx + a\delta \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 |W|^{2\sigma} |\nabla W|^2 dx \\
&+ a \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \phi_k| |W|^{2\sigma+2} dx + a \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \phi_k| |\nabla v|^{2\sigma+2} dx.
\end{aligned}$$

注意到  $\|\nabla \phi_k\|_{L^\infty} \leq k^{-1} \|\nabla \phi\|_{L^\infty}$ ,

$$\begin{aligned}
|I + II| &\leq C_1(\sigma) \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 |W|^{2\sigma+2} dx + [C_2(\sigma)(a\delta^{-1})^{\sigma+1} \\
&+ ak^{-1} \|\nabla \phi\|_{L^\infty}] \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^{2\sigma+2} dx \\
&+ \left[ \frac{|a + i\nu|^2}{4a\varepsilon} k^{-2} \|\nabla \phi\|_{L^\infty}^2 + ak^{-1} \|\nabla \phi\|_{L^\infty} \right] \\
&\cdot \int_{\mathbb{R}^n} |W|^{2\sigma+2} dx. \tag{10.29}
\end{aligned}$$

第三项 III 类似于定理 10.6 的证明, 结论是

$$III \leq 0, \text{ 当 } \left| 1 + i \frac{\mu}{b} \right| \leq \frac{\sigma + 1}{\sigma} \text{ 时.} \tag{10.30}$$



现转向 IV,

$$IV = -b \operatorname{Re} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 |W|^{2\sigma} |v|^{2\sigma} \bar{W} dx \right).$$

利用 Young 不等式

$$\begin{aligned} |IV| &\leq \frac{2\sigma+1}{2\sigma+2} \int_{\mathbb{R}^n} |W|^{2\sigma+2} dx \\ &\quad + \frac{1}{2\sigma+2} b^{2\sigma+2} \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{(2\sigma+1)(2\sigma+2)} dx \end{aligned} \quad (10.31)$$

应用 Gagliardo-Nirenberg 不等式

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} |v|^{(2\sigma+1)(2\sigma+2)} dx \\ &\leq C_3(\sigma) (\|\Delta v\|_{L^2}^\theta \|v\|_{L^2}^{1-\theta})^{(2\sigma+1)(2\sigma+2)}, \end{aligned} \quad (10.32)$$

$$\begin{aligned} \int |\nabla v|^{2\sigma+2} dx &\leq C_4(\sigma) (\|\Delta v\|_{L^2}^{\theta_1} \|v\|_{L^2}^{1-\theta_1})^{(2\sigma+2)}, \\ &\quad (10.33) \end{aligned}$$

其中常数  $C_3, C_4$  仅依赖于  $\sigma, \theta, \theta_1 \geq 0$  为

$$\theta = \frac{n}{2} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{(2\sigma+1)(2\sigma+2)} \right],$$

$$\theta_1 = \frac{n}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2\sigma+2} \right).$$

由假设  $\sigma, \theta, \theta_1 \leq 1$ , 利用 (10.25) 可得

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{(2\sigma+1)(2\sigma+2)} dx &\leq \mathcal{H}(v_0), \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^{2\sigma+2} dx \\ &\leq \mathcal{K}(v_0), \end{aligned} \quad (10.34)$$

这里  $\mathcal{H}(v_0), \mathcal{K}(v_0)$  为

$$\mathcal{H}(v_0) \equiv C_1(\sigma) \mathcal{A}(v_0)^{\theta(2\sigma+1)(\sigma+1)} \|v_0\|_{L^2}^{(1-\theta)(2\sigma+1)(2\sigma+2)}, \quad (10.35)$$

$$\mathcal{K}(v_0) \equiv C_4(\sigma) \mathcal{A}(v_0)^{\theta_1(2\sigma+2)} \|v_0\|_{L^2}^{(1-\theta_1)(2\sigma+2)}. \quad (10.36)$$

联系估计 (10.29) — (10.36), 对  $t$  积分, 让  $k \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0$  可得

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |w|^{2\sigma+2} dx &\leq e^{C(\sigma)t} \int_{\mathbb{R}^n} |u_0 - v_0|^{2\sigma+2} dx + C_5(\sigma) b^{2\sigma+2} \mathcal{H}(v_0) \\ &\quad (e^{C(\sigma)t} - 1) + C_6(\sigma) (a\delta^{-1})^{\sigma+1} \mathcal{K}(v_0) (e^{C(\sigma)t} - 1), \end{aligned}$$

其中  $C_1, C_5, C_6$  为仅依赖于  $\sigma$  的常数, 定理证毕.

现考虑无黏  $H^1$  极限.

**定理 10.11** 设  $n\sigma \leq 2, u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$  (如  $n\sigma = 2, \|u_0\|_{L^2}$  充分小),  $v_0 \in H^2(\mathbb{R}^n)$  (若  $\mu < 0, n\sigma = 2, \|v_0\|_{L^2}$  充分小). 考虑差

$$W(x, t) = u(x, t) - v(x, t)$$

为 GL 方程 (10.1),  $u(0) = u_0$  的解  $u$  和 NLS 方程 (10.2),  $v(0) = v_0$  的解  $v$  之差, 则  $W$  对任何  $T < \infty, t < T$  有

$$\begin{aligned} \|\nabla W(t)\|_{L^2}^2 &\leq \|\nabla u_0 - \nabla v_0\|_{L^2}^2 + 2a\mathcal{A}(v_0)t \\ &\quad + 4a^{-1}(b^2 + \mu^2)\mathcal{L}(v_0)t + 2a^{-1}(b^2 + \mu^2)\mathcal{L}(v_0, a, b, t), \end{aligned} \quad (10.37)$$

其中  $\mathcal{A}(v_0), \mathcal{L}(v_0)$  为 (10.24), (10.25) 所给定, 作为含  $v_0$  项的上界, 但与  $a, b$  无关,  $\mathcal{L}(v_0, a, b, t)$  依赖于  $v_0, a, b, t$ , 它的阶为  $a^{(1-n\sigma)/2}$  (对于小的  $a, b^2 + \mu^2$  为  $O(a^2)$  或为更高阶).

特别, (10.37) 推出如  $u_0 = v_0, b^2 + \mu^2 = O(a^2)$  或为更高阶, 则我们有

$$\|\nabla(u - v)(t)\|_{L^2}^2 = O(a) + O((b^2 + \mu^2)a^{-1-\frac{n\sigma}{2}}).$$

在我们证明定理之前, 我们得到估计  $\int_0^t \|\Delta u(t')\|_{L^2}^2 dt'$ , 它将对定理的证明有用.

**命题 10.12** 设  $\sigma \leq 2/(n-4), n \geq 5$ , 又设  $u$  为 GL 方程具  $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$  的解, 则对  $u$  有估计

$$\begin{aligned} &\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 + a \int_0^t \|\Delta u(t')\|_{L^2}^2 dt' \\ &\quad - [C(\sigma) \frac{b^2 + \mu^2}{a} \|u_0\|_{L^2}^{4\sigma+2-n\sigma}] \int_0^t \|\Delta u(t')\|_{L^2}^{n\sigma} dt' \\ &\leq \|\Delta u_0\|_{L^2}^2, \end{aligned} \quad (10.38)$$

这里  $C(\sigma)$  为常数, 更进一步, 若  $n\sigma = 2, \|u_0\|_{L^2}$  充分小, 如

$$\|u_0\|_{L^2}^{4\sigma+2-n\sigma} < C^{-1}(\sigma) a^2 (b^2 + \mu^2)^{-1},$$

则有

$$\int_0^t \|\Delta u(t')\|_{L^2}^2 dt' \leq [a - C(\sigma)a^{-1} \cdot (b^2 + \mu^2) \|u_0\|_{L^2}^{4\sigma+2-n\sigma}]^{-1} \|\nabla u_0\|_{L^2}^2, \quad (10.39)$$

并且若  $n\sigma < 2$ , 则有

$$\int_0^t \|\Delta u(t')\|_{L^2}^2 dt' \leq \max\{2a^{-1} \|\nabla u_0\|_{L^2}^2, [C(\sigma)a^{-2}(b^2 + \mu^2) \|u_0\|_{L^2}^{2-(n-4)\sigma}]^{\frac{2}{2-n\sigma}}\}. \quad (10.40)$$

证 设  $\phi_k^2(x)$  ( $k > 0$ ) 为定理 10.6 证明中的截断函数, 易知

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 |\nabla u|^2 dx = 2\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 (\partial_t \nabla u) \nabla \bar{u} dx = \text{I} + \text{II},$$

其中

$$\text{I} = 2\operatorname{Re}(a + i\nu) \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 \Delta(\nabla u) \nabla \bar{u} dx,$$

$$\text{II} = -2\operatorname{Re}(b + i\mu) \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 \nabla(|u|^{2\sigma} u) \nabla \bar{u} dx.$$

分部积分得

$$\begin{aligned} \text{I} &= -2a \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 |\Delta u|^2 dx - 4\operatorname{Re}(a + i\nu) \\ &\quad \cdot \int_{\mathbb{R}^n} (\phi_k \Delta u) (\nabla \phi_k \cdot \nabla \bar{u}) dx, \\ \text{II} &= 2\operatorname{Re}(b + i\mu) \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 |u|^{2\sigma} u \Delta \bar{u} dx + 4\operatorname{Re}(b + i\mu) \\ &\quad \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k |u|^{2\sigma} u \nabla \phi_k \nabla \bar{u} dx. \end{aligned}$$

利用 Young 不等式于 I 和 II 中, 再相加, 令  $k \rightarrow \infty$ ,

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2 dx \leq -a \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2 dx + \frac{8(b^2 + \mu^2)}{a} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{4\sigma+2} dx.$$

运用 G-N 不等式于  $\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{4\sigma+2} dx$ .

$$\|u\|_{L^{4\sigma+2}} \leq C(\sigma) \|\Delta u\|_{L^2}^\theta \|u\|_{L^2}^{1-\theta},$$

这里  $C(\sigma)$  为常数, 依赖于  $\sigma, \theta \geq 0$  为

$$\theta = \frac{n}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4\sigma+2} \right).$$

由假设  $\sigma \leq 2/(n-4)$ , 因此

$$\begin{aligned} & \partial_t \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx + a \|\Delta u\|_{L^2}^2 \\ & - \frac{C(\sigma)(b^2 + \mu^2)}{a} \|\Delta u\|_{L^2}^{n\sigma} \|u_0\|_{L^2}^{4\sigma+2-n\sigma} \leq 0, \end{aligned}$$

对  $t$  积分后, 我们得到 (10.38), (10.39) 从 (10.38) 得到, (10.40) 由 (10.38) 和引理 10.8 得到.

现证明定理 10.11, 差  $W = u - v$  满足方程

$$\partial_t W = (a + i\nu)\Delta W + a\Delta v - (b + i\mu)(f(u) - f(v)) - bf(v),$$

其中  $f(u) = |u|^{2\sigma}u$ , 设  $\phi_k(x)$  为如前的截断函数, 有

$$\begin{aligned} \partial_t \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 |\Delta W|^2 dx &= 2\operatorname{Re}(a + i\nu) \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 \Delta(\nabla W) \Delta \bar{W} dx \\ &+ 2a\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 \Delta(\nabla v) \nabla \bar{W} dx - 2\operatorname{Re}(b + i\mu) \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 \nabla(f(u) \\ &- f(v)) \nabla \bar{W} dx - 2b\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 \nabla f(v) \nabla \bar{W} dx. \end{aligned}$$

现记上式右端四个积分分别为 I, II, III, IV, 并估计它们

$$\begin{aligned} \text{I} &= -2a \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 |\Delta W|^2 dx \\ &- 4\operatorname{Re}(a + i\nu) \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k \Delta W (\nabla \phi_k \nabla \bar{W}) dx, \\ \text{II} &= -2a\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 \Delta v \nabla \bar{W} dx - 4a\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k \Delta v (\nabla \phi_k \nabla \bar{W}) dx. \end{aligned}$$

在 I 和 II 中利用 Young 不等式可得

$$\begin{aligned} |\text{I}| + |\text{II}| &\leq -a \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 |\Delta W|^2 dx + (2a + \epsilon) \|\phi_k \Delta v\|_{L^2}^2 \\ &+ 8\left(\frac{a^2 + \nu^2}{a} + a^2 \epsilon^{-1}\right) k^{-2} \|\nabla \phi\|_{L^\infty}^2 \|\nabla W\|_{L^2}^2, \quad (10.41) \end{aligned}$$

其中  $\epsilon > 0$  充分小, 分部积分得

$$\begin{aligned} \text{III} &= 2\operatorname{Re}(b + i\mu) \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 (f(u) - f(v)) \Delta \bar{W} dx \\ &+ 4\operatorname{Re}(b + i\mu) \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k [f(u) - f(v)] \nabla \phi_k \nabla \bar{W} dx, \\ \text{IV} &= 2b\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 f(v) \Delta \bar{W} dx \end{aligned}$$

$$+ 4b \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k f(v) \nabla \phi_k \nabla \bar{W} dx,$$

由此可得

$$\begin{aligned} |\text{III} + \text{IV}| &\leq a \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 |\Delta W|^2 dx + 2a^{-1}(b^2 + \mu^2) \\ &\cdot \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 |f(u)|^2 dx + 2a^{-1}(2b^2 + \mu^2) \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^2 |f(v)|^2 dx \\ &\quad + 8|b + i\mu|k^{-1} \|\nabla \phi\|_{L^\infty} \left[ \int_{\mathbb{R}^n} (|f(u)| + |f(v)|) dx \right]^{1/2} \\ &\quad \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla W|^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (10.42)$$

联系(10.41), (10.42), 对  $t$  积分, 令  $k \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0$  得

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(u(t) - v(t))|^2 dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(u_0 - v_0)|^2 dx \\ &\quad + 2a \int_0^t \|\Delta v(t')\|_{L^2}^2 dt' + 4a^{-1}(b^2 + \mu^2) \\ &\quad \int_0^t \|v(t')\|_{L^{4\sigma+2}}^{4\sigma+2} dt' + 2a^{-1}(b^2 + \mu^2) \int_0^t \|u(t')\|_{L^{4\sigma+2}}^{4\sigma+2} dt'. \end{aligned} \quad (10.43)$$

如同定理 10.9 的证明,

$$\|\Delta v\|_{L^2}^2 \leq \mathcal{A}(v_0), \quad \|v\|_{L^{4\sigma+2}}^{4\sigma+2} \leq \mathcal{Q}(v_0), \quad (10.44)$$

其中  $\mathcal{A}(v_0), \mathcal{Q}(v_0)$  为(10.24), (10.25)所定义,  $\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{4\sigma+2} dx$  的估计已在命题 10.12 中给出,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{4\sigma+2} dx \leq C(\sigma) \|\Delta u\|_{L^2}^{n\sigma} \|u\|_{L^2}^{2-(n-4)\sigma},$$

这里  $C$  仅依赖于  $\sigma$ , 因此

$$\begin{aligned} \int_0^t \|u(t')\|_{L^{4\sigma+2}}^{4\sigma+2} dt' &\leq C(\sigma) \|u_0\|_{L^2}^{2-(n-4)\sigma} \\ &\cdot \left( \int_0^t \|\Delta u(t')\|_{L^2}^2 dt' \right)^{n\sigma/2} t^{1-\frac{n\sigma}{2}}. \end{aligned} \quad (10.45)$$

如  $n\sigma = 2$ ,  $\|u_0\|_{L^2}$  充分小, 则

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \|u(t')\|_{L^{4\sigma+2}}^{4\sigma+2} dt' \\
&= C(\sigma) \|u_0\|_{L^2}^{2(n-4)\sigma} \|\nabla u_0\|_{L^2}^2 [a - C(\sigma)a^{-1} \\
&\quad \cdot (b^2 + \mu^2) \|u_0\|_{L^2}^{4\sigma+2-n\sigma}]^{-1}.
\end{aligned} \tag{10.46}$$

如  $n\sigma < 2$ , 则

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \|u(t')\|_{L^{4\sigma+2}}^{4\sigma+2} dt' \\
&\leq \max\{C(\sigma)a^{-\frac{n\sigma}{2}} \|\nabla u_0\|_{L^2}^{n\sigma} \|u_0\|_{L^2}^{2(n-4)\sigma} t^{1-\frac{n\sigma}{2}}, \\
&\quad C(\sigma)(a^{-2}(b^2 + \mu^2))^{n\sigma/(2-n\sigma)} \|u_0\|_{L^2}^{2+\frac{8\sigma}{2-n\sigma}} t\}.
\end{aligned} \tag{10.47}$$

(10.46), (10.47) 的界用  $\mathcal{L}(a, b, v_0, t)$  表示, 显然, 对于小的  $a$ , 如  $b^2 + \mu^2 = O(a^2)$ , 则  $\mathcal{L}(a, b, v_0, t)$  为  $a^{-\frac{n\sigma}{2}}$ . 将 (10.47), (10.44), (10.45) 和 (10.46) 代入 (10.43) 即得定理.

## § 11 二维广义 Ginzburg-Landau 方程殆周期解的存在性

现考虑如下广义 Ginzburg-Landau 方程

$$\begin{aligned}
u_t &= \rho u + (1 + i\nu)\Delta u - (1 + i\mu)|u|^{2\sigma}u + \alpha\lambda_1 \cdot \nabla(|u|^2u) \\
&\quad + \beta(\lambda_2 \cdot \nabla)|u|^2 + f(x, t).
\end{aligned} \tag{11.1}$$

殆周期解的存在性, 其中  $\rho, \nu, \mu, \sigma, \alpha$  和  $\beta$  为实参数,  $\lambda_1, \lambda_2$  为实矢量,  $f(x, t)$  为任意复值函数,  $u(x, t)$  为未知复值函数,  $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$ ;  $\Omega = (0, L) \times (0, L) \in \mathbb{R}^2$ ;  $L$  为正常数, 设  $u(x, t)$  满足空间周期条件, 即  $u(\cdot, x)$  为  $\Omega$  周期的.

以  $X$  表示 Banach 空间, 具模  $\|\cdot\|_X$ , 以  $\|\cdot\|_p$  表示  $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$  ( $p \neq 2$ ),  $\|\cdot\|$  表示  $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ .

**定义 11.1 (殆周期函数)** 设  $u(t)$  为一可测函数, 其值在 Banach 空间  $X$  中, 我们说  $u(t)$  为  $X$  殆周期的, 如对任何  $\epsilon > 0$ , 存在

相对稠集  $E(\varepsilon, u) \subset \mathbb{R}$ , 使得

$$\operatorname{ess\,sup}_{t \in \cdot} \|u(t + \tau) - u(t)\|_X \leq \varepsilon, \forall \tau \in E(\varepsilon, u). \quad (11.2)$$

令  $L_{\text{per}}^p = \{g \in L^p(\Omega), g(x) \text{ 为 } \Omega \text{ 周期函数}\}$ ,

$$H_{\text{per}}^k = \{g \in H^k(\Omega), g(x) \text{ 为 } \Omega \text{ 周期函数}\},$$

$L_{AP}^p(X) = \{g: \mathbb{R} \rightarrow X, g(t) \in L^p(\cdot, 1; X), g(t) \text{ 为 } X \text{ 殆周期}\}$ , 记  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  为  $H_{\text{per}}^1$  和  $H_{\text{per}}^1$  的对偶关系, 定义线性算子  $\mathcal{A}: H_{\text{per}}^1 \rightarrow H_{\text{per}}^1$  为

$$\langle \mathcal{A}v, w \rangle = \int_{\Omega} ((1 + i\mu) \nabla v, \nabla \bar{w} - dv \bar{w}) dx, \forall v, w \in H_{\text{per}}^1.$$

令  $\rho(A)$  表示  $A$  的正则集, 选取  $0 \in \rho(A)$ .

$$\begin{aligned} \text{置 } N\phi &= (\rho - d)\phi - (1 + i\mu)|\phi|^{2\sigma} + \alpha\lambda_1 \cdot \nabla(|\phi|^2\phi) \\ &\quad + \beta(\lambda_2 \cdot \nabla)|\phi|^2, \forall \phi \in H_{\text{per}}^1, \end{aligned}$$

则  $N$  为局部 Lip 连续的, 即  $\exists C > 0$ , 使得

$$\|N(v) - N(w)\| \leq C \|v - w\|_{H^1}, \forall v, w \in H_{\text{per}}^1, \text{ 其中}$$

Lip 常数  $C$  连续依赖于  $\|v\|_{H^1}, \|w\|_{H^1}$ .

为了证明 GL 方程(11.1)殆周期解的存在性, 我们作如下假定:

假定 I. 存在正数  $\sigma$  和  $\delta$ , 使得如下不等式成立

$$\frac{7}{3} \leq \sigma \leq \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu - \nu\delta^2}{1 + \delta^2}\right)^2} - 1}.$$

假定 II.  $f(x, t) \in L_{AP}^\infty(H_{\text{per}}^1), f_t(x, t) \in L_{AP}^\infty(H_{\text{per}}^{-1})$ , 令  $M = \operatorname{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}} \|f(x, t)\|_{H^1}, N = \operatorname{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}} \|f_t(x, t)\|_{H^{-1}}$ .

我们可将 GL 方程(11.1)和周期边界条件(11.2)写成算子方程

$$u'(t) + \mathcal{A}u(t) = Nu(t) + f(\cdot, t), \forall t, u(t) \in H_{\text{per}}^1. \quad (11.3)$$

定义 11.2(强解)  $u(x, t)$  称为问题(11.3)的强解, 如果满足如下条件:

$$(1) u(t) \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^1, H_{\text{per}}^1),$$

$$(2) \mathcal{A}u(t) \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^1, L_{\text{per}}^2),$$

$$(3) u'(t) \in L_{\text{loc}}^2(R^1, L_{\text{per}}^2),$$

(4)  $u'(x, t) + \mathcal{A}u(x, t) = Nu(x, t) + f(x, t)$ , 在  $\mathbb{R} \times \Omega$  上几乎处处成立.

在以下证明中, 我们经常要用到以下不等式:

(i) Agmon 不等式

$$\|u\|_{\infty} \leq K_1 \|u\|_{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^2}^{\frac{1}{2}}, \forall u \in H_2(\Omega),$$

$$\|u\|_{H^2} \leq K_2 \sqrt{\|u\|^2 + \|\Delta u\|^2}, \forall u \in H^2(\Omega).$$

(ii) Sobolev 插值不等式

$$\|u\|_4 \leq K_3 \|u\|_{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^1}^{\frac{1}{2}}, \forall u \in H^1(\Omega),$$

$$\|u\|_8 \leq K(\theta, q) \|u\|_{H^2}^{\theta} \|u\|_q^{1-\theta}, \forall u \in H^2(\Omega),$$

$$\theta = \frac{8-q}{4q+8}, 1 < q < 8; \theta = 0, q > 8.$$

(iii) Young 不等式

$$ab \leq \frac{(\epsilon a)^p}{p} + \frac{\left(\frac{b}{\epsilon}\right)^q}{q}, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \epsilon > 0.$$

$$(iv) \|u\| \leq K_4 \|\nabla u\|, u \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} u dx = 0,$$

$$\|u\|_q \leq K' \|u\|_{H_1}, u \in H^1(\Omega), 1 < q < \infty,$$

$$\|D^2 u\|_{H^1} \leq K'' (\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 + \|\nabla \Delta u\|^2)^{\frac{1}{2}}, \\ \forall u \in H^3(\Omega),$$

$$\text{其中 } |D^2 u(t)| = \sqrt{|\partial_{xx} u(t)|^2 + |\partial_{xy} u(t)|^2 + |\partial_{yy} u(t)|^2}.$$

以下我们用 Galerkin 方法构造问题(11.1), (11.2)的有界解.

设  $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$  表示空间  $H_{\text{per}}^1$  的标准正交基, 它由算子  $\mathcal{A}$  的特征函数所组成, 考虑非线性常微分方程组的初值问题

$$(u'_{m,r}(t), \phi_j) + (\mathcal{A}u_{m,r}(t), \phi_j) \\ = (Nu_{m,r}(t), \phi_j) + (f, \phi_j), \\ j = 1, 2, \dots, m, \quad (11.4)$$



$$u_{m,r}(-r)=0, \forall r \in \mathbb{R}^+, \quad (11.5)$$

其中  $u_{m,r} = \sum_{j=1}^m \alpha_{m,r,j}(t) \phi_j, \alpha_{m,r,j}(t) (j=1,2,\cdots,m)$  为待定函数, 因  $(f(t), \phi_j)$  对  $t$  连续,  $(Nu_{m,r}(t), \phi_j)$  为对  $(\alpha_{m,r,1}, \alpha_{m,r,2}, \cdots, \alpha_{m,r,m})$  为 Lip 连续, 因此方程组 (11.4), (11.5) 具有惟一解  $(\alpha_{m,r,1}, \alpha_{m,r,2}, \cdots, \alpha_{m,r,m})$ , 即存在问题 (11.4), (11.5) 的在某个区间  $t \in [-r, t_m]$  上, 解  $u_{m,r}(t)$ , 由估计  $\|u_{m,r}\|$  和  $\|\partial_x u_{m,r}\|$  的一致有界性, 可得到问题 (11.4), (11.5) 的整体解  $u_{m,r}(t), t \in [-r, +\infty)$ , 而且由于先验估计  $\|u_{m,r}\|, \|\partial_x u_{m,r}\|$  关于  $m, r$  的一致有界性, 便从序列  $\{u_{m,r}\}$  可选取收敛子序列, 证明该子序列的极限为我们所要求的解.

**引理 11.3** 在假设 II 下, 存在常数  $C_1 > 0$  使得

$$\|u_{m,r}(t)\| \leq C_1, \forall t \in [-r, +\infty),$$

其中  $C_1$  仅依赖于  $\alpha, \beta, \rho, \nu, \sigma, \lambda_1, \lambda_2, L$  和  $f$ , 但与  $\mu, m, r$  无关.

**证** 以  $\bar{u}_{m,r,j}$  乘 (11.4) 第  $j$  个方程, 对  $j=1$  到  $m$  求和, 两边取实部可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_{m,r}(t)\|^2 &= \rho \|u_{m,r}(t)\|^2 - \|\nabla u_{m,r}(t)\|^2 \\ &\quad - \int_{\Omega} |u_{m,r}(t)|^{2\sigma+2} dx \\ &\quad + \alpha \operatorname{Re} \int_{\Omega} (\lambda_1 \cdot \nabla (|u_{m,r}(t)|^2 u_{m,r}(t))) \bar{u}_{m,r}(t) dx \\ &\quad + \beta \operatorname{Re} \int_{\Omega} (\lambda_2 \cdot \nabla u_{m,r}(t)) |u_{m,r}(t)|^2 \bar{u}_{m,r}(t) dx \\ &\quad + \operatorname{Re}(f, u_{m,r}(t)). \end{aligned} \quad (11.6)$$

注意到  $\alpha \operatorname{Re} \int_{\Omega} (\lambda_1 \cdot \nabla (|u_{m,r}(t)|^2 u_{m,r}(t))) \bar{u}_{m,r}(t) dx = 0$ ,

$$\beta \operatorname{Re} \int_{\Omega} (\lambda_2 \cdot \nabla u_{m,r}(t)) |u_{m,r}(t)|^2 \bar{u}_{m,r}(t) dx = 0,$$

$$\delta \rho \|u_{m,r}(t)\|^2 \leq \int_{\Omega} |u_{m,r}(t)|^{2\sigma+2} dx + \left( \frac{\delta \rho}{\sigma+1} \right)^{(\sigma+1)/\sigma} \sigma L,$$

$$\|u_{m,r}(t)\|^2 \leq \frac{1}{4} \int_{\Omega} |u_{m,r}(t)|^{2\sigma+2} dx + \left(\frac{4}{\sigma}\right)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{\sigma}{\sigma+1}\right)^{\frac{\sigma+1}{\sigma}} L,$$

则由不等式(11.6)可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_{m,r}(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|u_{m,r}(t)\|^2 + \|\nabla u_{m,r}(t)\|^2 \\ & \leq \left(\frac{8\rho}{\sigma+1}\right)^{\frac{\sigma+1}{\sigma}} \frac{\sigma L}{8} + \left(\frac{4}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \left(\frac{\sigma}{\sigma+1}\right)^{\frac{\sigma+1}{\sigma}} L + \frac{\|f\|^2}{2}. \end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式有

$$\|u_{m,r}(t)\|^2 \leq \left(\frac{8\rho}{\sigma+1}\right)^{\frac{\sigma+1}{\sigma}} \frac{\sigma L}{8} + \left(\frac{4}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \left(\frac{\sigma}{\sigma+1}\right)^{\frac{\sigma+1}{\sigma}} L + \frac{\|f\|^2}{2}.$$

$$\text{令 } C_1 = \sqrt{\left(\frac{8\rho}{\sigma+1}\right)^{\frac{\sigma+1}{\sigma}} \frac{\sigma L}{8} + \left(\frac{4}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \left(\frac{\sigma}{\sigma+1}\right)^{\frac{\sigma+1}{\sigma}} L + \frac{\|f\|^2}{2}}, \text{ 则有}$$

$$\|u_{m,r}(t)\| \leq C_1, \forall t \in [-r, +\infty).$$

引理证毕.

**引理 11.4** 在假设 I 和 II 下, 则存在常数  $C_2 > 0$  使得

$$\|\nabla u_{m,r}(t)\| \leq C_2, \forall t \in [-r, +\infty),$$

其中  $C_2$  仅依赖于  $\alpha, \beta, \nu, \sigma, \lambda_1, \lambda_2, L$  和  $f$ , 但与  $\mu, m, r$  无关.

**证** 设  $\mu_j$  为算子  $\mathcal{A}$  的特征值,  $\phi_j = \mu_j \phi_j, j = 1, 2, 3, \dots$ , 乘以  $\bar{\mu}_j$  (11.4) 第  $j$  个方程, 对  $j$  从 1 到  $m$  求和, 再在两边取实部得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_{m,r}(t)\|^2 \leq \rho \|\nabla u_{m,r}(t)\|^2 - \|\Delta u_{m,r}(t)\|^2 \\ & \quad + \operatorname{Re}(f, \Delta u_{m,r}(t)) + \operatorname{Re}(1 + i\mu) \\ & \quad \int_{\Omega} |u_{m,r}(t)|^{2\sigma} u_{m,r}(t) \Delta \bar{u}_{m,r}(t) dx \\ & \quad - \alpha \operatorname{Re} \int_{\Omega} \lambda_1 \cdot \nabla (|u_{m,r}(t)|^{2\sigma} u_{m,r}(t)) \Delta \bar{u}_{m,r}(t) dx \\ & \quad - \beta \operatorname{Re} \int_{\Omega} (\lambda_2 \cdot \nabla u_{m,r}(t)) |u_{m,r}(t)|^2 \Delta \bar{u}_{m,r}(t) dx. \quad (11.7) \end{aligned}$$

由文献[5]中引理 2.3 的证明, 对  $\varepsilon \in (0, 1]$ , 存在常数  $D_1(\varepsilon)$  和  $D_2(\varepsilon)$  使得

$$\begin{aligned}
& \left| -\alpha \operatorname{Re} \int_{\Omega} \lambda_1 \cdot \nabla (|u_{m,r}(t)|^2 u_{m,r}(t)) \Delta \bar{u}_{m,r}(t) dx \right| \\
& \leq \frac{\varepsilon}{4} \|\Delta u_{m,r}(t)\|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla u_{m,r}(t)\|^4 \\
& \quad + \frac{\varepsilon}{2} \|u_{m,r}(t)\|_{\frac{4\sigma+2}{4\sigma+2}}^{4\sigma+2} + D_1(\varepsilon) |\alpha \lambda_1| \frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7},
\end{aligned}$$

$0 < \varepsilon \leq 1$  和

$$\begin{aligned}
& \left| -\beta \operatorname{Re} \int_{\Omega} (\lambda_2 \cdot \nabla u_{m,r}(t)) |u_{m,r}(t)|^2 \Delta \bar{u}_{m,r}(t) dx \right| \\
& \leq \frac{\varepsilon}{4} \|\Delta u_{m,r}(t)\|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla u_{m,r}(t)\|^4 \\
& \quad + \frac{\varepsilon}{2} \|u_{m,r}(t)\|_{\frac{4\sigma+1}{4\sigma+2}}^{4\sigma+1} + D_2(\varepsilon) |\beta \lambda_2| \frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7},
\end{aligned}$$

$$0 < \varepsilon \leq 1,$$

其中  $D_1(\varepsilon)$  和  $D_2(\varepsilon)$  仅依赖于  $\sigma$  和  $L$ , 且  $\sigma > \frac{7}{3}$ . 我们有

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re}(1+i\mu) \int_{\Omega} |u_{m,r}(t)|^{2\sigma} u_{m,r}(t) \Delta \bar{u}_{m,r}(t) dx \\
& = -\frac{1}{4} \int_{\Omega} |u_{m,r}(t)|^{2\sigma-2} [(1+2\sigma) |\nabla |u_{m,r}(t)||^2 - 2\mu\sigma \\
& \quad \cdot \nabla |u_{m,r}(t)|^2 \cdot i(\bar{u}_{m,r} \nabla u_{m,r}(t) - u_{m,r}(t) \nabla \bar{u}_{m,r}(t)) \\
& \quad + |u_{m,r}(t) \nabla \bar{u}_{m,r} - \bar{u}_{m,r} \nabla u_{m,r}(t)|^2] dx.
\end{aligned}$$

注意到

$$\rho \|\nabla u_{m,r}(t)\|^2 \leq \frac{\varepsilon}{4} \|\nabla u_{m,r}(t)\|^4 + \frac{\rho^2}{\varepsilon},$$

$$\|\operatorname{Re}(f, \Delta u_{m,r}(t))\| \leq \frac{\varepsilon}{4} \|\Delta u_{m,r}(t)\|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|f\|^2,$$

则由不等式(11.7)有

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_{m,r}(t)\|^2 + \|\Delta u_{m,r}(t)\|^2 \leq \varepsilon \|\Delta u_{m,r}(t)\|^2 \\
& \quad + 2\varepsilon \|\nabla u_{m,r}(t)\|^4 + \varepsilon \|u_{m,r}(t)\|_{\frac{4\sigma+2}{4\sigma+2}}^{4\sigma+2} + (D_1(\varepsilon) \\
& \quad + D_2(\varepsilon)) \cdot (|\alpha \lambda_1| + |\beta \lambda_2|) \frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7} + \frac{1}{\varepsilon} \|f\|^2 + \frac{\rho^2}{\varepsilon} \\
& \quad - \frac{1}{4} \int_{\Omega} |u_{m,r}(t)|^{2\sigma-2} [(1+2\sigma) |\nabla |u_{m,r}(t)||^2 - 2\mu\sigma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2\mu\sigma \nabla |u_{m,r}(t)|^2 \cdot i(\bar{u}_{m,r}(t) \nabla u_{m,r}(t)) \\
& - u_{m,r}(t) \nabla u_{m,r}(t) + |\bar{u}_{m,r}(t)|^2 \nabla u_{m,r}(t) \\
& - u_{m,r}(t) \nabla \bar{u}_{m,r}(t)|^2] dx. \tag{11.8}
\end{aligned}$$

另一方面乘(11.4)第  $j$  个方程以  $(\sum_{j=1}^m |\alpha_{m,r,j}(t)|^2)^\sigma$ .  
 $\bar{\alpha}_{m,r,j}(t)$ , 对  $j$  求和从 1 到  $m$  可得

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} u'_{m,r}(t) |u_{m,r}(t)|^{2\sigma} \bar{u}_{m,r}(t) dx \\
& = \rho \int_{\Omega} |u_{m,r}(t)|^{2\sigma+2} dx + (1+i\nu) \int_{\Omega} \Delta u_{m,r}(t) \\
& \quad \cdot |u_{m,r}(t)|^{2\sigma} \bar{u}_{m,r}(t) dx - (1+i\mu) \int_{\Omega} |u_{m,r}(t)|^{4\sigma+2} dx \\
& \quad + \int_{\Omega} f \cdot |u_{m,r}(t)|^{2\sigma} \bar{u}_{m,r}(t) dx \\
& \quad + \alpha \int_{\Omega} (\lambda_1 \cdot \nabla (|u_{m,r}(t)|^2 u_{m,r}(t))) |u_{m,r}(t)|^{2\sigma} u_{m,r}(t) dx \\
& \quad + \beta \int_{\Omega} (\lambda_2 \cdot \nabla u_{m,r}(t)) |u_{m,r}(t)|^{2\sigma+2} \bar{u}_{m,r}(t) dx. \tag{11.9}
\end{aligned}$$

对(11.9)两边取实部可得

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2(1+\sigma)} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_{m,r}(t)|^{2\sigma+2} dx \\
& = \rho \int_{\Omega} |u_{m,r}(t)|^{2\sigma+2} dx - \int_{\Omega} |\nabla u_{m,r}(t)|^2 |u_{m,r}(t)|^{2\sigma} dx \\
& \quad - \int_{\Omega} |u_{m,r}(t)|^{4\sigma+2} dx \\
& \quad - \frac{1}{2} \sigma \int_{\Omega} |u_{m,r}(t)|^{2\sigma-2} |\nabla |u_{m,r}(t)||^2 \\
& \quad + \operatorname{Re} \int_{\Omega} f \cdot |u_{m,r}(t)|^{2\sigma} u_{m,r}(t) dx \\
& \quad + \frac{1}{2} \nu \sigma \int_{\Omega} |u_{m,r}(t)|^{2\sigma-2} \nabla |u_{m,r}(t)|^2 \\
& \quad \cdot i(u_{m,r}(t) \nabla \bar{u}_m - \bar{u}_m \Delta u_{m,r}(t)) \\
& \quad + \operatorname{Re} \alpha \int_{\Omega} (\lambda_1 \cdot \nabla (|u_{m,r}(t)|^2 u_{m,r}(t))) |u_{m,r}(t)|^{2\sigma} \bar{u}_{m,r}(t) dx
\end{aligned}$$

$$+ \operatorname{Re} \beta \int_{\Omega} (\lambda_2 \cdot \nabla u_{m,r}(t)) |u_{m,r}(t)|^{2\sigma+2} \bar{u}_{m,r}(t) dx. \quad (11.10)$$

采用文献[5]中引理 2.2 的证明, 则对  $r \in (0, 1]$ , 存在常数  $D_{31}$ ,  $D_{32}(r)$ ,  $D_{33}(r)$ ,  $D_{41}$ ,  $D_{42}(r)$  和  $D_{43}(r)$  使得

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \alpha \int_{\Omega} (\lambda_1 \cdot \nabla (|u_{m,r}(t)|^2 u_{m,r}(t))) |u_{m,r}(t)|^{2\sigma} \bar{u}_{m,r}(t) dx \\ & \leq \gamma D_{31} \|\Delta u_{m,r}(t)\|^2 + 8\gamma \|\nabla u_{m,r}(t)\|^4 + \frac{1}{6} \\ & \quad \int_{\Omega} |u_{m,r}(t)|^{4\sigma+2} dx + D_{32}(r) + D_{33}(r) |\alpha \lambda_1| \frac{8(1+2\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2 - 11\sigma - 7}, \\ & \operatorname{Re} \alpha \int_{\Omega} (\lambda_1 \cdot \nabla (|u_{m,r}(t)|^2 u_{m,r}(t))) |u_{m,r}(t)|^{2\sigma} \bar{u}_{m,r}(t) dx \\ & \leq \gamma D_{41} \|\Delta u_{m,r}(t)\|^2 + 8\gamma \|\Delta u_{m,r}(t)\|^4 \\ & \quad + \frac{1}{6} \int_{\Omega} |u_{m,r}(t)|^{4\sigma+2} dx \\ & \quad + D_{42}(r) + D_{43}(r) |\beta \lambda_2| \frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2 - 11\sigma - 7}, \end{aligned}$$

其中  $D_{31}$ ,  $D_{32}(r)$ ,  $D_{33}(r)$ ,  $D_{41}$ ,  $D_{42}(r)$  和  $D_{43}(r)$  依赖于  $\sigma$  和  $L$ . 注意到

$$\begin{aligned} & |\operatorname{Re} \int_{\Omega} f \cdot |u_{m,r}(t)|^{2\sigma} \bar{u}_{m,r}(t) dx| \\ & \leq \frac{1}{6} \int_{\Omega} |u_{m,r}(t)|^{4\sigma+2} dx + \frac{3}{2} \|f\|^2, \end{aligned}$$

因此, 对  $\varepsilon \in (0, 1]$ , 选取适当的  $r$ , 则存在常数  $D_{51}$  和  $D_{52}(r)$  使得由不等式(11.10)可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2(1+\sigma)} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_{m,r}(t)|^{2\sigma+2} dx \\ & \leq -\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_{m,r}(t)|^{4\sigma+2} dx \\ & \quad + \varepsilon \|\Delta u_{m,r}(t)\|^2 + \varepsilon \|\nabla u_{m,r}(t)\|^4 + D_{51}(1+\mu^2) \\ & \quad + D_{52}(r) (|\alpha \lambda_1| + |\beta \lambda_2|) \frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2 - 11\sigma - 7} \\ & \quad - \frac{1}{4} \int_{\Omega} |u_{m,r}(t)|^{2\sigma+2} ((1+2\sigma) |\nabla |u_{m,r}(t)||^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2\nu\sigma \nabla |u_{m,r}(t)|^2 \cdot i(u_m(t) \nabla \bar{u}_{m,r}(t) \\
& - \bar{u}_{m,r}(t) \nabla u_{m,r}(t)) \\
& + |u_{m,r}(t) \nabla \bar{u}_{m,r}(t) - \bar{u}_{m,r}(t) \nabla u_{m,r}(t)|^2 dx, \quad (11.11)
\end{aligned}$$

其中  $D_{51}, D_{52}(r)$  仅依赖于  $f, \sigma$  和  $L$ , 且  $\sigma > \frac{7}{3}$ , 由假设 II 和文献 [5] 中的证明, 适当选取  $\varepsilon$ , 则存在常数  $D_{61}, D_{62}$ , 使得

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} (\|\nabla u_{m,r}(t)\|^2 + \frac{\delta^2}{1+\sigma} \int_{\Omega} |u_{m,r}(t)|^{2\sigma+2} dx) \\
& + (\|\nabla u_{m,r}(t)\|^2 + \frac{\delta^2}{1+\sigma} \int_{\Omega} |u_{m,r}(t)|^{2\sigma+2} dx) \\
& \leq D_{61} + D_{62} (|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}},
\end{aligned}$$

其中  $D_{61}, D_{62}$  仅依赖于  $f, \sigma$  和  $L$ . 令

$$C_2 = \sqrt{D_{61} + D_{62} (|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)^{\frac{8(1+\sigma)(1+2\sigma)}{6\sigma^2-11\sigma-7}}},$$

则由 Gronwall 不等式可得

$$\|\nabla u_{m,r}(t)\| \leq C_2, \quad \forall t \in [-r, +\infty).$$

引理 11.4 得证.

**引理 11.5** 在假设 I 和 II 下, 存在常数  $C_3 > 0$  使得

$$\|\Delta u_{m,r}(t)\| \leq C_3, \quad \forall t \in [-r, +\infty),$$

其中  $C_3$  仅依赖于  $\alpha, \beta, \mu, \rho, \nu, \sigma, \lambda_1, \lambda_2, L$  和  $f$ , 与  $m, r$  无关.

**证** 乘 (11.4) 第  $j$  个方程以  $\bar{\mu}_j^2$ , 对  $j$  求和从 1 到  $m$ , 再取实部得

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta u_{m,r}(t)\|^2 = \rho \|\Delta u_{m,r}(t)\|^2 - \|\nabla \Delta u_{m,r}(t)\|^2 \\
& + \operatorname{Re}(f, \Delta^2 u_{m,r}(t)) - \operatorname{Re}(1 + i\mu) \int_{\Omega} |u_{m,r}(t)|^{2\sigma} u_{m,r}(t) \\
& \Delta^2 \bar{u}_{m,r}(t) dx + \alpha \operatorname{Re} \int_{\Omega} (\lambda_1 \cdot \nabla (|u_m(t)|^2 u_{m,r}(t))) \Delta^2 \bar{u}_{m,r}(t) dx \\
& + \beta \operatorname{Re} \int_{\Omega} (\lambda_2 \cdot \nabla u_{m,r}(t)) |u_{m,r}(t)|^2 \Delta^2 \bar{u}_{m,r}(t) dx.
\end{aligned} \quad (11.12)$$

由于

$$\begin{aligned}
& | - \operatorname{Re}(1 + i\mu) \int_{\Omega} |u_{m,r}(t)|^2 u_{m,r}(t) \Delta^2 \bar{u}_{m,r}(t) dx | \\
& \leq \sqrt{1 + \mu^2} \int_{\Omega} | \nabla (|u_{m,r}(t)|^{2\sigma} u_{m,r}(t)) | | \nabla \Delta \bar{u}_{m,r}(t) | dx \\
& \leq \epsilon \| \nabla \Delta u_{m,r}(t) \|^2 + \epsilon \| \nabla u_{m,r}(t) \|^4 + \left(\frac{\epsilon}{4}\right)^3 (2\sigma + 1)^4 \\
& \quad \cdot (1 + \mu^2)^2 \| u_{m,r}(t) \|_{8\sigma}^{8\sigma} \\
& \leq \epsilon \| \nabla \Delta u_{m,r}(t) \|^2 + \epsilon \| \nabla u_{m,r}(t) \|^4 + D_{71}(\epsilon) \\
& \quad \cdot (1 + \mu^2)^2, \tag{11.13}
\end{aligned}$$

其中

$$D_{71}(\epsilon) = \left(\frac{\epsilon}{4}\right)^3 (2\sigma + 1)^4 (k'(8\sigma))^{8\sigma} C_2.$$

我们有

$$\begin{aligned}
& | \alpha \operatorname{Re} \int_{\Omega} (\lambda_1 \cdot \nabla (|u_{m,r}(t)|^2)) \Delta^2 \bar{u}_{m,r}(t) dx | \\
& \leq 4 | \alpha \lambda_1 | \int_{\Omega} [ |u_{m,r}(t)| | \nabla u_{m,r}(t) |^2 \cdot | \nabla \Delta \bar{u}_{m,r}(t) | \\
& \quad + |u_{m,r}(t)|^2 | D^2 u_{m,r}(t) | | \nabla \Delta \bar{u}_{m,r}(t) | ] dx. \tag{11.14}
\end{aligned}$$

因

$$\begin{aligned}
& 4 | \alpha \lambda_1 | \int_{\Omega} |u_{m,r}(t)| \cdot | \nabla u_{m,r}(t) |^2 \cdot | \nabla \Delta \bar{u}_{m,r}(t) | dx \\
& \leq 4 | \alpha \lambda_1 | \| \nabla \Delta u_{m,r}(t) \| \| \nabla u_{m,r}(t) \|^2 \| u_{m,r}(t) \|_{\infty} \\
& \leq 4 | \alpha \lambda_1 | \| \nabla \Delta u_{m,r}(t) \| \\
& \quad \cdot K'_3 \| \nabla u_{m,r}(t) \|_{H^1} \| \nabla u_{m,r}(t) \| \\
& \quad \cdot K_1 \| u_{m,r}(t) \|_{\frac{1}{2}} \| u_{m,r}(t) \|_{\frac{1}{2}} \\
& \quad \quad \quad H^2 \\
& \leq 4 | \alpha \lambda_1 | K_1 K_2 C_1^{\frac{1}{2}} C_2 \| \nabla \Delta u_{m,r}(t) \| \| u_{m,r}(t) \|_{\frac{3}{H^2}} \\
& \leq \frac{\epsilon}{2} \| \nabla \Delta u_{m,r}(t) \|^2 \\
& \quad + \frac{1}{2} (| \alpha \lambda_1 | K_1 K_3 C_1^{\frac{1}{2}} C_2)^2 \| u_{m,r}(t) \|_{H^2}^2 \\
& \leq \frac{\epsilon}{2} \| \nabla \Delta u_{m,r}(t) \|^2 + \frac{\epsilon}{2} \| u_{m,r}(t) \|_{H^2}^4 + D_{72}(\epsilon) | \alpha \lambda_1 |^4,
\end{aligned}$$

其中  $D_{72}(\epsilon) = (\frac{1}{2\epsilon})^3 (K_1 K_3 C_1^{\frac{1}{2}} C_2)^4$ , 再有

$$\begin{aligned}
 & 4|\alpha\lambda_1| \int_{\Omega} |u_{m,r}(t)|^2 |D^2 u_{m,r}(t)| |\nabla \Delta \bar{u}_{m,r}(t)| dx \\
 & \leq 4|\alpha\lambda_1| \|D^2 u_{m,r}(t)\|_4 \|\nabla \Delta u_{m,r}(t)\| \\
 & \quad \cdot \|u_{m,r}(t)\|_{\frac{8}{3}}^2 \\
 & \leq 4|\alpha\lambda_1| \cdot K_3 \|D^2 u_{m,r}(t)\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \|D^2 u_{m,r}(t)\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \\
 & \quad \cdot \|\nabla \Delta u_{m,r}(t)\| \cdot K(\theta, q) \|u_{m,r}(t)\|_{H^2}^{\theta} \|u_{m,r}(t)\|_q^{1-\theta} \\
 & \leq 4|\alpha\lambda_1| K_3 K(\theta, q) \\
 & \quad \cdot \|D^2 u_{m,r}(t)\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \|u_{m,r}(t)\|_{H^2}^{\theta + \frac{1}{2}} \|u_{m,r}(t)\|_q^{1-\theta} \\
 & \leq \frac{\epsilon}{2} \|D^2 u_{m,r}(t)\|_{H^1}^2 + \frac{3}{2\epsilon} \left[ \frac{2|\alpha\lambda_1| K_3 K(\theta, q)}{\epsilon} \right]^{\frac{4}{3}} \\
 & \quad \cdot \|u_{m,r}(t)\|_{H^2}^{\frac{4}{3}\theta + \frac{2}{3}} \|u_{m,r}(t)\|_q^{\frac{4}{3} - \frac{4}{3}\theta} \\
 & \leq \frac{\epsilon}{2} \|D^2 u_{m,r}(t)\|_{H^1}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|u_{m,r}(t)\|_{H^2}^4 \\
 & \quad + \left( \frac{2\theta+1}{3\epsilon} \right)^{\frac{2\theta+1}{5-2\theta}} \left( \frac{5-2\theta}{6} \right) \left\{ \frac{3}{2\epsilon} \left[ \frac{\alpha|\alpha\lambda_1| K_3 K(\theta, q)}{\epsilon} \right]^{\frac{4}{3}} \right\}^{\frac{6}{5-2\theta}} \\
 & \quad \cdot \|u_{m,r}(t)\|_q^{\frac{8-8\theta}{5-2\theta}} \\
 & \leq \frac{\epsilon}{2} \|D^2 u_{m,r}(t)\|_{H^1}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|u_{m,r}(t)\|_{H^2}^4 \\
 & \quad + D_{73}(\epsilon) \cdot |\alpha\lambda_1|^{\frac{8}{5-2\theta}},
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 D_{73}(\epsilon) &= \left( \frac{2\theta+1}{3\epsilon} \right)^{\frac{2\theta+1}{5-2\theta}} \cdot \frac{5-2\theta}{6} \left\{ \frac{3}{2\epsilon} \left[ \frac{2K_3 K(\theta, q)}{\epsilon} \right]^{\frac{4}{3}} \right\}^{\frac{6}{5-2\theta}} \\
 &\quad \cdot |K'(q) C_2|^{\frac{8-8\theta}{5-2\theta}}, 1 < q < \infty, \theta = \frac{8-q}{4q+8},
 \end{aligned}$$

因此对  $\epsilon \in (0, 1]$ , 由不等式(11.14)有

$$|\alpha \operatorname{Re} \int_{\Omega} (\lambda_1 \cdot \nabla (|u_{m,r}(t)|^2)) \Delta^2 \bar{u}_{m,r}(t) dx|$$



$$\begin{aligned} &\leq \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla \Delta u_{m,r}(t)\|^2 + \varepsilon \|u_{m,r}(t)\|_{H^2}^4 \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2} \|D^2 u_{m,r}(t)\|_{H^1}^2 + D_{72}(\varepsilon) |\alpha \lambda_1|^4 \\ &\quad + D_{73}(\varepsilon) |\alpha \lambda_1|^{\frac{8}{5-2\theta}}. \end{aligned} \quad (11.15)$$

类似地有,对  $\varepsilon \in (0, 1]$ , 存在正常数  $D_{74}(\varepsilon)$  和  $D_{75}(\varepsilon)$  使得

$$\begin{aligned} &|\beta \operatorname{Re} \int_{\Omega} (\lambda_2 \cdot \nabla u_{m,r}(t)) |u_{m,r}(t)|^2 \Delta^2 \bar{u}_{m,r}(t) dx| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla \Delta u_{m,r}(t)\|^2 + \varepsilon \|u_{m,r}(t)\|_{H^2}^4 + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\quad \|D^2 u_{m,r}(t)\|_{H^1}^2 + D_{74}(\varepsilon) |\beta \lambda_2|^4 + D_{75}(\varepsilon) |\beta \lambda_2|^{\frac{8}{5-2\theta}}. \end{aligned} \quad (11.16)$$

利用不等式 (iv) 和如下不等式 (11.17) — (11.19)

$$\|u_{m,r}(t)\|_{H^2}^4 \leq 2K_2^4 (\|u_{m,r}(t)\|^4 + \|\Delta u_{m,r}(t)\|^4), \quad (11.17)$$

$$\|\Delta u_{m,r}(t)\|^2 \leq \varepsilon \|\nabla \Delta u_{m,r}(t)\|^2 + \frac{\varepsilon}{4} \|\nabla u_{m,r}(t)\|^2, \quad (11.18)$$

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re}(f, \Delta^2 u_{m,r}(t))| &\leq \varepsilon \|\nabla \Delta u_{m,r}(t)\|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla f\|^2 \\ &\leq \varepsilon \|\nabla \Delta u_{m,r}(t)\|^2 + \frac{\varepsilon}{2} M^2. \end{aligned} \quad (11.19)$$

选取  $\varepsilon$  充分小, 由不等式 (11.12) 可知, 存在常数  $D_{81}$ ,  $D_{82}$  和  $D_{83}$  使得

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \|\Delta u_{m,r}(t)\|^2 + \|\Delta u_{m,r}(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla \Delta u_{m,r}(t)\|^2 \\ &\leq D_{81}(1 + \mu^2)^2 + D_{82}(|\alpha \lambda_1| + |\beta \lambda_2|)^4 \\ &\quad + D_{83}(|\alpha \lambda_1| + |\beta \lambda_2|)^{\frac{8}{5-2\theta}}, \end{aligned}$$

其中  $\theta$  的选取为同引理 11.4, 令

$$C_3 = \sqrt{D_{81}(1 + \mu^2)^2 + D_{82}(|\alpha \lambda_1| + |\beta \lambda_2|)^4 + D_{83}(|\alpha \lambda_1| + |\beta \lambda_2|)^{\frac{8}{5-2\theta}}},$$

由 Gronwall 不等式, 得

$$\|\Delta u_{m,r}(t)\| \leq C_3, \forall t \in [-r, +\infty).$$

引理 11.5 证毕.

**附注 11.6** 由引理 11.3—11.5 有

$$\|u_{m,r}(t)\|_{\infty} \leq K_1 C_1^{1/2} [K_2(C_1 + C_2)]^{1/2}.$$

为方便计,令

$$C^* = K_1 C_1^{1/2} \cdot (K_2 \sqrt{C_1^2 + C_2^2})^{1/2}.$$

**引理 11.7** 在假设 I, II 下,则存在常数  $C_4 > 0$  使得

$$\|u'_{m,r}(t)\| \leq C_4, \forall t \in [-r, +\infty),$$

其中  $C_4$  依赖于  $\alpha, \beta, \mu, \nu, \sigma, \lambda_1, \lambda_2, L$  和  $f$ , 但与  $m, r$  无关.

**证** 类似于文献[10]中的证明,略.

**定理 11.8** 在假设 I, II 下,问题(11.1),(11.2)具有强解  $u(t)$ ,它满足

$$\|u(t)\| \leq C_1, \|\partial_x u(t)\| \leq C_2, \|u'(t)\| \leq C_3, \quad (11.20)$$

这里常数  $C_1, C_2, C_3$  分别由引理 11.3—11.6 所给定.

**证** 由引理 11.3—11.6 和标准的紧性原理,可知能选取  $\{u_{m,r}\}$  的子序列,仍记为  $\{u_{m,r}\}$  使得

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} u_{m,r}(t) = u_m(t), \text{ 在 } L^\infty(\mathbb{R}^1; H^1_{\text{per}}) \text{ 中弱}^* \text{ 收敛,}$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} u_{m,r}(t) = u_m(t), \text{ 在 } L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^1; L^2_{\text{per}}) \text{ 中强收敛,}$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} u'_{m,r}(t) = u'_m(t), \text{ 在 } L^\infty(\mathbb{R}^1; L^2_{\text{per}}) \text{ 中弱}^* \text{ 收敛,}$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \mathcal{A}u_{m,r}(t) = \mathcal{A}u_m \text{ 在 } L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^1; L^2_{\text{per}}) \text{ 中弱收敛,}$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} u_{m,r}(x, \rho) = u_m(x, t) \text{ 在 } \Omega \times \mathbb{R}^1 \text{ 中几乎处处收敛,}$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} |u_{m,r}(t)|^2 u_{m,r}(t) = |u_m(t)|^2 u_m(t), \text{ 在 } L^2(\mathbb{R}^1; L^2_{\text{per}})$$

中弱收敛,

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} |u_{m,r}(t)|^4 u_{m,r}(t) = |u_m(t)|^4 u_m(t) \text{ 在 } L^2(\mathbb{R}^1; L^2_{\text{per}})$$

中弱收敛且  $u_m(t)$  满足如下方程:

$$\begin{aligned} (u'_m(t), \phi_j) + (\mathcal{A}u_m(t), \phi_j) &= (Nu_m(t), \phi_j) + (f(t), \phi_j), \\ j &= 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (11.21)$$

其中  $u_m(t) = \sum_{j=1}^m \alpha_{mj}(t) \phi_j$ ,  $\alpha_{mj}(t) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \alpha_{m,r,j}(t)$  且不等式 (11.20) 对  $u_m(t)$  成立.

再选取  $\{u_m\}$  的子序列仍记为  $\{u_m\}$ , 使得

$\lim_{m \rightarrow +\infty} u_m(t) = u(t)$  依  $L^\infty(\mathbb{R}^1; H_{\text{per}}^1)$  弱\*收敛,

$\lim_{m \rightarrow +\infty} u_m(t) = u(t)$  依  $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^1; L_{\text{per}}^2)$  强收敛,

$\lim_{m \rightarrow +\infty} u'_m(t) = u'(t)$  依  $L^\infty(\mathbb{R}^1; L_{\text{per}}^2)$  弱\*收敛,

$\lim_{m \rightarrow +\infty} \mathcal{A}u_m(t) = \mathcal{A}u(t)$  依  $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^1; L_{\text{per}}^2)$  弱收敛,

$\lim_{m \rightarrow +\infty} u_m(x, t) = u(x, t)$  在  $\Omega \times \mathbb{R}$  上几乎处处收敛,

$\lim_{m \rightarrow +\infty} |u_m(t)|^2 u_m(t) = |u(t)|^2 u(t)$  依  $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^1; L_{\text{per}}^2)$  弱收敛,

$\lim_{m \rightarrow +\infty} |u_m(t)|^4 u_m(t) = |u(t)|^4 u(t)$  依  $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^1; L_{\text{per}}^2)$  弱收敛.

此外,  $u(t)$  满足 (11.21),  $j = 1, 2, 3, \dots$ , 因而

$$u'(x, t) + \mathcal{A}u(x, t) = Nu(x, t) + f(x, t) \quad (11.22)$$

在  $\mathbb{R}^1 \times \Omega$  上几乎处处成立, 且不等式 (11.20) 对  $u(t)$  成立,

因此  $u(t)$  为问题 (11.1), (11.2) 所要求的强解, 定理 11.8 证毕.

现证明殆周期解的存在性, 我们要证明由定理 11.8 所构造的有界解  $u(t)$  为问题 (11.1), (11.2) 的殆周期解.

**定理 11.9** 在假设 I, II 下, 如参数  $\alpha, \beta, \rho, \mu$ , 满足如下不等式

$$K_4^2(\rho + 4|\mu|^{\sigma} C^{*2\sigma} C_4 + (3|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)(2C^* C_2 K_3^2 + \frac{C^2}{2})) + (C_3|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)(C^* C_2 K_3^2 + \frac{C^{*2}}{2}) \leq 1, \quad (\Delta)$$

则问题 (11.1), (11.2) 具有  $L^2$  殆周期解.

**证** 我们要证明由定理 11.8 所得到的有界解  $u(t)$  为  $L^2$  殆周期的, 为此, 证明  $u_m(t)$  为殆周期的, 对  $m = 1, 2, 3, \dots$ .

事实上, 因  $f$  为殆周期的, 则对  $\varepsilon > 0$ , 存在相对稠密集  $E(\varepsilon, f)$ ,

使得

$$\|f(t+\tau) - f(t)\| \leq \varepsilon, \forall \tau \in E(\varepsilon, f).$$

由(11.21), 对任何  $\tau \in E(\varepsilon, f)$ , 我们有

$$\begin{aligned} & (u'_m(t+\tau), \phi_j) + (Au_m(t+\tau), \phi_j) \\ &= (Nu_m(t+\tau), \phi_j) + (f(t+\tau), \phi_j), \\ & (u'_m(t), \phi_j) + (Au_m(t), \phi_j) = (Nu_m(t), \phi_j) + (f(t), \phi_j), \\ & j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} & ((u'_m(t+\tau) - u'_m(t)), \phi_j) + (A(u_m(t+\tau) - u_m(t)), \phi_j) \\ &= (Nu_m(t+\tau) - Nu_m(t), \phi_j) + (f(t+\tau) - f(t), \phi_j), \end{aligned} \quad (11.23)$$

乘(11.23)第  $j$  个方程以  $\alpha_{m,j}(t+\tau) - \alpha_{m,j}(t)$ , 对  $j$  从 1 到  $m$  求和, 两边取实部, 得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m(t+\tau) - u_m(t)\|^2 \leq - \|\nabla [u_m(t+\tau) \\ & - u_m(t)]\|^2 + \rho \|u_m(t+\tau) - u_m(t)\|^2 \\ & - \operatorname{Re}(1+i\mu) \int_{\Omega} (|u_m(t+\tau)|^{2\sigma} u_m(t+\tau) \\ & - |u_m(t)|^{2\sigma} u_m(t)) \cdot (\bar{u}_m(t+\tau) - \bar{u}_m(t)) dx \\ & + \operatorname{Re} \int_{\Omega} (\alpha \lambda_1 \cdot \nabla (|u_m(t+\tau)| u_m(t+\tau) \\ & - \alpha \lambda_1 \cdot \nabla (|u_m(t)|^2 u_m(t))) \cdot (\bar{u}_m(t+\tau) - \bar{u}_m(t)) dx \\ & + \operatorname{Re} \int_{\Omega} [\beta (\lambda_2 \cdot \nabla u_m(t+\tau)) |u_m(t+\tau)|^2 \\ & - \beta (\lambda_2 \cdot \nabla u_m(t)) |u_m(t)|^2 \cdot (\bar{u}_m(t+\tau) - \bar{u}_m(t))] dx \\ & + \operatorname{Re}(f, u_m(t+\tau) - u_m(t)). \end{aligned} \quad (11.24)$$

因

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}(1+i\mu) (|u_m(t+\tau)|^{2\sigma} u_m(t+\tau) - |u_m(t)|^{2\sigma} u_m(t)) \\ & \cdot (\bar{u}_m(t+\tau) - \bar{u}_m(t)) = |u_m(t+\tau)|^{2\sigma+2} + |u_m(t)|^{2\sigma+2} \\ & - |u_m(t+\tau)|^{2\sigma} \cdot \frac{u_m(t) \bar{u}_m(t+\tau) + u_m(t+\tau) \bar{u}_m(t)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - |u_m(t)|^{2\sigma} \cdot \frac{u_m(t)\bar{u}_m(t+\tau) - u_m(t+\tau)\bar{u}_m(t)}{2i} \\
& + \mu [ |u_m(t+\tau)|^{2\sigma} - |u_m(t)|^{2\sigma} ] \\
& \cdot \frac{u_m(t)\bar{u}_m(t+\tau) - u_m(t+\tau)\bar{u}_m(t)}{2i} \\
& = I_1 + \mu I_2. \tag{11.25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{其中 } I_1 &= |u_m(t+\tau)|^{2\sigma+2} + |u_m(t)|^{2\sigma+2} \\
& - |u_m(t+\tau)|^{2\sigma} \frac{u_m(t)\bar{u}_m(t+\tau) + u_m(t+\tau)\bar{u}_m(t)}{2} \\
& - |u_m(t)|^{2\sigma} \frac{u_m(t)\bar{u}_m(t+\tau) - u_m(t+\tau)\bar{u}_m(t)}{2i} \\
& \geq |u_m(t+\tau)|^{2\sigma+2} + |u_m(t)|^{2\sigma+2} - |u_m(t+\tau)|^{2\sigma+1} \\
& \quad \cdot |u_m(t)| - |u_m(t)|^{2\sigma+1} |u_m(t+\tau)| \geq 0, \\
| \mu I_2 | & \leq 2|\mu| |u_m(t)| [\sigma |u_m(t+\tau)|^\sigma |u_m(t+\theta, \tau)|^{\sigma-1} \\
& |u'_m(t+\theta_1\tau)| + \sigma |u_m(t)|^{\sigma-1} |u'_m(t+\theta_2\tau)|^{\sigma-1} \\
& |u'_m(t+\theta_2\tau)|] |u_m(t+\tau) - u_m(t)|^2 \\
& \leq 4|\mu| \sigma C^{*2\sigma} C_4^2 |u_m(t+\tau) - u_m(t)|^2. \tag{11.26}
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
& -\operatorname{Re}(1+i\mu)(|u_m(t+\tau)|^{2\sigma} u_m(t+\tau) - |u_m(t)|^{2\sigma} u_m(t)) \\
& \cdot (\bar{u}_m(t+\tau) - \bar{u}_m(t)) \leq 4|\mu| \sigma C^{*2\sigma} C_4^2 |u_m(t+\tau) - u_m(t)|^2. \tag{11.27}
\end{aligned}$$

另外

$$\begin{aligned}
& |\operatorname{Re} \int_{\Omega} (\alpha \lambda_1 \cdot \nabla (|u_m(t+\tau)|^2 u_m(t+\tau)) \\
& - \alpha \lambda_1 \cdot \nabla (|u_m(t)|^2 u_m(t))) \cdot (\bar{u}_m(t+\tau) - \bar{u}_m(t)) dx| \\
& \leq |\alpha \lambda_1| \int_{\Omega} [2|u_m(t+\tau)| |\nabla u_m(t+\tau)| \cdot |u_m(t+\tau) \\
& - u_m(t)|^2 + |u_m(t+\tau)|^2 |\nabla (u_m(t+\tau) - u_m(t))| \\
& \cdot |u_m(t+\tau) - u_m(t)| + (|u_m(t+\tau)| + |u_m(t)|) \\
& |\nabla u_m(t)| \cdot |u_m(t+\tau) - u_m(t)|^2 + (|\nabla u_m(t+\tau)| \\
& + |\nabla u_m(t)|) |u_m(t)| \cdot |u_m(t+\tau) - u_m(t)|^2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (|u_m(t+\tau)| + |u_m(t)|) |u_m(t)| \cdot \|\nabla u_m(t+\tau) \\
& - u_m(t)\| |u_m(t+\tau) - u_m(t)| \cdot \\
& \leq |\alpha\lambda_1| [6C^*C_2 \|u_m(t+\tau) - u_m(t)\|_4^2 \\
& + \frac{3}{2} C^{*2} \|\nabla(u_m(t+\tau) - u_m(t))\|^2 \\
& + \frac{3}{2} C^{*2} \|u_m(t+\tau) - u_m(t)\|^2] \\
& \leq 3|\alpha\lambda_1| \cdot [(2C^*C_2K_2^2 + \frac{1}{2}C^{*2}) \|u_m(t+\tau) - u_m(t)\|^2 \\
& + (C^*C_2K_3^2 + \frac{1}{2}C^{*2}) \|\nabla(u_m(t+\tau) - u_m(t))\|^2].
\end{aligned}
\tag{11.28}$$

类似地有

$$\begin{aligned}
& |\operatorname{Re} \int_{\Omega} (\beta(\lambda_2 \cdot \nabla u_m(t+\tau)) |u_m(t+\tau)|^2 - \beta(\lambda_2 \cdot \nabla u_m(t)) \\
& \cdot |u_m(t)|^2) (\bar{u}_m(t+\tau) - \bar{u}_m(t)) dx| \\
& \leq |\beta\lambda_2| \cdot \left[ \left( 2C^*C_2K_3^2 + \frac{C^{*2}}{2} \right) \|u_m(t+\tau) - u_m(t)\|^2 \right. \\
& \left. + \left( C^*C_2K_3^2 + \frac{C^{*2}}{2} \right) \|\nabla(u_m(t+\tau) - u_m(t))\|^2 \right].
\end{aligned}
\tag{11.29}$$

从不等式(11.27)一(11.29)得

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m(t+\tau) - u_m(t)\|^2 \leq - \|\nabla[u_m(t+\tau) - u_m(t)]\|^2 \\
& + \rho \|u_m(t+\tau) - u_m(t)\|^2 + 4|\mu| \sigma C^{*2\sigma} C_4 \|u_m(t+\tau) \\
& - u_m(t)\|^2 + (3|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|) \cdot \left[ \left( 2C^*C_2K_3^2 + \frac{C^{*2}}{2} \right) \right. \\
& \left. \|u_m(t+\tau) - u_m(t)\|^2 + \left( C^*C_2K_3^2 + \frac{C^{*2}}{2} \right) \right. \\
& \left. \|\nabla(u_m(t+\tau) - u_m(t))\|^2 \right] + \|f(t+\tau) - f(t)\| \\
& \|u_m(t+\tau) - u_m(t)\|^2 \\
& \leq -\frac{1}{K_4} \left[ 1 - (3|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|) \left( C^*C_2K_3^2 + \frac{C^{*2}}{2} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \|u_m(t+\tau) - u_m(t)\| \|\nabla(u_m(t+\tau) - u_m(t))\| \\
& + K_4[\rho + 4|\mu|\sigma C^{*2\sigma} C_4 + C_3(|\alpha\lambda_1| \\
& + |\beta\lambda_2|)(2C^* C_2 K_2 + \frac{1}{2} C^{*2})] \\
& \cdot \|u_m(t+\tau) - u_m(t)\| \cdot \|\nabla(u_m(t+\tau) - u_m(t))\| \\
& + K_4 \|f(t+\tau) - f(t)\| \|\nabla(u_m(t+\tau) - u_m(t))\| \\
& \leq \{K_4 \epsilon - [\frac{1}{K_4} (1 - (3|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|) (C^* C_2 K_3^2 + \frac{C^{*2}}{2})) \\
& - K_4 ((\rho + 4|\mu|\sigma C^{*2\sigma} C_4 + (3|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|) \\
& \cdot (2C^* C_2 K_3^2 + \frac{C^{*2}}{2})))]\} \\
& \cdot \|u_m(t+\tau) - u_m(t)\| \cdot \|\nabla(u_m(t+\tau) - u_m(t))\|.
\end{aligned}$$

因此,选取参数  $\alpha, \beta, \rho, \mu$  充分小,使得不等式( $\Delta$ )成立,令

$$\begin{aligned}
J = K_4^2(\rho + 4|\mu|\sigma C^{*2\sigma} C_4 + (3|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)(2C^* C_2 K_3^2 \\
+ \frac{C^{*2}}{2})) + (3|\alpha\lambda_1| + |\beta\lambda_2|)(C^* C_2 K_3^2 + \frac{1}{2} C^{*2}),
\end{aligned}$$

则由  $u_m(-\infty) = 0$  和反证法可得

$$\|u_m(t+\tau) - u_m(t)\| \leq \frac{K_4^2}{1-J} \epsilon, \forall \tau \in E \setminus \{\epsilon, f\}.$$

因此,  $u_m(t)$  为几乎周期函数,这就完成定理 11.9 的证明.

## 参 考 文 献

- [1] C. David, Levermore, M. Oliver, The complex Ginzburg-Landau equation as a model problem, "Dynamical systems and probabilistic methods in partial differential equations", Lectures in Applied Mathematics, Vol. 31, 1984, edited by P. Deift, C. D. Levermore, C. E. Wagne.
- [2] J. Ginibre, G. Velo, The Cauchy problem in local spaces for the complex Ginzburg-Landau equation, I, Compactness methods, Phys. D, 95, 1996, 191—228.
- [3] M. V. Bartucci, J. D. Gibbon, M. Oliver, Length scales in solutions of complex Ginzburg-Landau equation, Phys. D, 89, 1996, 267—286.
- [4] I. Kukavica, Hausdorff length of level sets solutions of the Ginzburg-Landau equation, Nonlinearity, 8, 1995, 113—129.

- [5] Guo Boling, Wang Bixiang, Finite dimensional behavior for the derivative Ginzburg-Landau equation, in two spatial dimensions, *Phys. D.*, 89, 1995, 83—99.
- [6] Guo Boling, Wang Bixiang, Gevreg regularity and approximate inertial manifolds for the derivative Ginzburg-Landau equation, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2 (3), 1996, 455—466.
- [7] Boling Guo, Yongsheng Li, global attractors for the derivative 2d Ginzburg-Landau equation, in an Unbound domain, to appear.
- [8] Boling Guo, Rong Yuan, The time-periodic solution of 2d generalized Ginzburg-Landau equation, to appear in *J. Math. Anal.*
- [9] Jichang Wu, The in viscid limit of the complex Ginzburg-Landau equation, *J. Diff. Eqs.* Vol. 142, No. 2, 1998, 413—433.
- [10] B. Guo, R. Yuan, Almost periodic solution of generalized Ginzburg-Landau equation, *prog. Nat. Sci.* Vol. 11, No. 7, 2001, 503—515.
- [11] T. Kato, Nonlinear Schrödinger equations, eds. H. Holden and A. Jensun, *Lecture Notes in physics* 345 (springer, Berlin, 1989), pp. 218—263.
- [12] R. Temam, *Infinite-Dimensional, Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, New York Inc., 1988.
- [13] Cao Zhenchao, Guo Boling, Wang Bixiang, Global existence theory for the two-dimensional derivative Ginzburg-Landau equation, *Chinese Sci. Bull.* 43, 1998, No5. 393—395.
- [14] Promislow, K. Time analyticity and Gevreg regularity to solutions of a class of dissipative partial differential equations, *nonlinear Analysis. TMA.* 1991, 959—980.



## 第四章 超导中的 Ginzburg-Landau 方程

在有界区域上发展超导 Ginzburg-Landau 方程的初边值问题的研究,已有不少结果,见文献[1]—[5].他们用 Galerkin 近似和 Leray-Schauder 不动点原理去证明整体解的存在性.至于定常问题在全空间  $\mathbb{R}^2$  和  $\mathbb{R}^3$  的解也已在[6],[7]中用直接方法研究过.

我们在这一章里首先证明 Ginzburg-Landau 方程 Cauchy 问题整体光滑解的存在惟一性,其次研究它的渐近形态——整体吸引子的存在性.最后对于双曲型的 Ginzburg-Landau 方程证明有限能量解的整体存在性,并讨论它的对称涡度解的不稳定性,可参考文献[8]—[11].

### § 1 Ginzburg-Landau 方程的 Cauchy 问题

现考虑发展超导 Ginzburg-Landau 方程在  $\mathbb{R}^3$  中的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t} - i\Phi\psi + (i\nabla + \mathbf{A})^2\psi - \psi + |\psi|^2\psi = 0, & (1.1) \\ \text{Cure}^2 \mathbf{A} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi - I(\psi^* \nabla \psi) - |\psi|^2 \mathbf{A}, & (1.2) \\ \psi(x, 0) = \psi_0(x), \mathbf{A}(x, 0) = \mathbf{A}_0(x), & (1.3) \end{cases}$$

其中  $\psi$  为复值序参量,  $\psi^*$  是  $\psi$  的复数共轭,  $\mathbf{A}$  是实的向量磁势,  $\Phi$  是实的数量电位势,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$  为梯度算子,  $I(\psi^* \nabla \psi)$  为  $\psi^* \nabla \psi$  的虚部. 方程(1.1), (1.2)是规范不变的,对于适当光滑的函数  $\lambda$ , 定义

$$\zeta = \psi e^{i\lambda}, \quad Q = A + \Delta\lambda, \quad \theta = \Phi - \frac{\partial\lambda}{\partial t}. \quad (1.4)$$

容易看到,如 $(\psi, A, \Phi)$ 为(1.1)(1.2)的解,则 $(\zeta, Q, \theta)$ 也是.为了使定解问题是适定的,我们必须附加一些规范条件,通常有

(a) 库仑规范形

$$\operatorname{div} A = 0. \quad (1.5)$$

(b) 洛伦兹规范形

$$\Phi = -\operatorname{div} A. \quad (1.6)$$

下面我们证明在规范(a)或(b)下,(1.1)——(1.3)存在惟一整体光滑解.

记 $L^p = L^p(\mathbb{R}^3)$ 的模为 $|\cdot|_p$ ,  $|\cdot|_{k,p}$ 为 Sobolev 空间  $W^{k,p} = W^{k,p}(\mathbb{R}^3)$ 的模,  $W^{s,2} = H^s(\mathbb{R}^3)$ ,  $|\cdot|_{k,p,q}$ 表示空间  $L^q(0, T; W^{k,p})$ 的模,  $H_d^k = \{A \in H^k(\mathbb{R}^3) \mid \operatorname{div} A = 0\}$ .

**引理 1.1** (Nirenberg-Gagliardo 不等式) 对于  $f = f(x) \in W^{k,q}(\mathbb{R}^3)$ , 有

$$|\nabla^j f|_p \leq C |\nabla^k f|_q^a |f|_r^{1-a},$$

其中

$$\frac{1}{p} - \frac{j}{3} = \alpha \left( \frac{1}{q} - \frac{k}{3} \right) + (1-\alpha) \frac{1}{r}, \quad \frac{j}{k} \leq \alpha \leq 1.$$

如  $k-j-\left(\frac{3}{q}\right)$  为非负整数, 则  $\alpha < 1$ .

**引理 1.2** (Sobolev-Hardy-Littlewood) (见[2]) 对于  $g(x) \in L^{p_1}(\mathbb{R}^m)$ , 则有

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^m} \frac{g(y)}{|x-y|^{m-\alpha}} dy \right\|_{L^p(\mathbb{R}^m)} \leq C \|g\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^m)},$$

其中

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} - \frac{\alpha}{m} > 0.$$

**引理 1.3** (见[3]) 存在连续线性算子  $B$  在  $L^p(\mathbb{R}^3)$  上 ( $\forall 1 < p < \infty$ ) 使得

$\mathcal{B}f = \nabla(-\Delta)^{-1} \operatorname{div} f, \operatorname{div} \mathcal{B}f = \operatorname{div} f, \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ , 和

$$\|\mathcal{B}f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)},$$

对于  $k=1, 2, \dots, \nabla^k(\mathcal{B}f) = \mathcal{B}\nabla^k f, \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ , 更进一步有  $\operatorname{div} \mathcal{B}f = \operatorname{div} f, f \in L^p(\mathbb{R}^3)$ .

**引理 1.4** (见 [3]) 存在有界线性算子  $\mathcal{C}: L^p(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^3)$ , 其中  $1 < p < 3, \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{3}$ , 使得

$$\mathcal{C}f = \nabla(-\Delta)^{-1} f, \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$$

和

$$\|\mathcal{C}f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)},$$

且对  $k=1, 2, \dots, \nabla^k \mathcal{C}f = \mathcal{C}\nabla^k f, \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ . 事实上,

$$\mathcal{C}f = \nabla(-\Delta)^{-1} f = C \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(x-y)}{|x-y|^3} f(y) dy, \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3),$$

其中  $C$  为一个绝对常数. 更进一步, 如  $f \in L^q(\mathbb{R}^3), \operatorname{div} f \in L^p(\mathbb{R}^3)$ , 则  $\mathcal{C}(\operatorname{div} f) = \mathcal{C}f$ .

现证问题(1.1)–(1.3), (1.5)局部解的存在性.

在库仑规范形(1.5)下, 方程组(1.1)–(1.3)能写如下形式

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \Delta \psi = -i\Phi\psi + 2i\mathbf{A} \cdot \nabla \psi - |\mathbf{A}|^2 \psi - (|\psi|^2 - 1)\psi, \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \mathbf{A} = -\nabla \Phi - q(\psi^* \nabla \psi) - |\psi|^2 \mathbf{A}, \quad (1.8)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0, \quad (1.9)$$

$$\psi(x, 0) = \psi_0(x), \mathbf{A}(x, 0) = \mathbf{A}_0(x), x \in \mathbb{R}^3. \quad (1.10)$$

从(1.8)、(1.9)可得

$$\Phi = \Phi(\psi, \mathbf{A}) = (-\Delta)^{-1} \operatorname{div}(-q(\psi^* \nabla \psi) + |\psi|^2 \mathbf{A}). \quad (1.11)$$

定义

$$X_0^k = \{u_0 = (\psi_0, \mathbf{A}_0) \mid u_0 \in H^k \times H_0^k\},$$

具模  $|u_0|_{X_0^k} = |\psi_0|_{k,2} + |\mathbf{A}_0|_{k,2};$

$$X^*(T) = \{u = (\psi, \mathbf{A}) \mid u \in C([0, T]; X_0^k), \nabla u = (\nabla \psi, \nabla \mathbf{A}) \in L^2(0, T; H^k)\},$$

具模  $\|u\|_{X^k(T)} = \|\psi\|_{k,2,\infty} + \|\nabla\psi\|_{k,2,2} + \|\mathbf{A}\|_{k,2,\infty} + \|\nabla\mathbf{A}\|_{k,2,2}$ ;

$$Y_{(T)}^k = \{u = (\psi, \mathbf{A}) \mid u \in L^2(0, T; W^{k, \frac{3}{2}})\},$$

具模  $\|u\|_{Y^k(T)} = \|\psi\|_{k, \frac{3}{2}, 2} + \|\mathbf{A}\|_{k, \frac{3}{2}, 2}$ .

对于  $u = (\psi, \mathbf{A})$ , 定义

$$F_1(u) = i\Phi\psi + 2i\mathbf{A} \cdot \nabla\psi - |\mathbf{A}|^2\psi - |\psi|^3,$$

$$F_2(u) = -\nabla\Phi + q(\psi^* \nabla\psi) - |\psi|^2\mathbf{A},$$

$$F(u) = (F_1(u), F_2(u)), G(u) = F(u) + (\psi, 0),$$

则方程组(1.7), (1.8), (1.10)等价于

$$u = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)G(u(s))ds, \quad (1.12)$$

其中  $S(t) = \exp(t\Delta)$ .

定义映照  $\mathcal{U}_{w_0}$  为

$$w^s = \mathcal{U}_{w_0} w = S(t)w_0 + \int_0^t S(t-\tau)w(\tau)d\tau. \quad (1.13)$$

**引理 1.5** 设  $k \geq 1, w_0 \in H^k$  (或  $w_0 \in H_d^k$ ), 则  $\mathcal{U}_{w_0}$  映照

$$L^2(0, T; w^{k, \frac{3}{2}}) \text{ 为 } Z^k(T) = \{w \mid w \in C([0, T], H^k), \nabla w \in L^2(0, T; H^k)\} \text{ (或 } Z_d^k = \{w \mid w \in C([0, T], H_d^k); \nabla w \in L^2$$

$(0, T; H_d^k)\}$ , 且

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{U}_{w_0} w\|_{k,2,\infty} + \|\nabla \mathcal{U}_{w_0} w\|_{k,2,2} \\ & \leq C\|w_0\|_{k,2} + C(T^{\frac{1}{4}} + T^{\frac{1}{2}})\|w\|_{k, \frac{3}{2}, 2}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{U}_{w_0} w\|_{k,2,\infty} + \|\nabla \mathcal{U}_{w_0} w\|_{k,2,2} \\ & \leq C\|w_0\|_{k,2} + C(T + T^{\frac{1}{2}})(\|w\|_{k,2,\infty} + \|\nabla w\|_{k,2,2}). \end{aligned} \quad (1.15)$$

**证** 令  $w(x, t) = S(t)\varphi$  为线性抛物方程

$$\partial_t w - \Delta w = 0, (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T],$$

$$w(x, 0) = \varphi(x), x \in \mathbb{R}^3$$

的解, 标准能量估计得

$$\|S(t)\varphi\|_2^2 + \int_0^t \|\nabla S(\tau)\|_2^2 d\tau = \|\varphi\|_2^2.$$

从  $L^p - L^q$  估计, 对  $1 < p, q < \infty$  得

$$|S(t)\varphi|_{k,q} \leq Ct^{-\frac{3}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} |\varphi|_{k,p},$$

特别有

$$|S(t)\varphi|_2 \leq Ct^{-\frac{1}{4}} |\varphi|_{\frac{3}{2}}, \quad |\nabla S(t)\varphi|_2 \leq Ct^{-\frac{3}{4}} |\varphi|_2,$$

则

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t S(t-\tau)w(\tau)d\tau \right|_2 &\leq C \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{4}} |w(\tau)|_{\frac{3}{2}} d\tau \\ &\leq Ct^{\frac{1}{4}} \left( \int_0^t |w(\tau)|_{\frac{3}{2}}^3 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

因此  $\mathcal{W}_{W_0} W \in C([0, t], H^k)$ , 注意到

$$\begin{aligned} \int_0^t \left| \nabla \int_0^t S(\tau-s)w(s)ds \right|_2^2 ds &\leq C \int_0^t \left\{ \int_0^t (\tau-s)^{-\frac{3}{2}} |w(s)|_{\frac{3}{2}} ds \right\}^2 d\tau \\ &\leq C \left\{ \int_0^t |w(s)|_{\frac{3}{2}}^{\frac{4}{3}} ds \right\}^{\frac{3}{2}} \\ &\leq Ct^{\frac{1}{2}} \int_0^t |w(s)|_{\frac{3}{2}}^2 ds, \end{aligned}$$

从上面的不等式即得引理.

**引理 1.6** 设  $k \geq 1$ , 则  $F(u)$  映照  $X^k$  到  $X^k$ , 且

$$|F(u)|_{Y^k} \leq C(1+T^{\frac{1}{2}})(|u|_{X^1} + |u|_{X^1}^{\frac{3}{2}})|u|_{X^k}, \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} |F(u_1) - F(u_2)|_{Y^k} &\leq C(T^{\frac{1}{4}} + T^{\frac{1}{2}})(|u_1|_{X^k} + |u_2|_{X^k} + |u_1|_{X^k}^{\frac{3}{2}} \\ &\quad + |u_2|_{X^k}^{\frac{3}{2}})|u_1 - u_2|_{X^k}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

**证** 首先估计  $|\Phi\psi|_{k, \frac{3}{2}, 2}$ , 对  $k=0$ ,

$$\begin{aligned} |\Phi\psi|_{\frac{3}{2}} &\leq |\Phi|_3 |\psi|_3 \leq C|\psi|_{1,2} |\nabla \Phi|_{\frac{3}{2}} \\ &\leq C|\psi|_{1,2} (|\psi^* \nabla \psi|_{\frac{3}{2}} + ||\psi|^2 \mathbf{A}|_{\frac{3}{2}}) \\ &\leq C|\psi|_{1,2} (|\psi|_6 |\nabla \psi|_2 + |\psi|_6^2 |\mathbf{A}|_3) \\ &\leq C|\psi|_{1,2} (\nabla |\psi|_{\frac{3}{2}}^2 + |\nabla \psi|_{\frac{3}{2}}^2 |\mathbf{A}|_{1,2}), \end{aligned}$$

因此

$$|\Phi\psi|_{0, \frac{3}{2}, 2} \leq CT^{\frac{1}{2}} |\psi|_{1,2,\infty}^2 (|\psi|_{1,2,\infty} + |\psi|_{1,2,\infty} |\mathbf{A}|_{1,2,\infty})$$

$$\leq CT^{\frac{1}{2}}(|u|_{X^1}^2 + |u|_{X^1}^3)|u|_{X^1}.$$

为估计  $|\nabla^k(\Phi\psi)|_{\frac{3}{2}}$ , 注意到

$$\begin{aligned} & |\nabla^k[(-\Delta)^{-1}\operatorname{div}(-g(\psi^*\nabla\psi)\psi)]|_{\frac{3}{2}} \\ & \leq \sum_{b+c=k} C|\nabla^c\psi|_{\frac{3k}{c}}|\nabla^b((-\Delta)^{-1}\operatorname{div}(\psi^*\nabla\psi))|_{\frac{3k}{2k-c}} \\ & \leq C \sum_{\substack{b+c=k \\ b\geq 1}} |\nabla^c\psi|_{\frac{3k}{c}}|\nabla^{b-1}(\psi^*\nabla\psi)|_{\frac{3k}{2k-c}} \\ & \quad + C|\nabla^k\psi|_3|(-\Delta)^{-1}\operatorname{div}(\psi^*\nabla\psi)|_3. \end{aligned}$$

因

$$\begin{aligned} |\nabla^k\psi(-\Delta)^{-1}\operatorname{div}(\psi^*\nabla\psi)|_{\frac{3}{2}} & \leq |\nabla^k\psi|_3|(-\Delta)^{-1}\operatorname{div}(\psi^*\nabla\psi)|_3 \\ & \leq C|\nabla\psi|_{k,2}^{1-(\frac{1}{2})}|\nabla\psi|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|\psi|_6|\nabla\psi|_2 \\ & \leq C|\nabla\psi|_{k,2}|\psi|_{1,2}^2, \end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned} |\nabla^k\psi(-\Delta)^{-1}\operatorname{div}(\psi^*\nabla\psi)|_{0,\frac{3}{2},2} & \leq C|\psi|_{1,2,\infty}^2|\nabla\psi|_{k,2,2} \\ & \leq C|u|_{X^1}^2|u|_{X^k}. \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{b+c=k \\ b\geq 1}} |\nabla^k\psi|_{\frac{3k}{c}}|\nabla^{b-1}(\psi^*\nabla\psi)|_{\frac{3k}{(2k-c)}} \\ & \leq C \sum_{\substack{b_1+b_2+c=k \\ b_2\geq 1}} |\nabla^c\psi|_{\frac{3k}{c}}|\nabla^{b_1}\psi|_{\frac{6k}{(k+2b_1)}}|\nabla^{b_2}\psi|_{\frac{6k}{(k+2b_2)}} \\ & \leq C \sum_{b+c=k} |\nabla^k\psi|_{\frac{k}{3}}|\psi|_{\infty}^{1-(\frac{c}{k})}|\nabla^k\psi|_{\frac{k}{2}}^{\frac{b}{k}}|\psi|_6^{2(\frac{b}{k})} \\ & \leq C \sum_{b+c=k} |\nabla\psi|_{k,2}^{\frac{c}{k}}|\nabla\psi|_{1,2}^{1-(\frac{c}{k})}|\psi|_{k,2}^{\frac{b}{k}}|\psi|_{1,2}^{2(\frac{b}{k})}, \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{b+c=k \\ b\geq 1}} |\nabla^c\psi \cdot \nabla^{b-1}(\psi^*\nabla\psi)|_{0,\frac{3}{2},2} \\ & \leq C \sum_{\substack{b+c=k \\ b\geq 1}} |\nabla\psi|_{k,2,2}^{\frac{c}{k}}|\nabla\psi|_{1,2,2}^{1-(\frac{c}{k})}|\psi|_{k,2,\infty}^{\frac{b}{k}}|\psi|_{1,2,\infty}^{2-(\frac{b}{k})} \\ & \leq C(|\psi|_{k,2,\infty} + |\nabla\psi|_{k,2,2})(|\psi|_{1,2,\infty}^2 + |\nabla\psi|_{1,2,2}^2) \end{aligned}$$

$$\leq C \|u\|_{X^1}^2 \|u\|_{X^k}.$$

进一步有

$$\begin{aligned} & |\nabla^k [(-\Delta)^{-1} \operatorname{div}(|\psi|^2 \mathbf{A}) \psi]|_{3/2} \\ & \leq C \sum_{\substack{a+b=k \\ b \geq 1}} |\nabla^a \psi \cdot \nabla^b (-\Delta)^{-1} \operatorname{div}(|\psi|^2 \mathbf{A})|_{3/2} \\ & \leq C \sum_{\substack{a+b=k \\ b \geq 1}} |\nabla^a \psi|_{6k/(2k+a)} |\nabla^{b-1}(|\psi|^2 \mathbf{A})|_{6k/(k+b)} \\ & \quad + C |\nabla^k \psi|_3 |(-\Delta)^{-1} \operatorname{div}(|\psi|^3 \mathbf{A})|_3, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} & |\nabla^k \psi \cdot (-\Delta)^{-1} \operatorname{div}(|\psi|^2 \mathbf{A})|_{3/2} \leq |\nabla^k \psi|_3 |(-\Delta)^{-1} \operatorname{div}(|\psi|^2 \mathbf{A})|_3 \\ & \leq C |\nabla^k \nabla \psi|_{\frac{1}{2}-(1/2k)} |\nabla \psi|_{\frac{1}{2}^{2k}} |\psi|^2 \mathbf{A}|_{3/2} \\ & \leq C |\nabla \psi|_{\frac{1}{k,2}-(1/2k)} |\nabla \psi|_{\frac{1}{2}^{2k}} |\psi|_{\frac{2}{6}}^2 |\mathbf{A}|_3 \\ & \leq C |\nabla \psi|_{\frac{1}{k,2}-(1/2k)} |\nabla \psi|_{\frac{1}{2}^{2k}} |\nabla \psi|_{\frac{2}{2}}^2 |\mathbf{A}|_{1,2} \\ & \leq C |\nabla \psi|_{k,2} |\nabla \psi|_{\frac{2}{2}}^2 |\mathbf{A}|_{1,2}, \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} |\nabla^k \psi \cdot (-\Delta)^{-1} \operatorname{div}(|\psi|^2 \mathbf{A})|_{0, \frac{2}{3}, 2} & \leq C |\psi|_{1,2,\infty}^2 |\mathbf{A}|_{1,2,\infty} |\nabla \psi|_{k,2,2} \\ & \leq C \|u\|_{X^1}^3 \|u\|_{X^k}, \end{aligned}$$

进一步有

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{a+b=k \\ b \geq 1}} |\nabla^a \psi \cdot \nabla^b (-\Delta)^{-1} \operatorname{div}(|\psi|^2 \mathbf{A})|_{3/2} \\ & \leq \sum_{\substack{a+b=k \\ b \geq 1}} |\nabla^a \psi|_{6k/(2k+a)} |\nabla^{b-1}(|\psi|^2 \mathbf{A})|_{6k/(k+b)} \\ & \leq C \sum_{\substack{a+b=k \\ b \geq 1}} |\nabla^k \psi|_{\frac{a}{2}^{1/k}} |\psi|_{1,2}^{1-(a/k)} |\nabla^k(|\psi|^2 \mathbf{A})|_{\frac{b}{3/2}^{1/k}} |\psi|^2 \mathbf{A}|_{\frac{1}{2}^{1-(b/k)}}. \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} |\nabla^k(|\psi|^2 \mathbf{A})|_{3/2} & \leq C \sum_{c+d=k} |\psi|_{k,2}^{c/k} |\psi|_{1,2}^{2-(c/k)} |\nabla \mathbf{A}|_{k,2}^{d/k} |\nabla \mathbf{A}|_{1,2}^{1-(d/k)}, \\ ||\psi|^2 \mathbf{A}|_2 & \leq |\nabla \mathbf{A}|_2 |\nabla \psi|_2^2, \end{aligned}$$

则有

$$\sum_{\substack{a+b=k \\ b \geq 1}} |\nabla^a \psi \cdot \nabla^b (-\Delta)^{-1} \operatorname{div}(|\psi|^2 \mathbf{A})|_{3/2}$$

$$\leq C \sum_{\substack{a+b-k+c+d=k \\ b \geq 1}} |\nabla^k \psi|_2^{a/k} (|\psi|_{k,2}^{c/k} |\nabla A|_{k,2}^{d/k})^{b/k} |\psi|_{1,2}^{1-(a/k)} \\ \cdot (|\psi|_{1,2}^{2-(c/k)} |\nabla A|_{1,2}^{d/k})^{b/k} |\nabla A|_{1,2}^{(b/k)} |\nabla \psi|_2^{2(1-b/k)},$$

于是有

$$\sum_{\substack{a+b-k \\ b \geq 1}} |\nabla^a \psi \cdot \nabla^b (-\Delta)^{-1} \operatorname{div}(|\psi|^2 A)|_{0,3/2,2} \\ \leq C \sum_{\substack{a+b-k+c+d=k \\ b \geq 1}} |\psi|_{k,2,\infty}^{(a/k)+(c/k)(b/k)} |\psi|_{1,2,\infty}^{1-(a/k)+(2-(c/k))(b/k)+2(1-(b/k))} \\ \times |A|_{1,2,\infty}^{(b/k)} \left( \int_0^T |\nabla A|_{k,2}^{2(d/k)(b/k)} |\nabla A|_{1,2}^{2(1-(d/k)(b/k))} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ \leq C \sum_{\substack{a+b-k+c+d=k \\ b \geq 1}} |\psi|_{k,2,\infty}^{(a/k)+(c/k)(b/k)} |\nabla A|_{k,2,2}^{(d/k)(b/k)} \\ \times |\psi|_{1,2,\infty}^{1-(a/k)+(2-(c/k))(b/k)+2(1-(b/k))} |\nabla A|_{1,2,2}^{(d/k)(b/k)} \\ \leq C (|\psi|_{k,2,\infty} + |\nabla A|_{k,2,2}) \|u\|_{X^1}^3 \\ \leq C \|u\|_{X^1}^3 \|u\|_{X^k}.$$

由此推之

$$|\Phi \psi|_{k, \frac{3}{2}, 2} \leq C(1+T^{\frac{1}{2}}) (\|u\|_{X^1} + \|u\|_{X^1}^3) \|u\|_{X^k}.$$

类似可估计  $F(u)$  中的其他项, 引理得证.

**定理 1.7** 设  $k \geq 1, u_0 \in X_0^k$ , 则存在  $T_{\max} > 0$  使得方程  $u = \mathcal{L}_{u_0} G(u)$  具有惟一解  $u \in X^k(T), T \in [0, T_{\max})$ , 使得如  $T_{\max} < \infty$ , 则

$$\lim_{t \rightarrow T_{\max} - 0} \|u(t)\|_{X_0^1} = \infty.$$

进一步, 如  $u_{0n} \in X_0^k, u_{0n} \rightarrow u_0$  依  $X_0^k$  模 ( $n \rightarrow \infty$ ),  $T \in (0, T_{\max})$ , 则  $n$  充分大时, 方程  $u = \mathcal{L}_{u_{0n}} G(u)$  具有解  $u_n \in X^k(T)$ , 且  $u_n \rightarrow u$  依  $X^k(T)$  模,  $n \rightarrow \infty$ .

**证** 证明是标准的, 由引理 1.5, 1.6 和压缩映像定理即得.

为了得到整体解, 仅需对问题 (1.7) — (1.10) 的解  $u = (\psi, A)$  作  $\|u\|_{X^1}$  的一致先验估计.

**引理 1.8** 设  $|\psi_0(x)|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq 1$ , 则  $|\psi|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq 1$ .

**证** 定义  $\phi = |\psi|e^{i\theta}, \Omega_t^+ = \{x \in \mathbb{R}^3, |\phi(x, t)| > 1\}, \chi[0, t]$



表示在  $[0, T]$  上的特征函数, 乘 (1.7) 以  $w = (|\psi| - 1)^+ \cdot e^{-i\theta}$   $\cdot \chi_{[0, t]}$ , 在  $\mathbb{R}^3 \times [0, T]$  上积分, 再取实部得

$$\operatorname{Re} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial t} - \Delta \psi + 2i\mathbf{A} \nabla \psi + |\mathbf{A}|^2 \psi + (|\psi|^2 - 1)\psi \right\} w dx dt = 0.$$

注意到

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \psi}{\partial t} w &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_t^+} (|\psi| - 1)^2, \\ \operatorname{Re} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta \psi + 2i\mathbf{A} \nabla \psi + |\mathbf{A}|^2 \psi) (|\psi| - 1)^+ e^{-i\theta} \\ &= \operatorname{Re} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla \psi - i\mathbf{A} \psi) (\nabla + i\mathbf{A}) ((|\psi| - 1)^+ e^{-i\theta}) \\ &= \int_0^t \int_{\Omega_s^+} [|\nabla (|\psi|)|^2 + |\psi| (|\psi| - 1) |\nabla \theta - \mathbf{A}|^2] dx ds \geq 0, \end{aligned}$$

当  $|\psi| > 1$  时,  $(|\psi|^2 - 1)\psi w \geq 0$  可得

$$\int_{\Omega_t^+} (|\psi| - 1)^2 \leq 0,$$

因此,  $|\psi| \leq 1, (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, t]$ .

**引理 1.9** 设引理 1.8 的条件满足, 则有

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x, t)|^2 dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \psi|^3 dx ds \\ & \leq C(1 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{A}|^2 dx ds); \\ \text{(ii)} \quad & \max_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{A}(x, t)|^2 dx + \int_0^T \|\mathbf{A}\|_{1,2}^2 dt \leq C; \\ \text{(iii)} \quad & \max_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x, t)|^2 dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \psi|^2 dx dt \leq C; \\ \text{(iv)} \quad & \max_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \mathbf{A}(x, t)|^2 dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla^2 \mathbf{A}|^2 \\ & \quad + |\mathbf{A}_t|^2) dx dt \leq C; \\ \text{(v)} \quad & \max_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \psi(x, t)|^2 dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla^2 \psi|^2 \\ & \quad + |\psi_t|^2) dx dt \leq C. \end{aligned}$$

证 乘(1.7)以  $\psi^*$ , 在  $\mathbb{R}^3 \times [0, t]$  上积分, 再取实部得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |\psi(\cdot, t)|_2^2 - \frac{1}{2} |\psi_0|_2^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |\psi|^2 (|\psi|^2 - 1) \\ & + |\nabla \psi|_{0,2,2}^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{A}|^2 |\psi|^2 + 2 \operatorname{Re} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} i \psi^* \mathbf{A} \nabla \psi = 0. \end{aligned}$$

从

$$\left| \operatorname{Re} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} 2i \psi^* \mathbf{A} \cdot \nabla \psi \right| \leq 4 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{A}|^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \psi|^2$$

可得 (i).

(ii) 乘(1.8)以  $\mathbf{A}$ , 在  $\mathbb{R}^3 \times [0, t]$  上积分, 利用(1.9)有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |\mathbf{A}(x, t)|_2^2 - \frac{1}{2} |\mathbf{A}_0|_2^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \mathbf{A}|^2 \\ & \leq C \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} (|\mathbf{A}|^2 + |\nabla \psi|^2) \leq C \left( 1 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{A}|^3 \right). \end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式可得 (ii).

(iii) 联系 (i), (ii) 即得 (iii)

(iv) 乘(1.8)以  $\mathbf{A}$ , 在  $\mathbb{R}^3$  积分得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |\nabla \mathbf{A}|_2 + |\Delta \mathbf{A}|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^3} \Delta \mathbf{A} (I(\psi^* \nabla \psi) - |\psi|^2 \mathbf{A}) \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla \psi|^2 + |\mathbf{A}|^2), \end{aligned}$$

由 (ii) (iii) 即得 (iv).

(v) 由 (iv) 有

$$\int_0^t |\mathbf{A}(\cdot, s)|_{L^\infty}^2 ds \leq C,$$

乘(1.7)以  $\psi^*$ , 在  $\mathbb{R}^3 \times [0, t]$  上积分, 再取实部得

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |\psi_t|^2 + \frac{1}{2} |\nabla \psi(\cdot, t)|_2^2 - \frac{1}{2} |\nabla \psi_0|_2^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \int_0^t |\psi_t(\cdot, s)|_2^2 ds + C \int_0^t |\Phi(\cdot, s)|_2^2 ds \\ & \quad + C \int_0^t |\mathbf{A}(\cdot, s)|_\infty^2 |\nabla \psi(\cdot, s)|_2^2 ds + C \int_0^t |\mathbf{A}(\cdot, s)|_4^4 ds. \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}
|A(\cdot, s)|_4^4 &\leq |A(\cdot, s)|_\infty^2 |A(\cdot, s)|_2^2, \\
|\Phi(\cdot, s)|_2^2 &\leq 2(|\psi \nabla \psi^*|_{6/5}^2 + \|\psi\|^2 |A|_{6/5}^2) \\
&\leq 2(|\psi|_3^2 |\nabla \psi|_2^2 + |\psi|_2^2 |A|_6^2) \\
&\leq 2|\psi|_2^{4/3} (|\nabla \psi|_2^2 + |\nabla A|_2^2),
\end{aligned}$$

因此

$$\int_0^t |\Phi(\cdot, s)|_2^2 ds \leq C |\psi|_{0,2,\infty}^{4/3} \int_0^t (|\nabla \psi|_2^2 + |\nabla A|_2^2).$$

我们有

$$\begin{aligned}
&|\psi|_{0,2,2}^2 + |\nabla \psi|_{0,2,\infty}^2 \\
&\leq C \left( 1 + \int_0^t (1 + |A(\cdot, s)|_\infty^2 + |\nabla \psi(\cdot, s)|_2^2) \right).
\end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式即得 (v), 引理证毕.

**定理 1.10 (库仑规范形)** 设  $u_0(x) = (\psi_0(x), A_0(x)) \in X_0^k, k \geq 1$ , 且  $|\psi_0(x)|_{L^\infty} \leq 1$ , 则问题 (1.7) — (1.10) 具有惟一整体解  $u = (\psi, A)$  满足

$$\begin{aligned}
u &\in X^k(T), \nabla \Phi \in C(0, T; H^{k-1}) \cap L^2(0, T; H^k), \\
\forall T &\in (0, \infty),
\end{aligned} \tag{1.18}$$

且  $|u|_{X^1} \leq C, |\psi(x, t)|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq 1, t \in [0, T]$ , 其中常数  $C$  依赖于  $|u_0|_{1,2}$  和  $T$ .

现考虑洛伦兹规范形 (1.6), 问题 (1.1) — (1.3) 变为

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \Delta \psi = i\psi \operatorname{div} A - (|\psi|^2 - 1)\psi - |A|^2 \psi - 2iA \cdot \nabla \psi, \tag{1.19}$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} - \Delta A = I(\psi^* \nabla \psi) - |\psi|^2 A, \tag{1.20}$$

$$\psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad A(x, 0) = A_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \tag{1.21}$$

我们有

**定理 1.11 (洛伦兹规范形)** 设  $k \geq 1, u_0(x) = (\psi_0(x), A_0(x)) \in H^k, |\psi_0(x)|_{L^\infty} \leq 1$ , 则问题 (1.19) (1.20) (1.21) 具有惟一整体解  $u = (\psi(x, t), A(x, t))$ , 满足

$$u \in C(\mathbb{R}^+, H^k), \nabla u = (\nabla \psi, \nabla A) \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^+; H^k), \tag{1.22}$$

且  $\|u\|_{X^1} \leq C$ ,  $\|\psi(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq 1, t \in [0, T]$ , 其中常数  $C$  仅依赖于  $\|u_0\|_{1,2}$  和  $T$ .

证 类似于前面的证明可得出定理. 这里给出另一种证明, 基于定理 1.10 的结果和规范不变性可得.

令  $A_0^c = A_0 - \nabla(\operatorname{div} \Delta^{-1} A_0)$ ,  $\psi_0^c = \psi_0 e^{-i \operatorname{div} \Delta^{-1} A_0}$ , 由定理 1.10, 对问题 (1.1)–(1.3), (1.5) 具有惟一整体解  $(\psi^c, A^c, \Phi^c)$  满足初值  $(\psi^c, A^c)|_{t=0} = (\psi_0^c, A_0^c)$ ,  $(\psi^c, A^c) \in X^k(T)$ ,  $\nabla \Phi^c \in C(0, T; H^{k-1}) \cap L^2(0, T; H^k)$ , 且  $\|\psi(t)\|_{L^\infty} \leq 1$ .

令  $\lambda$  为问题

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} - \Delta \lambda = \Phi^c,$$

$$\lambda|_{t=0} = \operatorname{div} \Delta^{-1} A_0, x \in \mathbb{R}^3$$

的解, 则  $\nabla \lambda \in (0, T; H^k)$ ,  $\nabla^2 \lambda \in L^2(0, T; H^k)$ , 置  $\psi = \psi^c e^{i\lambda}$ ,  $A = A^c + \nabla \lambda$ ,  $\Phi = \Phi^c - \left(\frac{\partial \lambda}{\partial t}\right)$ , 容易验证  $(\psi, A, \Phi)$  为问题 (1.19)–(1.21) 和 (1.6) 的解.

## § 2 Ginzburg-Landau 方程的整体吸引子

我们考虑在瞬时规范  $\psi = -\operatorname{div} A$  下, Ginzburg-Landau 方程的初边值问题

$$i\eta_t - i\eta k \operatorname{div} A \psi + \left(\frac{i}{k} \nabla + A\right)^2 \psi - \psi + |\psi|^2 \psi = 0, \Omega \times \mathbb{R}^+, \quad (2.1)$$

$$A_t - \Delta A + \frac{i}{2k}(\psi^* \operatorname{grad} \psi - \psi \operatorname{grad} \psi^*) + |\psi|^2 A = 0, \quad (2.2)$$

边界条件

$$\nabla \psi \cdot n = 0, \quad \left(\frac{i}{k} \nabla \psi + A \psi\right) \times n = 0, \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \quad (2.3)$$

初始条件

$$\psi(x, 0) = \psi_0(x), A(x, 0) = A_0, x \in \Omega, \quad (2.4)$$

简记 模  $\|\cdot\|_{L^2} = \|\cdot\|$ ,  $\|\cdot\|_{H^{m,p}} = \|\cdot\|_{m,p}$ ,

$$H_n^1(\Omega) = \{ \mathbf{A} \in [H^1(\Omega)]^N \mid \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0, x \in \partial\Omega \}, \quad (2.5)$$

具模  $(\|\operatorname{div} \mathbf{A}\|^2 + \|\nabla \times \mathbf{A}\|^2)^{\frac{1}{2}}, \mathbf{A} \in H_n^1(\Omega)$ , 模  $(\|\operatorname{div} \mathbf{A}\|^2 + \|\nabla \times \mathbf{A}\|^2)^{\frac{1}{2}}$  等价于模  $\|\nabla \mathbf{A}\|$ , 即有

$$\|u\| \leq K_1 \|\nabla u\|, \quad u \in H_n^1(\Omega). \quad (2.6)$$

记  $D_A = \frac{i}{K} \nabla + \mathbf{A}$ , 则(2.1), (2.2)可写成

$$\eta \phi_t - i \eta k \operatorname{div} \mathbf{A} \phi + D_A^2 \phi - \phi + |\phi|^2 \phi = 0, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{A}_t - \nabla \mathbf{A} = \frac{1}{2} [\phi^* D_A \phi + \phi (D_A \phi)^*]. \quad (2.8)$$

我们作对时间  $t$  的一致先验估计.

易见,  $\phi, \varphi \in \mathcal{H}^1(\text{复}), \mathbf{A} \in H^1(\text{实}), D_A$  满足

$$(D_A^2 \phi, \varphi^*) = (D_A \phi, (D_A \varphi)^*), \quad (2.9)$$

$$(D_A \phi)_t = D_A \phi_t + \mathbf{A}_t \phi. \quad (2.10)$$

以下设  $|\phi_0(x)| \leq 1, x \in \Omega$ , 它保证了  $|\phi(x, t)| \leq 1, (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$ .

以  $\phi^*$  乘(2.7), 分部积分后取实部得

$$\eta \frac{d}{dt} \|\phi\|^2 + 2 \|D_A \phi\|^2 - \|\phi\|^2 + \|\phi\|^4 = 0. \quad (2.11)$$

以它们的共轭乘(2.7)两边, 分部积分得

$$\begin{aligned} & \eta^2 \|\phi_t\|^2 + \|D_A^2 \phi\|^2 + \eta \frac{d}{dt} \|D_A \phi\|^2 \\ &= \eta (\mathbf{A}_t \phi, (D_A \phi)^*) + \eta (\mathbf{A}_t \phi^*, D_A \phi) \\ &\leq 2 \|D_A \phi\| \|\mathbf{A}_t\| \leq \|D_A \phi\|^2 + \|\mathbf{A}_t\|^2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

以它们自己乘(2.8)两边, 分部积分得

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{A}_t\|^2 + \|\Delta \mathbf{A}\|^2 + \frac{d}{dt} [\|\operatorname{div} \mathbf{A}\|^2 + \|\nabla \times \mathbf{A}\|^2] \\ &= \frac{1}{4} \int_{\Omega} [\phi^* D_A \phi + \phi (D_A \phi)^*]^2 dx \leq \|D_A \phi\|^2, \end{aligned} \quad (2.13)$$

最后不等式来自  $|\phi_0(x)| \leq 1, x \in \Omega$ , 由此可得

$$\frac{d}{dt} [\|\operatorname{div} \mathbf{A}\|^2 + \|\nabla \times \mathbf{A}\|^2 + \eta \|\phi\|^2] + \|\mathbf{A}_t\|^2$$

$$+ \|\Delta \mathbf{A}\|^2 + \|D_A \psi\|^2 \leq C|\Omega|. \quad (2.14)$$

以  $2\psi_t^*$  乘(2.7), (2.8)以  $\mathbf{A}_t$ , 分部积分后相加得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\|\operatorname{div} \mathbf{A}\|^2 + \|\nabla \times \mathbf{A}\|^2 + \frac{1}{2} \|\psi\|_4^4 - \|\psi\|^2 + \|D_A \psi\|^2] \\ \leq -2\eta \|\psi_t\|^2 - 2\|\mathbf{A}_t\|^2 + i\eta k \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{A} (\psi^* \psi_t - \psi \psi_t^*) dx \\ \leq \frac{4k^2}{\eta} \|\operatorname{div} \mathbf{A}\|^2 - \eta \|\psi_t\|^2 - 2\|\mathbf{A}_t\|^2. \end{aligned} \quad (2.14)_1$$

注意到

$$\begin{aligned} \|\nabla \mathbf{A}\| &\leq C \|\mathbf{A}\|^{\frac{1}{2}} \|\Delta \mathbf{A}\|^{\frac{1}{2}} \leq C \|\nabla \mathbf{A}\|^{\frac{1}{2}} \|\Delta \mathbf{A}\|^{\frac{1}{2}}, \\ \|\operatorname{div} \mathbf{A}\|^2 + \|\nabla \times \mathbf{A}\|^2 &\leq C \|\nabla \mathbf{A}\|^2, \end{aligned}$$

可得

$$\|\operatorname{div} \mathbf{A}\|^2 + \|\nabla \times \mathbf{A}\|^2 \leq K_2 \|\nabla \mathbf{A}\|^2,$$

于是由(2.11)–(2.13)和(2.14)得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ C\eta \|\psi\|^2 + C_1 \|\nabla \cdot \mathbf{A}\|^2 + \|\nabla \times \mathbf{A}\|^2 + \frac{1}{2} \|\psi\|_4^4 \right. \\ \left. - \|\psi\|^2 + \|D_A \psi\|^2 \right] + C_2 [C\eta \|\psi\|^2 + C_1 \|\nabla \cdot \mathbf{A}\|^2 \\ + \|\nabla \times \mathbf{A}\|^2 + \frac{1}{2} \|\psi\|_4^4 - \|\psi\|^2 + \|D_A \psi\|^2] \\ + C_3 [\eta \|\psi_t\|^2 + \|\mathbf{A}_t\|^2] \leq C|\Omega|. \end{aligned} \quad (2.15)$$

由 Gronwall 不等式得

$$\begin{aligned} [C\eta \|\psi\|^2 + C_1 \|\nabla \cdot \mathbf{A}\|^2 + \|\nabla \times \mathbf{A}\|^2 \\ + \frac{1}{2} \|\psi\|_4^4 - \|\psi\|^2 + \|D_A \psi\|^2] \\ \leq e^{-C_2 t} [C\eta \|\psi_0\|^2 + C_1 \|\nabla \mathbf{A}_0\|^2 + \|\nabla \times \mathbf{A}_0\|^2 \\ + \frac{1}{2} \|\psi_0\|_4^4 - \|\psi_0\|^2 + \|D_A \psi_0\|^2] \\ + C|\Omega|(1 - e^{-C_2 t}). \end{aligned} \quad (2.16)$$

选取  $t_0$  充分大, 使得对  $t \geq t_0$  时, 有

$$\begin{aligned} C\eta \|\psi\|^2 + C_1 \|\nabla \cdot \mathbf{A}\|^2 + \|\nabla \times \mathbf{A}\|^2 \\ + \frac{1}{2} \|\psi\|_4^4 - \|\psi\|^2 + \|D_A \psi\|^2 \leq C|\Omega|, \end{aligned} \quad (2.17)$$

其中常数  $C$  与初值  $\psi_0, \mathbf{A}_0$  无关, 于是对于  $t \geq t_0$ ,

$$(\|\operatorname{div} \mathbf{A}\|^2 + \|\nabla \times \mathbf{A}\|^2)^{\frac{1}{2}} \leq K_3.$$

注意到

$$\|D_A \psi\| \geq \frac{1}{k} \|\nabla \psi\| - \|\mathbf{A}\|,$$

可得

$$\frac{1}{k} \|\nabla \psi\| \leq \|D_A \psi\| + \|\mathbf{A}\|,$$

则对  $t \geq t_0$  有

$$\|\nabla \psi\| \leq K_4.$$

从(2.15)可得

$$\int_t^{t+1} [\|\psi_t(s)\|^2 + \|\mathbf{A}_t(s)\|^2] ds \leq K_5, t > t_0. \quad (2.18)$$

由此可知

$$B = \{(\psi, \mathbf{A}) \in \mathcal{H}^1 \times H^1 \mid \|\psi\| \leq 1, \|\nabla \psi\| \leq K_4, (\|\nabla \cdot \mathbf{A}\|^2 + \|\nabla \times \mathbf{A}\|^2)^{\frac{1}{2}} \leq K_3\}$$

为方程(2.7), (2.8)在  $\mathcal{H}^1 \times H^1$  中的吸收集. 为了证明  $B$  的  $w$  极限集是问题(2.7), (2.8)在  $\mathcal{H}^1 \times H^1$  中,  $\|\psi\| \leq 1$  的吸引子, 必须证明吸收集的紧性. 注意到

$$(D_A^2 \psi, \psi^*) = (D_A \psi, (D_A \psi^*)),$$

$$(D_A^2 \psi)_t = D_A^2 \psi_t + D_A(\mathbf{A}_t \psi) + \mathbf{A}_t D_A \psi,$$

(2.7)对  $t$  微分, 再乘以  $\psi_t^*$ , 分别积分后再取实部得

$$\begin{aligned} & \frac{\eta}{2} \frac{d}{dt} \|\psi_t\|^2 - \eta k \operatorname{Im} \int (\operatorname{div} \mathbf{A}_t) \psi \psi_t^* dx + \|D_A \psi_t\|^2 \\ & + \int \mathbf{A}_t \psi (D_A \psi_t)^* dx + \int (D_A \psi) (\mathbf{A}_t \psi_t)^* dx \\ & - \|\psi_t\|^2 + \int |\psi|^2 |\psi_t|^2 dx \leq 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

由此可得

$$\frac{\eta}{2} \frac{d}{dt} \|\psi_t\|^2 + \|D_A \psi_t\|^2 + \int |\psi|^2 |\psi_t|^2 dx \leq \|\psi_t\|^2$$

$$\begin{aligned}
& + \eta k \|\nabla \mathbf{A}_t\| \|\psi_t\| - \int \mathbf{A}_t \psi (D_A \psi_t)^* dx \\
& - \int (D_A \psi) (\mathbf{A}_t \psi_t)^* dx.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

(2.8) 对  $t$  微分, 乘以  $\mathbf{A}_t$ , 分部积分得

$$\begin{aligned}
& \frac{\eta}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{A}_t\|^2 + \|\nabla \mathbf{A}_t\|^2 = - \operatorname{Re} \int (D_A \psi)^* (\mathbf{A}_t \psi_t) dx \\
& - \operatorname{Re} \int (\mathbf{A}_t \psi)^* (D_A \psi_t + \mathbf{A}_t \psi) dx \\
& \leq \|D_A \psi\| \|\mathbf{A}_t \psi_t\| + \|\mathbf{A}_t \psi\| \|D_A \psi_t\| - \|\mathbf{A}_t \psi\|^2.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{A}_t\|^2 + \|\nabla \mathbf{A}_t\|^2 + \|\mathbf{A}_t \psi\|^2 \leq \|D_A \psi\| \|\mathbf{A}_t \psi_t\| \\
& + \|\mathbf{A}_t \psi\| \|D_A \psi_t\|,
\end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} [\eta \|\psi_t\|^2 + \|\mathbf{A}_t\|^2] + \|D_A \psi_t\|^2 + \|\nabla \mathbf{A}_t\|^2 + \|\mathbf{A}_t \psi\|^2 \\
& \leq C(\|\mathbf{A}_t\|^2 + \|\psi_t\|^2).
\end{aligned} \tag{2.23}$$

由一致 Gronwall 不等式和(2.23)可得

$$\|\mathbf{A}_t\| \leq K_6, \quad \|\psi_t\| \leq K_6, \quad t > 1, \tag{2.24}$$

由此推得  $H^2$  模的有界性

$$\|\mathbf{A}\|_{H^2} \leq K_7, \quad \|\psi\|_{H^2} \leq K_7, \quad t > 1, \tag{2.25}$$

令半群  $S(t)$  为

$$S(t): \mathcal{H}^1 \times H^1 \rightarrow \mathcal{H}^1 \times H^1,$$

使得  $S(t)(\psi_0, \mathbf{A}_0) = (\psi(t), \mathbf{A}(t))$ , 其中  $(\psi(t), \mathbf{A}(t))$  是问题(2.7), (2.8) 具初值  $(\psi_0, \mathbf{A}_0)$  的解, 由 Sobolev 嵌入定理可知,  $\bigcup_{t>1} S(t)B$  在  $\mathcal{H}^1 \times H^1$  中是紧的. 且  $B$  的  $\omega$  极限集

$$\mathcal{A} = \omega(B) = \bigcap_{t>0} \overline{\bigcup_{t>0} S(t)B}$$

为在  $\mathcal{H}^1 \times H^1$  中,  $|\psi| \leq 1$  的吸引子, 于是有

**定理 2.1** 设  $|\psi_0(x)| \leq 1, x \in \Omega$ , 在瞬时规范  $\Phi = -\operatorname{div} \mathbf{A}$  下, 问题(2.7), (2.8) 在  $\mathcal{H}^1 \times H^1$  中具有吸引子.

现估计吸引子  $\mathcal{A}$  的维数, 令  $u(t) = (\psi(t), \mathbf{A}(t))$ ,  $u(0) =$



$(\psi(0), \mathbf{A}(0)), (2.7), (2.8)$  的变分方程为

$$V_t + L(u)V = 0, \quad V(x, 0) = V_0(x), \quad (x, t) \in R \times R^+, \quad (2.26)$$

具初值

$$V(x, 0) = V_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.27)$$

其中  $V = (\varphi, \mathbf{E}), L(u)V = (L_1, L_2)$ ,

$$\begin{aligned} L_1 = & ik(\nabla \cdot \mathbf{A})\varphi - ik(\nabla \cdot \mathbf{E})\psi + \frac{1}{\eta} [D_A^2 \varphi - \frac{i}{k} \nabla(\mathbf{E}\psi) \\ & + \frac{i}{k} \mathbf{E} \cdot \nabla \psi + 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{E}\psi - \varphi + |\psi|^2 \varphi + 2\psi^2 \varphi^* + 2|\psi|^2 \varphi], \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$L_2 = \frac{1}{2} [\varphi^* D_A \psi + \psi^* D_A \varphi + \varphi D_A \psi^* + \psi D_A \varphi^* + \mathbf{E} \psi^*]. \quad (2.29)$$

容易看到, 当  $V_0(x) \in \mathcal{H}^1 \times H^1$  时, 存在问题(2.26)的惟一整体解, 使得

$$V(x, t) \in L^\infty([0, \infty); \mathcal{H}^1 \times H^1) \cap L^\infty((0, \infty); \mathcal{H}^2 \times H^2).$$

以  $V_i(t)$  表示(2.26)具初值  $V_i(0) = \xi_i (i=1, 2, \dots, N)$  的解,  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N \in L^2$  为线性无关,  $Q_N(t)$  表示由  $L^2$  到  $V_1(t), V_2(t), \dots, V_N(t)$  所张成的子空间上的正交投影, 令

$$q_N = \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{u_0 \in \mathcal{A}} \left( \sup_{\substack{\xi_i \in L^2 \\ |\xi_i| = 1}} \frac{1}{t} \int_0^t \text{Tr}(L(u(s))Q_N(s)) ds \right),$$

其中  $\text{Tr}$  表示算子的迹, 为了估计整体吸引子  $\mathcal{A}$  的维数, 我们需要如下引理

**引理 2.2** <sup>[14]</sup> 设  $\mathcal{A}$  为问题(2.7), (2.8)的整体吸引子,  $q_N > 0$  (对某个  $N$ ), 则  $\mathcal{A}$  的 Hausdorff 维数

$$d_H(\mathcal{A}) \leq N,$$

$\mathcal{A}$  的分形维数

$$d_F(\mathcal{A}) \leq N \left( 1 + \max_{1 \leq j \leq N} - \left( \frac{q_j}{q_N} \right) \right).$$

**引理 2.3**<sup>[14]</sup> (广义 Sobolev-Leib-Thirring 不等式) 设  $\Phi_j (1 \leq j \leq N) \in H^m(\Omega)$ , 在  $L^2$  中正交, 对几乎一切  $x \in \Omega$ , 令

$$\rho(x) = \sum_{j=1}^N |\Phi_j(x)|^2,$$

则对任何  $p$

$$1 < p \leq 1 + \frac{1}{2m},$$

存在常数  $K$  使得

$$\left( \int \rho(x)^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{2m(p-1)} \leq K \sum_{j=1}^N \int |D^m \Phi_j|^2 dx,$$

其中常数  $K$  依赖于  $m$  和  $p$ , 但不依赖于  $\Phi_j$  和  $N$ .

现估计  $\text{Tr}(L(u)Q_N(t))$ , 设  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N \in \mathcal{H}^2 \times H^2$  为  $\{V_1(t), V_2(t), \dots, V_N(t)\} \subset \mathcal{H}^2 \times H^2$  子空间的标准正交基, 则有

$$\begin{aligned} \text{Tr}(L(u)Q_N(t)) &= \sum_{j=1}^N (L(u(t))\varphi_j, \varphi_j) \\ &\geq \sum_{j=1}^N \left( \frac{1}{\eta k^2} \|\nabla \varphi_j\|^2 + \|\nabla \cdot \mathbf{E}_j\|^2 + \|\nabla \times \mathbf{E}_j\|^2 \right. \\ &\quad - k \|\nabla \mathbf{E}_j\| \|\varphi_j\| - \left( 2k + \frac{1}{k\eta} \right) \|\mathbf{A}\|_\infty \|\varphi_j\| \|\nabla \varphi_j\| \\ &\quad - \frac{1}{k\eta} \|\mathbf{E}_j\| \|\nabla \varphi_j\| - \frac{1}{k\eta} \|\mathbf{A}\|_\infty \|\nabla \varphi_j\| \|\varphi_j\| \\ &\quad - \frac{1}{k\eta} \|\mathbf{E}_j\| \|\nabla \varphi_j\|_4 \|\varphi_j\|_4 - \frac{2}{\eta} \|\mathbf{A}\|_\infty \|\nabla \varphi_j\| \|\varphi_j\| \\ &\quad - \frac{1}{\eta} \|\mathbf{A}\|_\infty^2 \|\varphi_j\|^2 + \frac{5}{\eta} \|\varphi_j\|^2 \\ &\quad - \frac{1}{k} \|\nabla \varphi\|_4 \|\varphi_j\|_4 \|\mathbf{E}_j\| - \frac{1}{k} \|\nabla \varphi_j\| \|\mathbf{E}_j\| \\ &\quad \left. - 2 \|\varphi_j\|_4 \|\mathbf{A}\|_4 \|\mathbf{E}_j\| - 2 \|\varphi_j\| \|\mathbf{A}\|_\infty \|\mathbf{E}_j\| \right) \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left( \frac{1}{\eta k^2} \|\nabla \varphi_j\|^2 + \|\nabla \cdot \mathbf{E}_j\|^2 + \|\nabla \times \mathbf{E}_j\|^2 \right) \\ &\quad - C \left( \sum_{j=1}^N \left( \frac{1}{\eta k^2} \|\varphi_j\|^2 + \|\mathbf{E}_j\|^2 \right) \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{令 } \rho(x) &= \sum_{j=1}^N \left( \frac{1}{\eta k^2} \|\Phi_j\|^2 + \|E_j\|^2 \right), \text{ 由引理 2.3, } N=3, \text{ 有} \\ \int \rho(x)^{\frac{3}{5}} dx &\leq k_1 \left\{ \sum_{j=1}^N \left( \frac{1}{\eta k^2} \|\nabla \Phi_j\|^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \|\nabla \cdot E_j\|^2 + \|\nabla \times E_j\|^2 \right) \right\}, \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} &\text{Tr}(u(t)Q_N(t)) \\ &\geq \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^N \left( \frac{1}{\eta k^2} \|\nabla \varphi_j\|^2 + \|\nabla \cdot E_j\|^2 + \|\nabla \times E_j\|^2 \right) \right. \\ &\quad \left. - C \int \rho(x) dx \right) \\ &\geq \frac{1}{4} \sum_{j=1}^N \left( \frac{1}{\eta k^2} \|\nabla \varphi_j\|^2 + \|\nabla \cdot E_j\|^2 + \|\nabla \times E_j\|^2 \right) \\ &\quad - C(\eta, k, A_1, A_2, A_3) \\ &= \sum_{j=1}^N \left[ \frac{1}{\eta k^2} (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_N) + \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_N \right] \\ &\quad - C(\eta, k, A_1, A_2, A_3), \end{aligned}$$

其中  $\lambda_i, \mu_i (i=1, 2, \dots, N)$  分别表示算子  $\Delta$  在  $\mathcal{H}$  和  $H_n^1$  中的特征值, 选取  $N_0$  充分大, 使得

$$\begin{aligned} &\text{Tr}(L(u)Q_N(t)) \\ &\geq \sum_{j=1}^N \left[ \frac{1}{\eta k^2} (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_N) + \mu_1 + \cdots + \mu_N \right] \\ &\quad - C(\eta, k, A_1, A_2, A_3) \geq 0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

由[14]有关定理知, 它的 Hausdorff 维数, 分形维数有界于

$$d_H(\omega(B)) \leq N_0, \quad d_F(\omega(B)) \leq 2N_0. \quad (2.31)$$

定理证毕.

### § 3 双曲型 Ginzburg-Landau 方程

考虑双曲型 Ginzburg-Landau 方程也称为 Maxwell-Higgs 方

程组的 Cauchy 问题,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -j^\nu, \quad (3.1)$$

$$D_\mu D^\mu \varphi - \frac{\lambda}{2} (|\varphi|^2 - 1) \varphi = 0, \quad (3.2)$$

其中变元  $t$  为  $x^0$ , 空间变元为  $x_j, j=1, 2, 3, \partial^\mu = \partial_{x_\mu}, x^\mu$  为在 Minkowski 空间  $(-1, g_{\mu\nu})$  的坐标;  $\mu, \nu=0, 1, 2, 3; i, j=1, 2, 3, (g_{\mu\nu}) = \text{diag}(-1, 1, 1, 1), x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu, F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, j^\nu = \text{Im}(\varphi \overline{D^\nu \varphi}), D_\mu = \partial_\mu + \sqrt{-1} A_\mu$  为对任何空间, 时间变元的协变导数,  $A_\mu$  为电磁场势,  $\varphi$  为复值函数, 为 Higgs 场的序参量,  $\chi$  为 Ginzburg-Landau 常数, 为简单计设  $\lambda=1$ .

我们分解电磁场  $F_{\mu\nu}$  为它的电场、磁场分量;

$$E_i = F_{0i}, H_i = {}^* F_{0i} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F^{jk},$$

其中  ${}^* F$  为  $F$  的 Hodge 对偶,  ${}^* F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$ .

给定函数  $\varphi(x, t)$ , 定义它的空间梯度  $\nabla \varphi = (\partial_i \varphi)_{i=1,2,3}, \partial \varphi = (\partial_0 \varphi, \nabla \varphi)$  为全时空梯率, 以  $\square$  表示 D'Alembert 算子,

$$\square = -\partial_t^2 + \Delta = -\partial_t^2 + \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2.$$

容易看到, 系统(3.1), (3.2)具有总能量守恒,

$$\epsilon(t) = \epsilon(0),$$

其中

$$\epsilon(t) = \frac{1}{2} \int_{R^3} (E^2 + H^2 + |D_0 \varphi|^2 + \sum_i |D_i \varphi|^2 + \frac{1}{4} (|\varphi|^2 - 1)^2) dx.$$

Ginzburg-Landau 方程是规范不变的, 对于适当光滑函数  $\chi$ , 定义

$$\phi = \varphi e^{\sqrt{-1}\chi}, B_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi.$$

易知, 若  $(\varphi, A)$  为方程组(3.1), (3.2)的解, 则  $(\phi, B)$  也是. 为使定解问题适定, 我们必须增加规范条件

(i) 库仑规范形

$$\nabla^i A_i = 0. \quad (3.3)$$

(ii) 瞬时规范形

$$A_0 = 0. \quad (3.4)$$

事实上,如果在库仑规范下,有限能量的解存在,则在适当的规范变换下,我们可以得到瞬时规范下同样的结果.因此,我们仅需考虑库仑规范(3.3),由此和[15]的结果,我们得到方程(3.1), (3.2), (3.3) Cauchy 问题的局部性古典解的存在性.

在[15]中, Eardley 和 Moncrief 得到了 Yang-Mills-Miggs 方程具瞬时规范下整体光滑解的存在性. 这里我们利用 Klainerman 等的方程得到方程(3.1), (3.2)和(3.3)(或(3.4), 有限能量解的整体解的存在性.

在库仑规范下, 方程组(3.1) — (3.3)能写成如下形式:

$$\square A_i = -P \operatorname{Im}(\varphi \bar{D}_i \varphi), \quad (3.5)$$

$$D^\mu D_\mu \varphi - \frac{1}{2}(|\varphi|^2 - 1)\varphi = 0, \quad (3.6)$$

$$\Delta A_0 = -\operatorname{Im}(\varphi \cdot \bar{D}_0 \varphi), \quad (3.7)$$

其中  $P$  表示在散度场上的投影算子, 即对任何场  $B$ ,

$$PB = (-\Delta)^{-1}(\nabla \times (\nabla \times B)).$$

由  $\nabla \partial^0 A_0 = 0$ , 方程(3.1)可写(3.5).

考虑初始条件

$$A(0, x) = a_{(0)}(x), \partial_t A(0, x) = a_{(1)}(x), \quad (3.8)$$

$$\varphi(0, x) = \varphi_{(0)}(x), \partial_t \varphi(0, x) = \varphi_{(1)}(x). \quad (3.9)$$

$$\operatorname{div} a_{(0)}(x) = \operatorname{div} a_{(1)}(x) = 0. \quad (3.10)$$

注意到由方程(3.6)推出

$$\partial^\mu \operatorname{Im}(\varphi \cdot \bar{D}_\mu \varphi) = 0. \quad (3.11)$$

事实上

$$\begin{aligned} \partial^\mu \operatorname{Im}(\varphi \bar{D}_\mu \varphi) &= \operatorname{Im}(\partial_\mu \varphi \bar{D}_\mu \varphi + \varphi \overline{\partial^\mu D_\mu \varphi}) \\ &= \operatorname{Im}(\partial^\mu \varphi \bar{D}_\mu \varphi + \overline{\varphi(-\sqrt{-1} A_\mu D_\mu \varphi)}) \\ &= \operatorname{Im}(\partial^\mu \varphi \bar{D}_\mu \varphi + \sqrt{-1} A^\mu \varphi \bar{D}_\mu \varphi) = 0. \end{aligned}$$

由(3.11)可得

$$\square \partial^i A_i = 0. \quad (3.12)$$

由方程(3.12),如初值  $a_{(0)}$  和  $a_{(1)}$  为散度自由形式,则方程(3.3)对一切时间  $t$  自动满足.

引入能量模

$$\mathcal{F}(A, \varphi)(t) = \|\partial A\|_{L^2}^2 + \|\varphi\|_{L^2}^2 + \|\partial \varphi\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4} \int (|\varphi|^2 - 1)^2 dx.$$

可得如下结果:

**定理 3.1** 考虑一般初值  $a_{(0)}, a_{(1)}, \varphi_{(0)}$  和  $\varphi_{(1)}$  在方程(3.8)–(3.10)中,使得

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0 = & \|\nabla a_{(0)}\|_{L^2}^2 + \|a_{(1)}\|_{L^2}^2 + \|\nabla \varphi_{(0)}\|_{L^2}^2 + \|\varphi_{(1)}\|_{L^2}^2 \\ & + \|\varphi_{(0)}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4} \int (|\varphi_{(0)}|^2 - 1) dx \end{aligned}$$

为有限,则存在方程(3.5)–(3.7)的唯一广义解,

$$\begin{aligned} \varphi \in & C((0, T]; H^1) \cap C^1([0, T]; L^2), \quad A_\alpha \in ([0, T]; \dot{H}^1), \\ \partial_\alpha A_\alpha \in & C([0, T]; L^2), \end{aligned}$$

其中  $\dot{H}^1$  表示齐次 Sobolev 空间,且满足能量不等式

$$\epsilon(A_0, A, \varphi) \leq \mathcal{F}_0.$$

进一步,我们有

$$(i) \mathcal{F}(A, \varphi)(t) \leq C(1+t)\mathcal{F}_0, \text{ 对任何有限区间, } t \in [0, T];$$

$$(ii) \int_0^T (\|\square A(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + \|\square \varphi(t, \cdot)\|_{L^2}^2) dt < \infty;$$

(iii) 如初值具有更高的正则性,  $\nabla a_{(0)} \in H^s(\mathbb{R}^3)$ ,  $a_{(1)} \in H^s(\mathbb{R}^3)$ ,  $\varphi_{(0)} \in H^{s+1}(\mathbb{R}^3)$ ,  $\varphi_{(1)} \in H^s(\mathbb{R}^3)$ ,  $s$  为正整数,  $s > 0$ , 则对任何  $t > 0$ , 有  $A_0(t, \cdot), A(x, t) \in H^{s+1}(\mathbb{R}^3)$ ,  $\partial_t A_0(t, \cdot),$

$$\partial_t A(t, \cdot) \in H^s(\mathbb{R}^3), \varphi(t, \cdot) \in H^{s+1}(\mathbb{R}^3), \partial_t \varphi(t, \cdot) \in H^s(\mathbb{R}^3).$$

我们这里仅给出这个定理证明的步骤,首先,给出方程(3.5)–(3.7)Cauchy 问题局部古典解的存在性.

**命题 3.2** 对任何非负  $s$ , 令

$$\mathcal{G}_0^s = \|\nabla a_{(0)}\|_{H^s(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla a_{(1)}\|_{H^s(\mathbb{R}^3)} + \|\varphi_{(0)}\|_{H^{s+1}(\mathbb{R}^3)}$$

$$+ \|\varphi_{(1)}\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} + \frac{1}{4} \int (|\varphi_{(0)}|^2 - 1)^2 dx,$$

则存在  $T_0 > 0$ , 仅依赖于  $g_0^s$ , 和方程(3.5)–(3.10)在  $[0, T_0] \times \mathbb{R}^3$  上的惟一古典解使得如  $g_0^s < \infty, s \geq 1$ , 则

$$\nabla A_0(t, \cdot), \nabla A(t, \cdot) \in H^s(\mathbb{R}^3),$$

$$\partial_t A_0(t, \cdot), \partial_t A(t, \cdot) \in H^s(\mathbb{R}^3),$$

$$\varphi(t, \cdot) \in H^{s+1}(\mathbb{R}^3), \partial_t \varphi(t, \cdot) \in H^s(\mathbb{R}^3),$$

对  $t \in [0, T_0]$  一致成立. 更进一步, 如  $f'(t)$  为一致有界时, 能延拓解至任何区间  $[0, T] (T > T_0)$ . 特别,  $f'(t)$  在任何有限区间  $[0, T)$  是一致有界的, 则解是整体的.

先验估计

(i) 设  $A_0, A, \varphi$  为方程组(3.5)–(3.10)的古典解,  $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}(0) < \infty$ ,  $\varepsilon(t) = \varepsilon(0) \leq \mathcal{F}_0$ , 由 Sobolev 不等式和某些基本不等式, 我们有

$$\mathcal{F}(t) \leq C(l + t),$$

其中  $C$  仅依赖于  $\mathcal{F}_0$

由基本的位势估计和方程(5.11)可得

(ii) 设  $\omega_0$  为方程(3.7)的解, 设  $A, \varphi$  满足

$\mathcal{F}(A, \varphi)(t) < \infty$ , 则有

$$(a) \|\nabla A_0(t, \cdot)\|_{L^2} + \|A_0 \varphi(t, \cdot)\|_{L^2} \leq C \mathcal{F}(t),$$

$$(b) \|\nabla A_0(t, \cdot)\|_{L^3} + \|\partial_t A_0(t, \cdot)\|_{L^3} \leq C(1 + \mathcal{F}(t))^3,$$

$$(c) \|A_0(t, \cdot)\|_{L^\infty} \leq C \mathcal{F}(t)(1 + \|\varphi(t, \cdot)\|_{L^8})$$

其中  $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(A, \varphi)(t)$ . 类似有

(iii) 设  $A_0, A, \varphi$  和  $A'_0, A', \varphi'$  为方程组(3.5)–(3.10)满足假设  $\mathcal{F}(t), \mathcal{F}'(t) = \mathcal{F}(A', \varphi')(t) < \infty, t \in [0, T]$  的两个解,

则存在常数  $C$ , 仅依赖于  $\mathcal{F}(t)$  和  $\mathcal{F}'(t)$  使得

$$(a) \|\nabla(A_0 - A'_0)(t, \cdot)\|_{L^2} + \|(A_0 \varphi - A'_0 \varphi')(t, \cdot)\|_{L^2} \leq C \mathcal{F}(A - A', \varphi - \varphi')(t),$$

$$(b) \|\nabla(A_0 - A'_0)(t, \cdot)\|_{L^3} + \|\partial_t(A_0 - A'_0)(t, \cdot)\|_{L^3} \leq C \mathcal{F}(A - A'; \varphi - \varphi')(t),$$

$$(c) \|(A - A'_0)(t, \cdot)\|_{L^\infty} \leq C \mathcal{F}(A - A', \varphi - \varphi')(t)$$

$$\cdot (1 + \|\varphi\|_{L^8}) + C \|(\varphi - \varphi')(t, \cdot)\|_{L^8}.$$

由能量估计和[16]中的零形式估计有

(iv) 设  $(A_0, A, \varphi)$  为方程组 (3.5) — (3.10) 在  $[0, T^*] \times \mathbb{R}^3$  是  $\bar{\mathcal{F}}_0$  有限的解且满足定理 3.1 的 (i), (ii).

(a) 存在  $0 < T \leq T^*$ , 仅依赖于  $\bar{\mathcal{F}}_0$  使得

$$X(T) = \int_0^T (\|\square A(t, \cdot)\|_{L^2} + \|\square \varphi(t, \cdot)\|_{L^2}) dt \leq 1,$$

(b) 存在常数  $C'$  仅依赖于  $\bar{\mathcal{F}}_0, T^*$ , 使得

$$X(T^*) \leq C'.$$

类似地有

(v) 设  $(A_0, A, \varphi)$  和  $(A'_0, A', \varphi')$  为方程组 (3.5) — (3.10) 满足定理 3.1 在  $[0, T^*]$  上假设的两个解.

(a) 存在  $0 < T < T^*$  和常数  $C$  仅依赖于  $\bar{\mathcal{F}}_0 = \bar{\mathcal{F}}_0(A, \varphi), \bar{\mathcal{F}}'_0 = \bar{\mathcal{F}}_0(A', \varphi'), X'(T^*) = \int_0^{T^*} (\|\square A'(t, \cdot)\|_{L^2} + \|\square \varphi'(t, \cdot)\|_{L^2}) dt,$

$$\begin{aligned} \Delta(T) &= \int_0^T \|\square(A - A')(t, \cdot)\|_{L^2} dt \\ &\quad + \int_0^T \|(\varphi - \varphi')(t, e)\|_{L^2} dt \\ &\leq C \bar{\mathcal{F}}(A - A', \varphi - \varphi')(0). \end{aligned}$$

(b) 存在常数  $C'$ , 仅依赖于  $T^*, \bar{\mathcal{F}}_0, \bar{\mathcal{F}}'_0, X(T^*), X'(T^*)$ , 使得

$$\Delta(T) \leq C' \bar{\mathcal{F}}(A - A', \varphi - \varphi')(0),$$

其中对于波动方程的 Strichartz 不等式已用.  $\frac{1}{2}(|\varphi|^2 - 1)\varphi$  能被估计如下:

$$\int_0^T \|\varphi\|_6^3 dt \leq T(\bar{\mathcal{F}}_0 + X(T))^3 \text{ (由能量估计),}$$

$$\int_0^T \|\varphi\|_{L^2} dt \leq \int_0^T (1+t) \bar{\mathcal{F}}_0 dt \leq CT \left(1 + \frac{T}{2}\right) \bar{\mathcal{F}}_0.$$

(vi) 以上估计应用于导数的有限差分近似可得

$$\mathcal{F}^{(1)}(t) = \|\partial A(t, \cdot)\|_{H^1} + \|\varphi(t, \cdot)\|_{H^1}$$



$$+ \frac{1}{4} \int (|\phi|^2 - 1)^2 dx,$$

在  $[0, T^*]$  一致有界.

由这些估计, 可得方程组 (3.5) — (3.10) 整体古典解的存在性.

最后, 由 (iii) 和 (v) 可得到有限能量解的惟一性. 由逼近方法和上述估计, 可得有限能量解的整体存在性.

## § 4 Maxwell-Higgs 方程组关于对称涡度的不稳定性

考虑 Maxwell-Higgs 方程

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = -j_\nu, \quad (4.1)$$

$$D_\mu D^\mu \phi + \frac{\lambda}{2} (|\phi|^2 - 1)\phi = 0, \quad (4.2)$$

其中,  $D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu$ ,  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2$ ,  $A_\mu(x)$  为电磁场势,  $\phi(x)$  为 Higgs 场,  $F_{0j}$ ,  $j = 1, 2$ , 为电场,  $-F_{12}$  为磁场,  $\partial_\mu = \partial_{x^\mu}$ ,

$$j_\mu = \text{Im}(\phi \overline{D_\nu \phi}) = -\frac{i}{2} (\phi \overline{D_\nu \phi} - \overline{\phi} D_\nu \phi), \mu = 0, 1, 2, \quad (4.3)$$

能量守恒为

$$\frac{1}{2} \int_R (|F_{\mu\nu}|^2 + |D_\mu \phi|^2 + \frac{\lambda}{4} (|\phi|^2 - 1)^2) dx_1 dx_2.$$

对于定常的 Ginzburg-Landau 方程,

$$\text{Curl}^2 A + \frac{i}{2} [\overline{\phi} D \phi - \phi D \overline{\phi}] = 0, \quad (4.4)$$

$$-D^2 \phi + \frac{\lambda}{2} (|\phi|^2 - 1)\phi = 0, \quad (4.5)$$

存在一个涡旋数如下

$$\frac{1}{2\pi} \int_{R^2} \nabla \times A = \frac{1}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{|x|=N} A dx. \quad (4.6)$$

这个数具有拓扑意义, 为 Higgs 场的“风数”, 为一整数. 数值计算表明, 当  $\lambda \leq 1$  时, 则对一切涡旋数  $n$ , 涡旋是稳定的, 而当  $\lambda > 1$ , 和  $|n| \geq 2$  时, 则是不稳定的. 我们现在给予这个事实以权的证明.

在瞬时规范  $A_0 = 0$  下, Maxwell-Higgs 方程组可写成如下形式:

$$[\partial_{tt} - \Delta]A_\nu - \partial_\mu \partial^\mu A_\mu = \frac{i}{2}(\phi \overline{D_\nu \phi} - \overline{\phi} D_\nu \phi), \quad (4.7)$$

$$[\partial_{tt} - \Delta]\phi - iA_\mu \partial^\mu \phi - i\partial^\mu (A_\mu \phi) - A_\mu A^\mu \phi + \frac{\lambda}{2}(|\phi|^2 - 1)\phi = 0, \quad (4.8)$$

其中  $\nu, \mu = 0, 1, 2, A_\mu A^\mu = A_0^2, \mu = 0; A_\mu A^\mu = -A_\mu^2, \mu \neq 0$ , 我们还可将 (4.7), (4.8) 写成如下具体形式:

$$\partial_t(\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2) = \frac{i}{2}(\phi \overline{\partial_t \phi} - \overline{\phi} \partial_t \phi), \quad (4.9)$$

$$\partial_{tt}(A_k) = \Delta A_k - \partial_k(\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2) + \frac{i}{2}(\phi \overline{D_k \phi} - \overline{\phi} D_k \phi), \quad (4.10)$$

$$\partial_{tt}\phi = \Delta\phi - iA_j \partial_j \phi - i\partial_j(A_j \phi) - A_j^2 \phi - \frac{\lambda}{2}(|\phi|^2 - 1)\phi, \quad (4.11)$$

$k = 1, 2, j$  从 1 到 2.

现对给定的轴对称涡度  $(a, \eta)$  和瞬时规范  $A_0 = 0$  下对 Maxwell-Higgs 方程组作线性化, 令  $A = a + \epsilon w, \phi = \eta + \epsilon \psi$  代入 (4.9), (4.10), (4.11). 再对  $\epsilon$  作导数, 取  $\epsilon = 0$  可得线性化 Maxwell-Higgs 方程组如下:

$$\partial_t(\partial_1 w_1 + \partial_2 w_2) = \frac{i}{2}\partial_t(\eta \bar{\psi} - \bar{\eta} \psi) = \partial_t(\eta_1 \psi_2 - \eta_2 \psi_1), \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \partial_{tt} w_k &= \Delta w_k - \partial_k(\partial_1 w_1 + \partial_2 w_2) + \frac{i}{2}(\eta \partial_k \bar{\psi} + \psi \partial_k \bar{\eta} - \bar{\eta} \partial_k \psi \\ &\quad - \bar{\psi} \partial_k \eta) - a_k(\eta \bar{\psi} + \bar{\eta} \psi) - |\eta|^2 w_k, \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \partial_{tt}\psi &= \Delta\psi - ia_j \partial_j \psi - iw_j \partial_j \eta - i\partial_j(a_j \psi) - i\partial_j(w_j \eta) \\ &\quad - |a|^2 \psi - 2(a_1 w_1 + a_2 w_2) \eta - \frac{\lambda}{2} \psi(|\eta|^2 - 1) \\ &\quad - \frac{\lambda}{2} \eta(\bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta). \end{aligned} \quad (4.14)$$

注意到  $(a, \eta)$  与时间  $t$  无关, 令  $\psi_1 = \text{Re}\psi, \psi_2 = \text{Im}\psi, \nu = (w_1, w_2, \psi_1, \psi_2)^T$ , 则线性化方程组 (4.13), (4.14) 可写成

$$\frac{d^2 \nu}{dt^2} = L\nu = -\epsilon''|_{(a, \eta)} \nu. \quad (4.15)$$

线性算子  $L$  具有形式

$$\begin{pmatrix} \partial_{22} - |\eta|^2 & -\partial_{12} & g_{13} - \eta_2 \partial_1 & g_{14} + \eta_1 \partial_1 \\ -\partial_{12} & \partial_{11} - |\eta|^2 & g_{23} - \eta_2 \partial_2 & g_{24} + \eta_1 \partial_2 \\ g_{31} + \partial_1(\eta_2 \times & g_{32} + \partial_2(\eta_2 \times & \Delta + g_{33} & 2a_j \partial_j - \lambda \eta_2 \eta_1 \\ g_{41} - \partial_1(\eta_1 \times & g_{42} - \partial_2(\eta_1 \times & -2a_j \partial_j - \lambda \eta_2 \eta_1 & \Delta + g_{44} \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

这里

$$g_{13} = g_{31} = \partial_1 \eta_2 - 2a_1 \eta_1, \quad g_{14} = g_{41} = -\partial_1 \eta_1 - 2a_1 \eta_2,$$

$$g_{23} = g_{32} = \partial_2 \eta_2 - 2a_2 \eta_1, \quad g_{24} = g_{42} = -\partial_2 \eta_1 - 2a_2 \eta_2,$$

$$g_{33} = -\frac{\lambda}{2}(2(\eta_1)^2 + |\eta|^2 - 1) - |a|^2,$$

$$g_{44} = -\frac{\lambda}{2}(2|\eta_2|^2 + |\eta|^2 - 1) - |a|^2.$$

算子  $\partial_l \eta_j \times$  作用于函数  $f$  为  $\partial_l(\eta_j f)$ ,  $l=1,2, j=1,2$ ,

$$\epsilon = \int_{\mathbb{R}^3} \left( \frac{1}{2} |\nabla \times A|^2 + \frac{1}{2} |D\phi|^2 + \frac{\lambda}{8} (|\phi|^2 - 1)^2 \right)$$

为 Helmholtz 自由能.

为了得到整个线性化 Maxwell-Higgs 方程组(4.12), (4.13), (4.14)的增长模, 充分研究限制问题(1.13), (4.4)而没有约束方程(4.12), 这是由于出自如下的考虑.

定义线性算子  $\Theta$

$$\Theta f = \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 - \eta_1 f_4 + \eta_2 f_3, \quad (4.17)$$

$f = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2), f_3(x_1, x_2), f_4(x_1, x_2))$  为任何向量值函数.

**引理 4.1** 设  $L\nu = (l_1(\nu), l_2(\nu), l_3(\nu), l_4(\nu))^T$  于(4.16)中, 则有

$$\Theta L(\nu) = \partial_1 l_1 + \partial_2 l_2 - \eta_1 l_4 + \eta_2 l_3 = 0. \quad (4.18)$$

进一步, 如  $\nu_0$  为线性化算子  $L$  对应于特征值  $\omega^2$  的特征向量( $\omega > 0$ ),

$$L\nu_0 = \omega^2 \nu_0, \quad (4.19)$$

则  $\nu_0 e^{\pm i\omega t}$  为整个线性化 Maxwell-Higgs 方程组(4.12), (4.13), (4.14)的一个解.

证 首先注意到如下等式:

$$\begin{aligned}
 & \partial_k [\Delta A_k - \partial_k (\partial_j A_j) + \frac{i}{2} (\phi \overline{D_k \phi} - \overline{\phi} D_k \phi)] \\
 &= \frac{i}{2} (\partial_k \phi \overline{\partial_k \phi} + \phi \partial_k \overline{\partial_k \phi} - \partial_k \overline{\phi} D_k \phi - \overline{\phi} D_k D_k \phi) \\
 &= \frac{i}{2} (D_k \phi \overline{D_k \phi} + \phi \overline{D_k D_k \phi} - \overline{D_k \phi} D_k \phi - \overline{\phi} D_k D_k \phi) \\
 &= \frac{i}{2} (\phi \overline{D_k D_k \phi} - \overline{\phi} D_k D_k \phi) \\
 &= \frac{i}{2} \left\{ \phi [D_k D_k \phi - \frac{\lambda}{2} (|\phi|^2 - 1) |\phi|] - \overline{\phi} [D_k D_k \phi - \frac{\lambda}{2} (|\phi|^2 - 1) \phi] \right\},
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

其中我们用到了协变导数的定义  $D_k = \partial_k - iA_{k_0}$ , 令  $A = a + \varepsilon w$ ,  $\phi = \eta + \varepsilon \psi$  代入(4.20)的两边, 对  $\varepsilon$  微分并取值  $\varepsilon = 0$  得

$$\begin{aligned}
 \partial_k I_k(\nu) &= \frac{i}{2} [\eta (l_3(0) - il_4(0)) - \overline{\eta} (l_3(0) + il_4(0))] \\
 &\quad + \frac{i}{2} \overline{\psi [D_k D_k \eta - \frac{\lambda}{2} \eta (|\eta|^2 - 1)]} \\
 &\quad - \frac{i}{2} \overline{\psi [D_k D_k \eta - \frac{\lambda}{2} \eta (|\eta|^2 - 1)]},
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

其中我们利用了  $L(\nu)$  为  $\varepsilon'$  的线性化算子这一事实, 从定常 Maxwell-Higgs 方程组  $D_j D_j \eta - \frac{\lambda}{2} \eta (|\eta|^2 - 1) = 0$ , 去掉(4.21)最后一行, 可得

$$\partial_k I_k(\nu) = \eta_1 l_4(\nu) - \eta_2 l_3(\nu), \tag{4.22}$$

其中  $k$  从 1 到 2, 因此(4.18)成立.

如  $L\nu_0 = \omega^2 \nu_0$ ,  $\omega > 0$ , 我们有

$$\begin{aligned}
 l_1(\nu_0) &= \omega_0^2 w_0^1, l_2(\nu_0) = \omega^2 w_0^2, \\
 l_3(\nu_0) &= \omega^2 \phi_0^1, l_4(\nu_0) = \omega^2 \phi_0^2,
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

其中  $\nu_0 = (w_0^1, w_0^2, \phi_0^1, \phi_0^2)^T$ , 因此  $\nu_0$  满足

$$\partial_1 w_0^1 + \partial_2 w_0^2 = \eta_1 \phi_0^2 - \eta_2 \phi_0^1. \tag{4.24}$$

因此  $\nu_0 e^{\pm \omega x}$  自动满足附加方程(4.12), 由此推出  $\nu_0 e^{\omega x}$  为整个线性化 Maxwell-Higgs 方程组(4.12), (4.13), (4.14)的增长模.

现集中研究算子  $L$  的特征值问题. 定义在给定涡度  $(a, \eta)$  线性化能量泛函

$$\langle \xi''(\nu), \nu \rangle = \langle \xi''|_{(a, \eta)}(\nu), \nu \rangle = -L \langle \nu, \nu \rangle. \quad (4.25)$$

为简单计, 我们忽略对涡度  $(a, \eta)$  的依赖性, 我们期望得到  $L$  的一对特征值和特征向量, 它为泛函  $\langle \xi''(\nu), \nu \rangle$  的极小, 这不是显然的, 因为我们仅对  $\nabla \times w$  在极小化序列中能进行控制.

定义正则化泛函

$$\langle \xi_\epsilon''(\nu), \nu \rangle = \epsilon \|\nabla w\|_2^2 + \langle \xi''(\nu), \nu \rangle = -\langle L_\epsilon \nu, \nu \rangle \quad (4.26)$$

其中  $L_\epsilon = L + (\epsilon \Delta w, 0)^T$ , 我们先寻找一对  $\xi_\epsilon''$  的特征值和特征向量作为它的极小, 然后再得到原来算子  $L$  的特征向量  $\epsilon \rightarrow 0$ .

**引理 4.2** 设存在  $\nu_1 \in H^1(\mathbb{R}^2)$  使得  $\langle \xi''(\nu_1), \nu_1 \rangle < 0$ , 则存在  $\nu_\epsilon = (w_\epsilon, \psi_\epsilon)^T \in H^1(\mathbb{R}^2)$  使得对一切  $\epsilon > 0$  充分小,

$$\langle \xi''(\nu_\epsilon), \nu_\epsilon \rangle = \min_{\|\omega\|=1} \langle \xi_\epsilon''(\nu), \nu \rangle = -\omega_\epsilon^2 < 0. \quad (4.27)$$

更进一步,  $\nu_\epsilon$  为算子  $L_\epsilon$  对应于特征值  $\omega_\epsilon^2$  的特征向量,

$$L_\epsilon \nu_\epsilon = \omega_\epsilon^2 \nu_\epsilon, \quad (4.28)$$

$$\|\nu_\epsilon\|_{H^1} \leq C, \quad -\frac{1}{2} \langle \xi''(\nu_1), \nu_1 \rangle \leq \omega_\epsilon^2 \leq C, \quad (4.29)$$

对小的  $\epsilon$  一致成立.

**证** 第一步, 证明(4.27)和(4.28).

为了证明(4.27), 我们分析算子  $L$  的谱, 首先证明当  $\|\nu\|_2 = 1$  时,  $\langle \xi''(\nu), \nu \rangle$  具有下界.

$$\begin{aligned} \langle \xi''(\nu), \nu \rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} [(\partial_1 w_2 - \partial_2 w_1)^2 + |\eta| |w|^2 + |\nabla \psi|^2 \\ &\quad + \left( |a|^2 + \frac{\lambda}{2} (|\eta|^2 - 1) \right) |\psi|^2] + 2 \int_{\mathbb{R}^2} \left[ \frac{\lambda}{2} (\eta_1 \psi_1 + \eta_2 \psi_2)^2 \right. \\ &\quad \left. + \eta_2 \partial_1 \psi_1 w_1 + \eta_2 \partial_2 \psi_1 w_2 - \eta_1 \partial_1 \psi_2 w_1 - \eta_1 \partial_2 \psi_2 w_2 \right] \\ &\quad - 2 \int_{\mathbb{R}^2} [g_{13} \psi_1 w_1 + g_{14} \psi_2 w_1 + g_{23} \psi_1 w_2 + g_{24} \psi_2 w_2], \end{aligned}$$

其中  $g_{il}$  在(4.16)中,  $1 \leq l \leq 2, 1 \leq j \leq 2$ , 如  $\|\nu\|_2 = 1$ , 则有

$$\langle \xi''(\nu), \nu \rangle \geq \int_{R^2} [(\partial_1 w_2 - \partial_2 w_1)^2 + |\eta|^2 |w|^2 + \frac{1}{2} |\nabla \psi|^2] dx_1 dx_2 - C, \quad (4.30)$$

其中常数  $C$  依赖于  $\lambda$  和  $\|a\|_{C^1} + \|\eta\|_{C^1}$ . 因此对任何  $\varepsilon > 0$ ,  $\|\nu\|_2 = 1$ , 有

$$\langle \xi''_\varepsilon(\nu), \nu \rangle \geq \langle \xi''(\nu), \nu \rangle - C. \quad (4.31)$$

为了研究它的谱, 分解算子  $-L_2 = I_\varepsilon + K$  如下,

$$I_\varepsilon = - \begin{pmatrix} \varepsilon \Delta + \partial_{22} - |\eta|^2 & -\partial_{12} & -\eta_2 \partial_1 & \eta_1 \partial_1 \\ -\partial_{12} & \varepsilon \Delta + \partial_{11} - |\eta|^2 & -\eta_2 \partial_2 & \eta_1 \partial_2 \\ \partial_1(\eta_2 \times & \partial_2(\eta_2 \times & \Delta - \lambda |\eta_1|^2 & -\lambda \eta_1 \eta_2 \\ \partial_1(\eta_1 \times & -\partial_2(\eta_1 \times & -\lambda \eta_1 \eta_2 & \Delta - \lambda |\eta_2|^2 \end{pmatrix}, \quad (4.32)$$

$$K = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & g_{13} & g_{14} \\ 0 & 0 & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & -\frac{\lambda}{2}(|\eta|^2 - 1) - |a|^2 & 2a_j \partial_j \\ g_{41} & g_{42} & -2a_j \partial_j & -\frac{\lambda}{2}(|\eta|^2 - 1) - |a|^2 \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

注意到  $(I_\varepsilon \nu, \nu)$  具有形式

$$\begin{aligned} & \int_{R^2} [|\nabla \times w|^2 + \varepsilon |\nabla w|^2 + |\eta|^2 |w|^2 + |\nabla \psi|^2 \\ & \quad + \lambda(\eta_1 \psi + \eta_1 \psi_2)^2 + 2 \int_{R^2} (\eta_2 \partial \psi_1 w_1 - \eta_1 \partial_1 \psi_1 w_1 \\ & \quad + \eta_2 \partial_2 \psi_1 w_2 - \eta_1 \partial_2 \psi w_2) \\ & \geq \int_{R^2} (|\nabla \times w|^2 + \varepsilon |\nabla w|^2) dx_1 dx_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (4.34)$$

我们已用到如下事实

$$\begin{aligned} & |\partial_1 \eta_2 \partial_1 \psi_1 w_1 - \eta_1 \partial_1 \psi_2 w_1 + \eta_2 \partial_2 \psi_1 w_2 - \eta_1 \partial_2 \psi_2 w_2| \\ & \leq |\eta|^2 |w|^2 + |\nabla \psi|^2, \end{aligned} \quad (4.35)$$

因此,  $I_\epsilon$  是正的, 二阶椭圆型算子的谱位于  $[0, \infty)$ , 另一方面, 由涡度的渐近性质[17],

$$|a| \leq C/r, \quad |\nabla \eta| \leq C/r, \quad (4.36)$$

且  $|\eta|^2 - 1 \rightarrow 0$ , (指数),  $r \rightarrow \infty$ , 故在  $K$  中所有系数均趋于零,  $r \rightarrow \infty$ . 因此  $K$  相对于二阶算子  $I_\epsilon$  是相对紧的. 由 Weyl 本质谱定理 ([18] 中系 2, p. 113) 推出  $L_\epsilon = I_\epsilon + K$  的本质谱位于  $[0, \infty)$ . 由我们的假设,  $\langle \xi''_\epsilon(\nu_1), \nu_1 \rangle < 0$ ,  $\epsilon$  充分小, 因此, 由 [18] 中的定理 8.1, 存在  $\omega_\epsilon > 0$ , 使得

$$-\omega_\epsilon^2 = \inf_{\|\nu\|_2=1} \langle \xi''(\nu), \nu \rangle = (-L_\epsilon) \text{ 的最小特征值}, \quad (4.37)$$

由 (4.31)  $\omega_\epsilon^2 \leq C$ , 对  $\epsilon$  一致成立. 方程 (4.28) 成立,  $\nu_\epsilon = (w_\epsilon, \psi_\epsilon)^T$  为相应的特征向量.

第二步, (4.29) 的证明.

因  $\nu_1 \in H^1$  且为固定,  $\epsilon$  很小,

$$\begin{aligned} -\omega_\epsilon^2 &\leq \langle \xi''_\epsilon(\nu_1), \nu_1 \rangle = \langle \xi''(\nu_1), \nu_1 \rangle + \epsilon \|\nabla w\|_2^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \langle \xi''(\nu_1), \nu_1 \rangle. \end{aligned} \quad (4.38)$$

(4.29) 中对  $w_\epsilon$  的估计来自 (4.31) 和 (4.38). 对于  $\nu_\epsilon$  的估计, 我们注意到  $\langle \xi_\epsilon(\nu_\epsilon), \nu_\epsilon \rangle = -\omega_\epsilon^2$ ,  $\|\nu_\epsilon\|_2 = 1$ . 从 (4.30) 和 (4.26) 有

$$\|\nabla \times w_\epsilon\|_2 + \frac{1}{2} \|\nabla \psi_\epsilon\|_2 + \epsilon \|\nabla w_\epsilon\|_2 \leq C, \quad (4.39)$$

为了得到  $\|\nabla \cdot w_\epsilon\|_2$  的估计, 应用在 (4.17) 中的算子于  $L_\epsilon \nu_\epsilon = L\nu_\epsilon + \epsilon(\Delta w_\epsilon, 0)^T = \omega_\epsilon^2 \nu_\epsilon$  的两边, 得到

$$\epsilon(\Delta(\nabla \cdot w_\epsilon)) = \omega_\epsilon^2 [\operatorname{div} w_\epsilon - (\eta_1 \psi_{2\epsilon} - \eta_2 \psi_{1\epsilon})]. \quad (4.40)$$

于此我们用到了引理 4.1. 乘 (4.40) 两边以  $\operatorname{div} w_\epsilon$  再在  $\mathbb{R}^2$  上积分得

$$\begin{aligned} \omega_\epsilon^2 \|\operatorname{div} w_\epsilon\|_2^2 &\leq \omega_\epsilon^2 \|R\|_\infty \|\psi_\epsilon\|_2 \|\operatorname{div} w_\epsilon\|_2 \\ &\quad - \epsilon \|\nabla \operatorname{div} w_\epsilon\|_2^2. \end{aligned} \quad (4.41)$$

注意到  $\|R\|_\infty = \|\eta\|_\infty \leq 1$ , 我们有

$$\|\operatorname{div} w_\epsilon\|_2 \leq \|\psi_\epsilon\|_2 \leq 1. \quad (4.42)$$

联合 (4.42) 和 (4.39) 即得引理 4.2.

现在  $L_\epsilon$  中令  $\epsilon \rightarrow 0$ , 即求得原来问题 (4.25) 的解决,  $\epsilon = 0$ .

**定理 4.3** 设  $\langle \xi''(\nu_1), (\nu_1) \rangle < 0$ , 对某个  $\nu_1 \in H^1(\mathbb{R}^2)$ , 则存在  $\nu_0 = (\omega_0, \phi_0) \in H^1(\mathbb{R}^2)$ ,  $\|\nu_0\|_2 = 1$ , 使得

$$L\nu_0 = \omega^2\nu_0, \quad (4.43)$$

其中  $\omega = \sup_{\epsilon \rightarrow 0} \omega_\epsilon > 0$ , 进一步,  $\nu_0 e^{\omega x}$  为整体线性化 Maxwell-Higgs 方程组(4.12), (4.13), (4.14)的增长模.

**证** 由(4.29)知,  $\|\nu_\epsilon\|_{H^1} \leq C$  对  $\epsilon$  一致成立,  $\omega_\epsilon > 0$  是随  $\epsilon \rightarrow 0$  而单调增加, 选取子序列  $\epsilon_n \rightarrow 0$  使得  $\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{\epsilon_n}$ ,  $\nu_{\epsilon_n} \rightarrow \nu_0 = (\omega_0^1, \omega_0^2, \phi_0^1, \phi_0^2)^T$  在  $H^1(\mathbb{R}^2)$  中弱收敛, 为简单计, 仍以  $\omega^\epsilon, \nu_\epsilon$  表示相应的子序列, 在  $L_\epsilon \nu_\epsilon = \omega^2 \nu_\epsilon$  中, 令  $\omega \rightarrow 0$ , 在分布意义得

$$L\nu_0 = \omega^2\nu_0. \quad (4.44)$$

由(4.29),  $\omega > 0$ .

为证明定理, 充分证明  $\|\nu_0\|_2 = 1$ , 考虑  $\|\nu_\epsilon - \nu_0\|_2$  的极限,  $\omega_\epsilon^2 \nu_\epsilon = L_\epsilon \nu_\epsilon$  减去  $\omega^2 \nu_0 = L\nu_0$  得

$$\omega_\epsilon^2(\nu_\epsilon - \nu_0) + \nu_0(\omega_\epsilon^2 - \omega^2) = \epsilon(\Delta\omega_\epsilon, 0)^T + L(\nu_\epsilon - \nu_0) \quad (4.45)$$

(4.45)两边和  $\nu_\epsilon - \nu_0$  作  $L^2$  内积得

$$\begin{aligned} \omega_\epsilon^2 \|\nu_\epsilon - \nu_0\|_2^2 &\leq (\omega^2 - \omega_\epsilon^2) \|\nu_0\|_2 \|\nu_\epsilon - \nu_0\|_2 \\ &\quad + \epsilon \|\nabla \omega_\epsilon\|_2 \|\nabla(\omega_\epsilon - \omega)\|_2 \\ &\quad + (L(\nu_\epsilon - \nu_0), \nu_\epsilon - \nu_0), \end{aligned} \quad (4.46)$$

注意到  $\|\nu_\epsilon\|_{H^1}$  当  $\epsilon \rightarrow 0$  时为一致有界.

$$\begin{aligned} (\omega_\epsilon^2 - \omega^2) \|\nu_0\|_2 \|\nu_\epsilon - \nu_0\|_2 &\rightarrow 0, \\ \epsilon \|\nabla \omega_\epsilon\|_2 \|\nabla(\omega_\epsilon - \omega)\|_2 &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4.47)$$

现证  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (L(\nu_\epsilon - \nu_0), \nu_\epsilon - \nu_0) \leq 0$ , 在分解(1.32), (1.33)和(1.34)中令  $\epsilon = 0$ , 得

$$\begin{aligned} (L(\nu_\epsilon - \nu_0), \nu_\epsilon - \nu_0) &= -(I_0(\nu_\epsilon - \nu_0), \nu_\epsilon - \nu_0) \\ &\quad - (K(\nu_\epsilon - \nu_0), \nu_\epsilon - \nu_0) \\ &\leq -(K(\nu_\epsilon - \nu_0), \nu_\epsilon - \nu_0). \end{aligned} \quad (4.48)$$

因  $\|\nu_\epsilon\|_{H^1}$  一致有界, 则对任何  $M > 0$ ,

$$-(K(\nu_\epsilon - \nu_0), \nu_\epsilon - \nu_0) = \int_{|x| \leq M} + \int_{|x| > M}$$



$$\leq C(M) \| \nu_\epsilon - \nu_0 \|_{H^1} + \int_{r \leq M} \rightarrow 0$$

其中  $C(M)$  为  $K$  的系数的上界, 当  $M \rightarrow \infty$  时, 它  $\rightarrow 0$ , 因  $\int_{r \leq M} \rightarrow 0$  对任何固定的  $M$ , 由此推出  $\lim(K(\nu_\epsilon - \nu_0), \nu_\epsilon - \nu_0) = 0$ , 先取  $M \rightarrow \infty$ , 再取  $\epsilon \rightarrow 0$ , 因此从(4.48)有

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (L(\nu_\epsilon - \nu_0), \nu_\epsilon - \nu_0) \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} - (K(\nu_\epsilon - \nu_0), \nu_\epsilon - \nu_0) = 0.$$

由(4.29)得  $\omega_\epsilon^2 \geq -\frac{1}{2} \langle \xi''(\nu_1), \nu_1 \rangle$ , 因此从(4.46)和(4.47)得  $\| \nu_\epsilon - \nu_0 \|_2 \rightarrow 0$ .

现证当  $r \rightarrow \infty$  时特征向量  $\nu_0$  的衰减, 由此推出扰动  $\nu_0$  具有零的涡旋数.

**引理 4.4** (特征函数  $\nu_0$  的衰减) 设  $\chi(x_1, x_2)$  为具  $k$  阶多项式的增长形式的光滑函数.

$$\| \partial^j \chi(x_1, x_2) \| \leq C(r^{k-j} + 1), \quad (4.49)$$

其中  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  充分大,  $0 \leq j \leq k \in \mathbb{N}$ , 则

$$\| \chi \nu_0 \|_{H^2} < \infty. \quad (4.50)$$

特别,  $\nu_0$  的涡旋数为零, 即有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{|x| \leq N} \nabla \times w^0 = \frac{1}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{|x| \leq N} w^0 dx = 0. \quad (4.51)$$

**证** 我们用归纳法证明(4.50).

第一步, 如  $k=0$ , 充分证明  $\nu_0 \in H^2$ , 注意到  $\| \eta \|_{C^1} + \| a \|_{C^0} \leq C$ , 从  $L$  的定义有

$$\Delta w_k - \partial_k(\operatorname{div} w) \in L^2, \quad \Delta \psi \in L^2. \quad (4.52)$$

另一方面, 由引理 4.1, 用  $\Theta$  作用(4.44)两边得

$$0 = \omega^2 [\partial_1 W_0^1 + \partial_2 W_0^2 - (\eta_1 \phi_0^2 - \eta_1 \phi_0^1)]. \quad (4.53)$$

因此  $\operatorname{div} W_0 = \eta_1 \phi_0^2 - \eta_2 \phi_0^1 \in H^1$ , 于是  $\Delta W \in L^2$ , 由此推出  $\nu_0 \in H^2$ .

第二步, 设(4.50)对一切  $\chi$  满足(4.49),  $k \leq n$  成立. 现取任何函数  $\chi$  满足(4.49),  $k = n+1$ , 乘(4.44)以  $\chi L \nu_0 = \omega^2 \chi \nu_0$ , 分解  $L$  于(4.32)和(4.33)中, 置  $\epsilon = 0$ , 有  $\chi(-I_0 - k) \nu_0 = \chi \omega^2 \nu_0$  或

$$I_0(\chi\nu_0) + \omega^2(\chi\nu_0) = -\chi K\nu_0 + L_2\nu_0, \quad (4.54)$$

其中  $-L_2 = -I_0(\chi\nu_0) + \chi I_0$  给定如下:

$$\begin{pmatrix} \chi_{22} + 2\chi_2\partial_2 & \chi_{12} - \chi_1\partial_2 - \chi_2\partial_1 & -\eta_2\chi_1 & \eta_1\chi_1 \\ -\chi_{12} - \chi_1\partial_2 - \chi_2\partial_1 & \chi_{11} + 2\chi_1\partial_1 & -\eta_2\chi_2 & \eta_1\chi_2 \\ \eta_2\chi_1 & \eta_2\chi_2 & \Delta\chi - 2\chi_j\partial_j & 0 \\ -\eta_1\chi_1 & -\eta_1\chi_1 & 0 & \Delta\chi - 2\chi_j\partial_j \end{pmatrix}.$$

因  $\|\nabla\chi(x_1, x_2)\| \leq C(r^n + 1)$ , 由归纳假设,  $L_2\nu_0 \in H^1$ , 由 (4.33),  $\chi K$  的系数为  $n$  阶, 由归纳假设,  $\chi K\nu_0 \in H^1$ . 乘  $\chi\nu_0$  于 (4.54), 我们有

$$(I_0(\chi\nu_0), \chi\nu_0) + \omega^2 \|\chi\nu_0\|_2^2 \leq \|-\chi K\nu_0 + L_2\nu_0\|_2 \|\chi\nu_0\|_2, \quad (4.55)$$

因此  $\chi\nu_0 \in L^2$ , 从 (4.34),  $(I_0(\nu_0), \nu_0) \geq \|\nabla \times (\chi\omega_0)\|_2^2 + \|\nabla(\chi\psi_0)\|_2^2 - C\|\chi\nu_0\|_2^2$ , 因此  $\chi\psi_0 \in H^1$ ,  $\nabla \times (\chi\omega_0) \in L^2$ , 另一方面, 从 (4.24) 和 (4.43) 有

$$\operatorname{div}(\chi w_0) = \chi(\eta_1\psi_0^2 - \eta_2\psi_0^1) + \partial_j\chi w_0^j \in H^1, \quad (4.56)$$

其中  $\partial_j\chi w_0^j \in H^2$ , 由归纳假设得到. 因此, 从 (4.55) 和 (4.56),  $\chi\nu_0 \in H^1$ . 从 (4.54) 和类似于第一步的原理, 可得  $\Delta(\chi\nu_0) \in L^2$ , 即  $\chi\nu_0 \in H^2$ .

为证 (4.51), 利用 Sobolev 嵌入定理得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{r=N} |w_0| dx \leq \lim_{N \rightarrow \infty} (\sup_{r=N} |rw_0|) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \|r\nu_0\|_{H^2(r \geq N)} = 0.$$

为了得到非线性不稳定性, 我们证明特征值  $\omega$  控制着线性化 Maxwell-Higgs 方程组的增长率.

**定理 4.5 (线性化估计)** 考虑线性化 Maxwell-Higgs 方程组 (4.12), (4.13), (4.14),

$$\begin{cases} \partial_t(\operatorname{div} w) = \partial_t(\eta_1\psi_2 - \eta_2\psi_1), \\ \frac{d^2\nu}{dt^2} = L\nu, \\ \nu|_{t=0} = \nu(0), \nu_t|_{t=0} = \nu_t(0), \end{cases} \quad (4.57)$$

其中  $\nu = (w, \psi)^T$ , 对任何  $\varepsilon > 0$ , (4.57) 的解

$$\nu(t) = \mathcal{J}(t)(\nu(0), \nu_t(0))$$

满足

$$\begin{aligned} & \| \nu(t) \|_{H^1} + \| \nu_t(t) \|_2 \\ &= \| \mathcal{J}(t)(\nu(0), \nu_t(0)) \|_{H^1} + \| \partial_t \mathcal{J}(t)(\nu(0), \nu_t(0)) \|_2 \\ &\leq C e^{(\varepsilon + \omega)t} (\| \nu(0) \|_{H^1} + \| \nu_t(0) \|_2), \end{aligned} \quad (4.57)'$$

其中  $\omega > 0$  为定理 4.3 中得到的特征值. 常数  $C$  与  $t$  无关.

证 我们有如下估计

$$\begin{aligned} & \| \operatorname{div} w(t) \|_2^2 \leq 3 [ \| \eta_1 \psi_2(t) - \eta_2 \psi_1(t) \|_2^2 \\ & \quad + \| \operatorname{div} w(0) \|_2^2 + \| \eta_1 \psi_2(0) - \eta_2 \psi_1(0) \|_2^2 ], \quad (4.58) \\ & \frac{1}{2} \| \nu_t(t) \|_2^2 - \frac{1}{2} (L\nu(t), \nu(t)) \\ &= \frac{1}{2} \| \nu_t(0) \|_2^2 - \frac{1}{2} (L\nu(0), \nu(0)). \end{aligned}$$

从(4.30)有

$$\begin{aligned} & - (L\nu(t), \nu(t)) = (\xi''(\nu(t)), \nu(t)) \geq \| \nabla \times w(t) \|_2^2 \\ & \quad + \frac{1}{2} \| \nabla \psi(t) \|_2^2 - C \| \nu(t) \|_2^2, \end{aligned}$$

联合上面的不等式和(4.58)可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \| \nu_t(t) \|_2^2 + \frac{1}{4} \| \nabla \nu(t) \|_2^2 \leq C [ \| \nu(t) \|_2^2 \\ & \quad + \| \nu(0) \|_{H^1}^2 + \| \nu_t(0) \|_2^2 ]. \end{aligned} \quad (4.59)$$

另一方面, 从(4.27)和(4.59)有, 对任何  $\delta > 0$ ,

$$\begin{aligned} & (L\nu, \nu) = (L_\delta \nu, \nu) + \delta \| \nabla w \|_2^2 = \langle \xi''_\delta(\nu), \nu \rangle + \delta \| \nabla w \|_2^2 \\ & \leq \omega_\delta^2 \| \nu(t) \|_2^2 + C\delta [ \| \nu(t) \|_2^2 + \| \nu(0) \|_{H^1}^2 + \| \nu_t(0) \|_2^2 ] \\ & \leq (\omega_\delta^2 + C\delta) \| \nu(t) \|_2^2 + C\delta [ \| \nu(0) \|_{H^1}^2 + \| \nu_t(0) \|_2^2 ]. \end{aligned} \quad (4.60)$$

选取  $\delta$  充分小, 使得  $\omega_\delta^2 + C\delta \leq (\omega + \varepsilon)^2$ , 由(4.60)和(4.58)的第二个方程可得

$$\| \nu_t(t) \|_2^2 \leq (L\nu, \nu) + C (\| \nu(0) \|_{H^1} + \| \nu_t(0) \|_2^2)$$

$$\leq (\omega + \varepsilon)^2 \|\nu(t)\|_2^2 + C(\|\nu(0)\|_2^2 + \|\nu_t(0)\|_2^2). \quad (4.61)$$

因  $\|\nu(t)\|_2 \leq \int_0^t \|\nu_t(\tau)\|_2 d\tau + \|\nu(0)\|_2$ , 从(4.61)可得

$$\begin{aligned} \|\nu_t(t)\|_2 &\leq (\omega + \varepsilon) \int_0^t \|\nu_t(\tau)\|_2 d\tau + C(\|\nu(0)\|_{H^1} \\ &\quad + \|\nu_t(0)\|_2). \end{aligned} \quad (4.62)$$

从标准的 Gronwall 不等式可得

$$\|\nu(t)\|_2 \leq Ce^{(\omega + \varepsilon)t} [\|\nu(0)\|_{H^1} + \|\nu_t(0)\|_2], \quad (4.63)$$

定理得证.

下面证明当涡旋数  $n$  和耦合常数  $\lambda$  充分大时, 存在  $\nu_1 \in H^1$ , 使得

$$\langle \xi''(\nu_1), \nu_1 \rangle < 0. \quad (4.64)$$

证明方法基于当  $n, \lambda \rightarrow \infty$  时的渐近分析.

**引理 4.6** 设  $f, h$  和  $q$  为  $r, \theta$  的实函数, 令

$$\begin{cases} w = \left( -\frac{nf(r, \theta)}{r} \sin\theta + h(r, \theta) \cos\theta, \frac{nf(r, \theta)}{r} \cos\theta + h(r, \theta) \sin\theta \right)^T, \\ \psi = q(r, \theta) e^{in\theta}, \end{cases} \quad (4.65)$$

则对  $\nu = (w, \psi_1, \psi_2)^T$ ,  $\langle \xi''(\nu), \nu \rangle$  具有形式

$$\begin{aligned} &\pi \int_0^\infty \left[ \frac{1}{r^2} (h_\theta - nf_r)^2 + q_r^2 + \frac{1}{r^2} q_\theta^2 + R^2 h^2 \right] r dr \\ &\quad + \pi \int_0^\infty \left\{ \frac{n^2}{r^2} [q^2 (s-1)^2 + f^2 R^2 + 4fqR(s-1)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda}{2} (3R^2 - 1) q^2 \right\} r dr, \end{aligned} \quad (4.66)$$

其中轴向对称旋度  $(a, \eta)$  满足

$$a_1 dx_1 + a_2 dx_2 = nS(r) d\theta, \quad \eta(r, \theta) = R(r) e^{in\theta}. \quad (4.67)$$

对于任何  $n \in \mathbb{Z}, \lambda > 0, r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \theta = \arctan \frac{x_2}{x_1}$ .

**证** 能量泛函为

$$\begin{aligned}\xi &= \int_{R^2} \left[ \frac{1}{2} |F_{ij}|^2 + \frac{1}{2} |D_i \phi|^2 + \frac{\lambda}{8} (|\phi|^2 - 1)^2 \right], \\ 1 \leq i, j \leq 2, \text{ 从 (4.15) 有 } \xi''(a, \eta) &= -L, \text{ 因此} \\ \xi(a + \varepsilon w, \eta + \varepsilon \psi) &= \xi(a, \eta) + \varepsilon \langle \xi'(a, \eta), \nu \rangle \\ &\quad + \frac{\varepsilon^2}{2} \langle \xi''(\nu), \nu \rangle + O(\varepsilon^3) \\ &= -\frac{\varepsilon^2}{2} (L\nu, \nu) + O(\varepsilon^3),\end{aligned}\quad (4.68)$$

其中  $\nu = (w, \psi)^T$ . 我们已用到  $\xi'(a, \eta) = 0$ , 即  $(a, \eta)$  为 Ginzburg-Landau 方程组的解. 由 (4.68) 知, 为了验证 (4.66), 充分地计算扰动能量  $2\varepsilon(a + \varepsilon w, \eta + \varepsilon \psi)$  依  $\varepsilon$  展开的二阶项, 首先计算  $F_{ij}$  依  $\varepsilon$  展开. 由 (4.65) 中对  $w$  的特殊选取, 有

$$\begin{aligned}F_{12} &= \left\{ a_1 - \varepsilon \left[ \frac{nf_2}{r} \sin\theta - h \cos\theta \right] \right\}_2 - \left\{ a_2 + \varepsilon \left[ \frac{nf_1}{r} \cos\theta + h \sin\theta \right] \right\}_1, \\ &= a_{12} - a_{21} - \varepsilon \left[ \frac{nf_2}{r} \sin\theta - h_2 \cos\theta \right] - \varepsilon \left[ \frac{nf_1}{r} \cos\theta + h_1 \sin\theta \right] \\ &\quad + \varepsilon \left[ \left( -\frac{n}{r} \sin\theta \right)_2 + \left( -\frac{n}{r} \cos\theta \right)_1 \right] f + \varepsilon [(\cos\theta)_2 - (\sin\theta)_1] h.\end{aligned}\quad (4.69)$$

注意到

$$\left( -\frac{1}{r} \sin\theta \right)_2 + \left( -\frac{1}{r} \cos\theta \right)_1 = 0, \quad (\cos\theta)_2 - (\sin\theta)_1 = 0,$$

我们有

$$\begin{aligned}F_{12} &= a_{12} - a_{21} - \varepsilon \left[ \frac{nf_2}{r} \sin\theta - h_2 \cos\theta \right] - \varepsilon \left[ \frac{nf_1}{r} \cos\theta + h_1 \sin\theta \right] \\ &= a_{12} - a_{21} - \varepsilon \frac{(nf_r - h_\theta)}{r}.\end{aligned}\quad (4.70)$$

现考虑  $|D_1 \phi|^2 + |D_2 \phi|^2$ , 对  $\varepsilon$  的展开, 注意到

$$\begin{aligned}|D_1 \phi|^2 + |D_2 \phi|^2 &= |\partial_1 \phi|^2 + |\partial_2 \phi|^2 + |A|^2 |\phi|^2 \\ &\quad + i \partial_1 \phi A_1 \bar{\phi} - i A_1 \phi \bar{\partial_1 \phi} + i \partial_2 \phi A_2 \bar{\phi} - i A_2 \phi \bar{\partial_2 \phi},\end{aligned}\quad (4.71)$$

由于  $w, \psi$  在 (4.65) 中的特殊选取, 有

$$\phi = (R + \varepsilon Q) e^{i m \theta}.\quad (4.72)$$

因此,

$$\begin{aligned} & |\partial_1 \phi|^2 + |\partial_2 \phi|^2 \\ &= |\partial_1 [(R + \epsilon q) e^{in\theta}]|^2 + |\partial_2 [(R + \epsilon q) e^{in\theta}]|^2 \\ &= |[R + \epsilon q]_r|^2 + \left| \frac{1}{r} [R + \epsilon q]_\theta \right|^2 + \frac{n^2}{r^2} |R + \epsilon q|^2. \end{aligned} \quad (4.73)$$

对于(4.71)中的交叉项,从(4.72)有

$$i\partial_1 \phi \overline{A_1 \phi} - iA_1 \phi \overline{\partial_1 \phi} = \frac{2n \sin \theta}{r} A [R + \epsilon q]^2. \quad (4.74)$$

类似地

$$i\partial_2 \phi \overline{A_2 \phi} - iA_2 \phi \overline{\partial_2 \phi} = -\frac{2n \cos \theta}{r} A_2 [R + \epsilon q]^2, \quad (4.75)$$

其中

$$A_1 = a_1 - \epsilon \left[ \frac{nf}{r} \sin \theta - h \cos \theta \right],$$

$$A_2 = a_2 + \epsilon \left[ \frac{nf}{r} \cos \theta - h \sin \theta \right].$$

由(4.74), (4.75)得

$$\begin{aligned} & i\partial_1 \phi A_1 \overline{\phi} - iA_1 \phi \overline{\partial_1 \phi} + i\partial_2 \phi A_2 \overline{\phi} - iA_2 \phi \overline{\partial_2 \phi} \\ &= -\frac{2n}{r} [R + \epsilon q]^2 [-\sin \theta A_1 + \cos \theta A_2] \\ &= -\frac{2n^2}{r^2} [R + \epsilon q]^2 [S + \epsilon f]. \end{aligned} \quad (4.76)$$

再考虑

$$\begin{aligned} |A|^2 &= \left| a_1 - \epsilon \left[ \frac{nf}{r} \sin \theta - h \cos \theta \right] \right|^2 + \left| a_2 + \epsilon \left[ \frac{nf}{r} \cos \theta - h \sin \theta \right] \right|^2 \\ &= |a|^2 + 2\epsilon n^2 \frac{fS}{r^2} + \epsilon^2 \left[ \frac{n^2 f^2}{r^2} + h^2 \right], \end{aligned} \quad (4.77)$$

其中  $a = \left( -nS \frac{\sin \theta}{r}, nS \frac{\cos \theta}{r} \right)$ . 从(4.72)有

$$\begin{aligned} |\phi|^2 &= R^2 + 2\epsilon q R + \epsilon^2 q^2, \\ (|\phi|^2 - 1)^2 &= (R^2 - 1 + 2\epsilon q R + \epsilon^2 q^2)^2. \end{aligned} \quad (4.78)$$

现将(4.70), (4.76), (4.77)和(4.78)代入  $\xi$ , 被积函数取此形式

$$\begin{aligned}
& \left( a_{12} - a_{21} - \varepsilon \frac{(nf_r - h_\theta)^2}{r} \right)^2 + |[R + \varepsilon q]|^2 + \left| \frac{1}{r} [R + \varepsilon q]_\theta \right|^2 \\
& + \frac{n^2}{r^2} |R + \varepsilon q|^2 + \left\{ |a|^2 + 2\varepsilon n^2 \frac{fS}{r^2} + \varepsilon^2 \left[ \frac{n^2 f^2}{r^2} + h^2 \right] \right\} \\
& \cdot [R^2 + 2\varepsilon qR + \varepsilon^2 q^2] - \frac{2n^2}{r^2} [R + \varepsilon q]^2 [S + \varepsilon f] \\
& + (R^2 - 1 + 2\varepsilon Rq + \varepsilon^2 q^2)^2.
\end{aligned} \tag{4.79}$$

计算在(4.76)中关于  $\varepsilon$  的二阶项, 即得引理.

**推论 4.7** 设  $m \in \mathbb{N}$ , 且令

$$f(r, \theta) = \alpha(r) \cos m\theta,$$

$$q(r, \theta) = \alpha(r) S,$$

$$h(r, \theta) = \frac{\alpha'(r) mn}{m^2 + r^2 R^2} \sin m\theta.$$

在(4.65)中, 则  $\frac{1}{n} \langle \xi''(\nu), \nu \rangle$  具有形式

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \left\{ \left[ \frac{n^2 R^2}{m^2 + r^2 R^2} + 1 \right] \alpha^2 + \alpha^2 \left[ \frac{n^2}{r^2} \left( \frac{m^2}{n^2} + (S-1)^2 + R^2 + 4R(S-1) \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\lambda}{2} (3R^2 - 1) \right] \right\} r.
\end{aligned} \tag{4.80}$$

**证** 由引理 4.6 即得.

令  $Z = \beta r, \beta = \sqrt{\frac{\lambda}{2n^2}}$ , 且

$$R_\beta^n(Z) = R\left(\frac{Z}{\beta}\right), S_\beta^n(Z) = S\left(\frac{Z}{\beta}\right), \bar{\alpha}(Z) = \alpha\left(\frac{Z}{\beta}\right), \tag{4.81}$$

变换积分变元,  $r = \frac{Z}{\beta}$  于(4.80)中, 有

$$\begin{aligned}
& \langle \xi''(\nu), \nu \rangle \\
& = \pi \int_0^\infty \left\{ \left[ \frac{n^2 R_\beta^n^2}{m^2 + \frac{\alpha^2}{\beta^2} R_\beta^n^2} + 1 \right] \bar{\alpha}'(Z)^2 + n^2 G_\beta''(Z) \bar{\alpha}^2(Z) \right\} Z dZ,
\end{aligned} \tag{4.82}$$

$$G_\beta'' = \frac{m^2}{n^2 Z^2} + \frac{1}{Z^2} [(S_\beta''(Z) - 1)^2 + R_\beta^n^2(Z) + 4R_\beta''(Z)(S_\beta''(Z) - 1)]$$

$$+ 3 R_{\beta}^{\prime\prime 2}(Z) - 1,$$

其中  $R(r), S(r)$  满足如下方程

$$\begin{aligned} -R'' - \frac{1}{r}R' + \frac{n^2}{r^2}(1-S)^2R + \frac{\lambda}{2}(R^2-1)R &= 0, \\ -S'' + \frac{1}{r}S' - (1-S)R^2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.83)$$

(4.83) 在  $r = \frac{Z}{\beta}$  取值有

$$\begin{aligned} -R_{\beta}^{\prime\prime}(Z) - \frac{1}{Z}R_{\beta}^{\prime}(Z) + \frac{n^2}{Z^2}[(1-S_{\beta}^n(Z))^2 \\ + (R_{\beta}^n(Z)-1)]R_{\beta}^n(Z) &= 0, \\ -S_{\beta}^{\prime\prime}(Z) + \frac{1}{Z}S_{\beta}^{\prime}(Z) - \frac{1}{\beta^2}(1-S_{\beta}^n(Z))R_{\beta}^n(Z) &= 0. \end{aligned} \quad (4.84)$$

现研究  $R_{\beta}^n$  和  $S_{\beta}^n$  当  $n \rightarrow \infty$  时 ( $\beta$  为固定) 的渐近状态, 我们首先建立如下的关于  $R_{\beta}^n$  和  $S_{\beta}^n$  的一致有界估计.

**引理 4.8** 磁场  $H_{\beta}^n(Z) = \frac{1}{Z}S_{\beta}^n(Z)$  满足

$$-\Delta H_{\beta}^n + \frac{1}{\beta^2}H_{\beta}^n = \frac{1}{\beta^2}T_{\beta}^n, \quad (4.85)$$

其中  $T_{\beta}^n = \frac{\alpha}{Z}R_{\beta}^nR_{\beta}^{\prime}(1-S_{\beta}^n) + \frac{1}{Z}(1-R_{\beta}^n)^2S_{\beta}^{\prime}$ ,  $Z \neq 0$ , 进一步有

$$T_{\beta}^n \geq 0, \quad \|T_{\beta}^n\|_1 = 2\pi, \quad (4.86)$$

$$\|H_{\beta}^n\|_2 \leq \frac{\sqrt{\pi}}{\beta}, \quad 2\beta^2 \int_{R^2} H_{\beta}^n{}^2 = \int_{R^2} (1-R_{\beta}^n{}^2), \quad (4.87)$$

**证** 从 (4.84) 的第二个方程有

$$-ZH_{\beta}^{\prime} = -Z\left[\frac{1}{Z}S_{\beta}^{\prime}\right]' = \frac{1}{\beta^2}(1-S_{\beta}^n)R_{\beta}^n{}^2. \quad (4.88)$$

再对 (4.88) 式求导, 即得 (4.85), 因  $R$  和  $S$  是增加的, 正的函数,  $T_{\beta}^n \geq 0$ , 对任何  $0 \leq d \leq \infty$ , 可得

$$\begin{aligned} & \int_{|Z| \leq d} \frac{2}{Z} R_{\beta}^n R_{\beta}^{\prime} (1-S_{\beta}^n) Z d_Z d\theta \\ &= 2\pi \int_0^d \frac{d}{d_Z} R_{\beta}^n{}^2 (1-S_{\beta}^n) d_Z \end{aligned}$$



$$= 2\pi \int_0^d R_\beta^{n^2} \frac{d}{dz} S_\beta^n dz + 2\pi R_\beta^{n^2}(d)(1 - S_\beta^n(d)), \quad (4.89)$$

因此,从  $T_\beta^n$  的定义和(4.89)有

$$\begin{aligned} \int_{|Z| \leq d} T_\beta^n Z dZ &= \int_{|Z| \leq d} \frac{1}{Z} \frac{d}{dZ} S_\beta^n Z dZ + 2\pi R_\beta^{n^2}(d)(1 - S_\beta^n(d)) \\ &= 2\pi S_\beta^n(d) + 2\pi R_\beta^{n^2}(d)(1 - S_\beta^n(d)). \end{aligned} \quad (4.90)$$

令  $d \rightarrow \infty$ , 且注意到  $S_\beta^n(d) \rightarrow 1, d \rightarrow \infty$ , 可得(4.86).

为证(4.87)中第一个不等式, 乘(4.84)以  $\frac{1}{Z} S_\beta^{n'}$ , 再在  $\mathbb{R}^2$  上积分, 可得

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{Z} S_\beta^{n'} \right\|_2^2 &= 2\pi \int_0^\infty \left[ S_\beta^{n''} S_\beta^{n'} + \frac{1}{\beta^2} (1 - S_\beta^n) S_\beta^{n'} R_\beta^{n^2} \right] dZ \\ &\leq \pi S_\beta^{n^2} \Big|_0^\infty + 2\pi \int_0^\infty \frac{1}{\beta^2} (1 - S_\beta^n) S_\beta^{n'} dZ = \pi \frac{1}{\beta^2} (1 - S_\beta^n) \Big|_\beta^0 \\ &= \frac{\pi}{\beta^2}. \end{aligned}$$

其中我们用到了这个事实:  $S_\beta^{n'}(Z) = 0, Z = 0, Z = \infty$ .

为证(4.87)中第二个等式, 利用  $R(S), S(r)$  的等式

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left[ \frac{1}{r} S' \right]^2 = \frac{\beta^2}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (1 - R^2)^2. \quad (4.91)$$

上式作变元变换  $Z = \beta r$ , 即得(4.87).

现研究  $S_\beta^n, R_\beta^n$ , 当  $n \rightarrow \infty$  时的渐近形态.

**引理 4.9** 存在子序列  $n_k$  使得  $S_{\beta^{n_k}}(Z) \rightarrow S_\beta(Z) \in C^0[0, \infty) \cap C^1(0, \infty), R_{\beta^{n_k}}(Z) \rightarrow R_\beta(Z)$ , 几乎处处于  $(0, \infty)$ . 进一步,  $0 \leq S_\beta \leq 1, S'_\beta \geq 0$ , 且

$$\left\| \frac{S'_\beta}{Z} \right\|_2 \leq \frac{\sqrt{\pi}}{\beta}, \quad (4.92)$$

$$R_\beta(Z) = 0, Z \leq Z_*, \quad (4.93)$$

$$R_\beta(Z) = \sqrt{1 - \frac{(1 - S_\beta)^2}{Z^2}}, Z > Z_*, \quad (4.94)$$

其中  $Z_*$  是使得  $1 - S_\beta(Z_*) = Z_*$  成立惟一的点.

证 固定  $\beta$ .

(a)  $S_\beta^n$  在  $C^0[0, \infty) \cap C^1(0, \infty)$  上一致有界.

注意从 (4.86), (4.85),  $-\Delta H_\beta^n + \frac{1}{\beta^2} H_\beta^n$  一致有界于  $L^1(\mathbb{R}^2) \subset W^{-1,p}(\mathbb{R}^2)$ ,  $1 \leq p < 2$ , 由标准的椭圆型理论和 Sobolev 嵌入,  $H_\beta^n = \frac{1}{Z} S_\beta^n$  在  $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$  ( $1 \leq p < 2$ ) 中一致有界. 因此, 存在  $S_\beta$ , 使得  $\frac{1}{Z} S_\beta^n \in W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ ,  $S_\beta^n(Z) \rightarrow S_\beta(Z)$  子序列依点态收敛. (4.92) 从 (4.87) 推出, 对任何  $Z_1 < Z_2$ ,

$$\begin{aligned} |S_\beta^n(Z_2) - S_\beta^n(Z_1)| &= \left| \int_{Z_1}^{Z_2} [x H_\beta^n(x)] dx \right| \\ &\leq \left[ \int_{Z_1}^{Z_2} x H_\beta^n^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_{Z_1}^{Z_2} x dx \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|H_\beta^n\|_2 \frac{\sqrt{Z_2^2 - Z_1^2}}{\sqrt{2}} \leq \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} \frac{\sqrt{Z_2^2 - Z_1^2}}{\sqrt{2}} \quad (\text{由 (4.87)}). \end{aligned} \quad (4.95)$$

因此, 极限函数  $S_\beta \in C^0[0, \infty)$ , 进一步, 对任何  $0 < Z < Z_2$ ,

$$\begin{aligned} |S_\beta^n(Z_2) - S_\beta^n(Z_1)| &= \left| \int_{Z_1}^{Z_2} [x H_\beta^n]' dx \right| \\ &\leq \left| \int_{Z_1}^{Z_2} H_\beta^n dx \right| + \left| \int_{Z_1}^{Z_2} [x H_\beta^n]' dx \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{\sqrt{Z_1}} \int_{Z_1}^{Z_2} [x^{\frac{1}{2}} H_\beta^n] dx \right| + \|H_\beta^n\|_p \left( \frac{Z_2^2 - Z_1^2}{2} \right)^{1-\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{Z_1}} \|H_\beta^n\|_2 \sqrt{Z_2 - Z_1} + \|H_\beta^n\|_p \left( \frac{Z_2^2 - Z_1^2}{2} \right)^{1-\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (4.96)$$

因  $\|H_\beta^n\|_p$  和  $\|H_\beta^n\|_2$  是一致有界的,  $S_\beta \in C^1(0, \infty)$ . 进一步, 因  $S_\beta' \geq 0$ , 存在惟一  $Z_*$ , 使得  $1 - S_\beta(Z_*) = Z_*$ .

(b)  $R_\beta^n$  当  $n \rightarrow \infty$  时的渐近状态.

注意到  $0 \leq R_\beta^n \leq 1$ , 现证  $R_\beta^n$  在  $BV$  空间上是一致有界的. 为简单计, 设  $S_\beta^n \rightarrow S_\beta$ ,  $n \rightarrow \infty$ . 因  $S_\beta' \geq 0$ , 可设  $S_\beta(Z) < 1$ ,  $0 \leq Z \leq Z_0$

$= \inf_Z \{S_\beta(Z) = 1\}$ . 因  $S_\beta(0) = 0$ , 且  $S_\beta$  是连续的, 故有  $Z_0 > 0$ . 因此,  $0 < Z_* < Z_0$ , 从方程(4.85)可知

$$[R_\beta^n]'(1 - S_\beta^n) - R_\beta^n S_\beta^n' = [R_\beta^{n^2}(1 - S_\beta^n)]' = [ZT_\beta^n - ZH_\beta^n]'. \quad (4.97)$$

由引理 4.8 可知,  $\|T_\beta^n\|_1$  和  $\|H_\beta^n\|_2$  是关于  $n$  一致有界的. 因此, (4.97) 右端作为单变元  $Z$  的函数, 是在  $L^1_{\text{loc}}(0, \infty)$  上一致有界的. 对任何固定的  $Z < Z_0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - S_\beta^n(Z)) = (1 - S_\beta(Z)) \geq C > 0$ , 因此,  $(1 - S_\beta^n(Z)) \geq \frac{C}{2} > 0$ ,  $n$  充分大. 因  $S_\beta^n$  是在  $C^1_{\text{loc}}(0, \infty)$  中一致有界的, 连同(4.97)推出  $R_\beta^{n^2}$  在  $W^{1,1}_{\text{loc}}(0, Z_0)$  中一致有界,  $n$  充分大. 由 Helly 定理, 存在一个子序列  $n_k$  使得

$$R_\beta^{n_k}(Z) \rightarrow R_\beta(Z), \text{ 几乎处处在 } (0, Z_0). \quad (4.98)$$

进一步  $R_\beta^2(Z) \in BV_{\text{loc}}(0, Z_0)$ .  $(R_\beta^2)'$  具有正测度. 取  $k \rightarrow \infty$  的弱极限于(4.84)中, 可得

$$R_\beta(Z) \left[ \frac{1}{Z^2} (1 - S_\beta(Z))^2 + R_\beta^2(Z) - 1 \right] = 0, 0 \leq Z \leq Z_0. \quad (4.99)$$

(c) 方程的证明.

$$\begin{aligned} R_\beta(Z) &= 0, \quad Z \leq Z_*, \\ R_\beta(Z) &= \sqrt{1 - \frac{(1 - S_\beta)^2}{Z}}, \quad Z > Z_*. \end{aligned} \quad (4.100)$$

为了建立(4.100), 我们需要利用(4.99),  $R_\beta \neq 0$ . 先反证  $R_\beta \equiv 0, 0 \leq Z \leq Z_0$ , 分两种情况:  $Z_0 < \infty$  和  $Z_0 = \infty$ .

如  $Z_0 < \infty$ , 且  $R_\beta \equiv 0, 0 \leq Z \leq Z_0$ , 则(4.84)具有形式

$$-S_\beta'' + \frac{1}{Z} S_\beta' = 0.$$

因此

$$S_\beta(Z) = CZ^2, 0 \leq Z \leq Z_0. \quad (4.101)$$

因  $S_\beta$  是连续的,  $S_\beta(0) = 0, S_\beta(Z_0) = 1$ , 常数  $C \neq 0$ , 则有  $S_\beta'(Z_0)$

$= 2CZ_0 \neq 0$ , 另一方面, 从  $Z_0$  的定义,  $S_\beta = 1, Z \geq Z_0, S'_\beta(Z_0) = 0$ , 这和(4.95)矛盾. 因从(a)  $S_\beta \in C^1$  在  $Z_0 < \infty$  上.

如  $Z_0 = \infty, R_\beta \equiv 0, 0 \leq Z < \infty, n \rightarrow \infty$  在(4.87)的第一个等式中,  $R_\beta^n \rightarrow R_\beta^2$ ; 几乎每个  $Z$ , 由 Foton 引理有

$$\begin{aligned} \infty &= \|1 - R_\beta^2\|_2^2 = \|1 - \lim R_\beta^n\|_2^2 \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|1 - R_\beta^n\|_2^2 = \limsup_{n \rightarrow \infty} 2\beta^2 \int_{R^2} H_\beta^n^2 \leq 2\pi^2, \end{aligned} \quad (4.102)$$

这导致矛盾. 因此推出在任何情况下  $R_\beta \neq 0, Z \leq Z_0$ .

现利用(4.99)证明(4.100), 从(4.99)和  $Z_*$  的定义, 有  $R_\beta(Z) = 0, Z \leq Z_*$ . 因  $R_\beta$  是单调增加函数且在  $[0, Z_0]$  不恒等于零, 能设对某  $Z_* \leq Z_{**} < Z_0, R_\beta(Z) \equiv 0, Z \leq Z_{**}$ , 且

$$R_\beta(Z) = \sqrt{1 - \frac{(1 - S_\beta)^2}{Z}}, Z \geq Z_{**}. \quad (4.103)$$

为了证明  $Z_* = Z_{**}$ , 从(4.86)得

$$T_\beta^n \rightarrow T_\beta = \frac{1}{2} \left[ \frac{d}{dZ} R_\beta^2 \right] (1 - S_\beta) + \frac{1}{2} (1 - R_\beta^2) S'_\beta, \quad (4.104)$$

在  $\mu(0 \leq Z \leq Z_0)$ ,  $\cdot^2$  非负测度空间中弱收敛. 这是因为  $R_\beta^n \in BV_{lc}(0, Z_0)$  一致. 选取  $Z_{**} < d < Z_0$  使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_\beta^n(d) \rightarrow R_\beta(d)$ , 利用(4.90)对  $d < Z_0, n \rightarrow \infty$  得

$$\begin{aligned} \int_{Z \leq d} T_\beta Z dZ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Z \leq d} T_\beta^n Z dZ \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [2\pi S_\beta^n(d) - R_\beta^n(d)(1 - S_\beta^n(d))] \\ &= 2\pi S_\beta(d) - 2\pi R_\beta(d)(1 - S_\beta(d)). \end{aligned} \quad (4.105)$$

另一方面, 基于假设(4.103), 如同(4.90)直接计算得

$$\begin{aligned} \int_{Z \leq d} T_\beta Z dZ &= 2\pi S_\beta(d) + 2R_\beta(Z_{**})(1 - S_\beta(Z_{**})) \\ &\quad - 2\pi R_\beta(d)(1 - S_\beta(d)), \end{aligned} \quad (4.106)$$

比较这两个等式, 可得  $R_\beta(Z_{**}) = 0$ , 从(4.103),  $1 - S_\beta(Z_{**}) = Z_{**}$ , 因此  $Z_{**} = Z_*$ ,  $Z_*$  是惟一的. 对  $Z \geq Z_0$ , 由  $R_\beta$  的单调性,

$R_\beta \equiv 1$ , 引理得证.

我们再利用(4.94)去估计任何收敛子序列  $(S_\beta^{n_k}, R_\beta^{n_k})$  的极限  $(S_\beta, R_\beta)$ .

**引理 4.10** 存在  $1 < Z_1 < Z_2 \leq \alpha$ ,  $\beta_0 > 0$ ,  $C_0 > 0$ , 使得对任何  $(R_\beta, S_\beta)$ ,  $S_\beta^{n_k} \rightarrow S_\beta$ , 即为某子序列  $(S_\beta^{n_k}, R_\beta^{n_k})$  的极限,

$$I = \frac{1}{Z^2} [(S_\beta - 1)^2 + R_\beta^2 + 4R_\beta(S_\beta - 1)] + 3R_\beta^2 - 1 < -C_0, \quad (4.107)$$

对一切  $\beta > \beta_0$ ,  $Z_1 < Z < Z_2$ .

**证** 令  $S_\beta^{n_k} \rightarrow S_\beta, R_\beta^{n_k} \rightarrow R_\beta$  几乎处处成立. 注意到引理 4.9, 对  $(S_\beta, R_\beta)$  是正确的, 选取  $Z_1 = 0, Z_2 = Z$  于(4.95)中, 有

$$S_\beta(Z) \leq \frac{\sqrt{2}\pi}{\beta}, 1 \leq Z \leq \pi. \quad (4.108)$$

注意到从  $Z_*$  的定义有  $Z_* \leq 1$ . 因此从(4.90)有

$$\begin{aligned} R_\beta &= \sqrt{1 - \frac{(1 - S_\beta)^2}{Z^2}}, 1 \leq Z \leq \pi, \text{ 将此代入 } I, \text{ 则 } I \text{ 具有形式} \\ \frac{1}{Z^2} [(S_\beta - 1)^2 + 1 - \frac{(1 - S_\beta)^2}{Z^2} + 4\sqrt{1 - \frac{(1 - S_\beta)^2}{Z^2}}(S_\beta - 1)] + \alpha \\ &\quad - \frac{3(1 - S_\beta)^2}{Z^2} \leq \frac{1}{Z^2} \left[ 1 - 2S_\beta + S_\beta^2 + 1 + \frac{2S_\beta}{Z^2} - \frac{S_\beta^2}{Z^2} - \frac{1}{Z^2} \right. \\ &\quad \left. + 4\sqrt{1 - \frac{1}{Z^2}}(S_\beta - 1) \right] - \frac{3}{Z^2} + \alpha - \frac{3S_\beta^2}{Z^2} + \frac{6S_\beta}{Z^2} \\ &\leq \frac{1}{Z^2} \left[ 4S_\beta - 2S_\beta^2 + \frac{2S_\beta}{Z^2} - \frac{S_\beta^2}{Z^2} + \alpha - \frac{1}{Z^2} + 4S_\beta \right. \\ &\quad \left. - 4\sqrt{1 - \frac{1}{Z^2}} \right] - 3\frac{1}{Z^2} + \alpha \\ &\leq \frac{1}{Z^2} \left[ 10S_\beta + 2 - \frac{1}{Z^2} - 4\sqrt{1 - \frac{1}{Z^2}} \right] - 3\frac{1}{Z^2} + \alpha \\ &\leq \frac{1}{Z^2} \left[ \frac{10\sqrt{2}\pi}{\beta} + \alpha - \frac{1}{Z^2} - 4\sqrt{1 - \frac{1}{Z^2}} \right] - 3\frac{1}{Z^2} + \alpha \\ &= I_1(Z). \end{aligned}$$

注意到  $I_1(1) = \frac{10\sqrt{2\pi}}{\beta}$ ,  $I_1'(1) = -\infty$ , 且

$$I_1(Z) = \frac{10\sqrt{2\pi}}{\beta} - 4\sqrt{2}(Z-1)^{\frac{1}{2}} + O(Z-1), \quad (4.109)$$

因此, 存在  $1 < Z_1 < Z < Z_2 < \alpha$ ,  $C_0 > 0$ ,  $\beta_0$  充分大, 使得当  $\beta > \beta_0$  时,  $I < -C_0$ .

基于引理 4.9, 4.10 我们准备证明线性化 Maxwell-Higgs 方程组对于  $(R_\beta^n, S_\beta^n)$ ,  $n, \beta$  充分大时增长模的存在性.

**定理 4.11** 设  $\bar{\alpha}(Z) = \sin \frac{2\pi Z}{Z_2 - Z_1}$ ,  $Z_1 \leq Z \leq Z_2 \leq \pi$ , 其他地方

$\bar{\alpha}(Z) = 0$ , 且  $\frac{m^2}{n^2} = \frac{C_0}{2}$ , 则存在  $\beta_0 > 0$ ,  $n_0 > 0$  使得

$$\begin{aligned} \langle \xi''_{n,\beta}(\nu), \nu \rangle &= \pi \int_0^\infty \left[ \left( \frac{n^2 R_\beta^n^2}{m^2 + \frac{Z^2}{\beta^2} R_\beta^n^2} + 1 \right) (\alpha'_1)^2 + n^2 G_\beta^n(Z) \bar{\alpha}^2 \right] Z dZ \\ &\leq 0, \end{aligned} \quad (4.110)$$

$n > n_0, \beta > \beta_0, \nu = (w, \phi)^T$  如在 (4.80) 中.

**证** 充分证明  $\beta > \beta_0$  且为固定的.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sup \langle \xi''_{n,\beta}(\nu), \nu \rangle) < 0. \quad (4.111)$$

选取适当的子序列, 设  $S_{\beta^k} \rightarrow S_\beta, R_{\beta^k} \rightarrow R_\beta$  在  $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$  中, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sup \langle \xi''_{n,\beta}(\nu), \nu \rangle) = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \xi''_{n_k,\beta}(\nu), \nu \rangle.$$

为简单计, 仍记子序列为  $n$ .

从 (2.82) 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \xi''_{n,\beta}(\nu), \nu \rangle \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \pi n^2 \int_0^\infty \left[ \left( \frac{2}{n^2 C_0} + \frac{1}{n^2} \right) \bar{\alpha}'^2 + G_\beta^n \bar{\alpha}^2 \right] Z dZ. \quad (4.112)$$

应用引理 4.10 于  $(S_\beta, R_\beta)$  和 (2.82) 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_\beta^n = \left[ \frac{C_0}{\alpha Z^2} + I \right] \leq \left[ \frac{C_0}{2} - C_0 \right] = -\frac{C_0}{2} < 0. \quad (4.113)$$

对  $1 \leq Z_1 \leq Z \leq Z_2$ , 因  $G_\beta^n$  和  $\bar{\alpha}'$  为一致有界, 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \left[ \left( \frac{\alpha}{n^2 C_0} + \frac{1}{n^2} \right) \bar{\alpha}'^2 + G_\beta^n \bar{\alpha}^2 \right] Z dZ$$

$$\leq -C_0 \int_{Z_1}^{Z_2} \sin^2 \frac{\alpha \pi Z}{Z_2 - Z_1} Z dZ < 0. \quad (4.114)$$

因此,将(4.114)代入(4.112),即得(4.111).

以下证明对于涡旋 $(a, \eta)$ ,  $\beta > \beta_0$ ,  $n \geq n_0$  不仅线性不稳定性, 而且在模  $\|\nu\|_X = \|\nu\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} + \|\nu\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$  下非线性不稳定. 其中  $\nu = (w, \phi)^T \in \mathbb{R}^4$ , 为涡旋 $(a, \eta)$ 的扰动.  $w = A - a$ ,  $\phi = \phi - \eta$ . 整个非线性 Maxwell-Higgs 方程组(4.7)–(4.11)作为  $\nu$  的项, 具有形式

$$\begin{cases} \partial_t (\partial_1 w_1 + \partial_2 w_2) - \frac{i}{2} \partial_t (\eta \bar{\psi} - \bar{\eta} \psi) = \frac{i}{2} (\psi \partial_t \bar{\psi} - \bar{\psi} \partial_t \psi), \\ \frac{d^2 \nu}{dt^2} - L\nu = N(\nu), \end{cases} \quad (4.115)$$

其中  $L$  的线性算子部分如同(4.16), 非线性项  $N(\nu)$  为

$$\begin{aligned} & \frac{i}{2} (\psi \partial_k \bar{\psi} - \bar{\psi} \partial_k \psi) - w_k |\psi|^2 - w_k (\eta \bar{\psi} + \bar{\eta} \psi) - \alpha_k |\psi|^2 \\ & - i w_j \partial_j \psi - i \partial_j (w_j \psi) - \omega_j^2 \psi - 2 a_j w_j \psi - \eta w_j^2 \\ & - \frac{\lambda}{2} [|\psi|^2 (\psi + 2\eta) + \psi^2 \bar{\eta}], \end{aligned}$$

$1 \leq k \leq Z, 1 \leq j \leq 2$ , 求和. 首先我们需要标准的 Maxwell-Higgs 方程组局部适定性定理.

**引理 4.12** 令  $\nu = \|\nu(0)\|_{H^2(\mathbb{R}^2)} + \|\nu_t(0)\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} < \infty$ , 则存在  $T^0 > 0$ , 依赖于  $\nu$ , 使得存在问题(4.115)具初值  $\nu|_{t=0} = \nu(0)$ ,  $\nu_t|_{t=0} = \nu_t(0)$  的惟一解, 且

$$\|\nu(t)\|_{H^2(\mathbb{R}^2)} + \|\nu_t(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} < \infty, \quad (4.116)$$

$$\|F_{\mu\nu}\|_2^2(t) + \|D_\mu \phi\|^2(t) + \frac{\lambda}{4} \|\phi^2 - 1\|_2^2(t) = \text{const}, \quad (4.117)$$

其中  $A = a + w$ ,  $\phi = \eta + \psi$ ,  $0 \leq t \leq T^0$ .

证明的概要, 再写 Maxwell-Higgs 方程组为

$$\begin{cases} \partial_t(\partial_1 w_1 + \partial_2 w_2) = p_0(\nu), \\ [\partial_{tt} - \Delta] w_k - \partial_k(\operatorname{div} w) = p_k(\nu), \\ [\partial_{tt} - \Delta] \psi = p_\psi(\nu), \end{cases} \quad (4.118)$$

其中  $p = (p_0, p_j, p_\psi)$ ,  $p_0 = \frac{i}{2} \partial_t(\eta \bar{\psi} - \bar{\eta} \psi) + \frac{i}{2}(\psi \partial_t \bar{\psi} - \bar{\psi} \partial_t \psi)$ ,  
 $(p_j, p_\psi) = \bar{L}(\nu) + N(\nu)$ ,  $\bar{L}$  为线性算子,

$$\begin{pmatrix} -|\eta|^2 & 0 & g_{13} - \eta_2 \partial_1 & g_{14} + \eta_1 \partial_1 \\ 0 & -|\eta|^2 & g_{23} - \eta_2 \partial_2 & g_{24} + \eta_1 \partial_2 \\ g_{31} + \partial_1(\eta_1 \times & g_{32} + \partial_2(\eta_2 \times & g_{33} & 2a_j \partial_j - \lambda \eta_2 \eta_1 \\ g_{41} - \partial_1(\eta_1 \times & g_{42} - \partial_2(\eta_1 \times & -2a_j \partial_j - \lambda \eta_2 \eta_1 & g_{44} \end{pmatrix}, \quad (4.119)$$

$g_{ij}$  在 (4.16) 中. 在 (4.118) 左端的线性算子类似于标准的波动算子, 方程组 (4.115) 的初值问题的适定性能用标准的压缩映像定理证明. 只需验证.

$$\begin{cases} \|p(\nu(t))\|_{H^1} \leq C[\|\nu(t)\|_{H^2}^3 + \|\nu_t(t)\|_{H^2}^3 + \|\nu(t)\|_{H^2} + \|\nu_t(t)\|_{H^2}], \\ \|p(\nu_1(t)) - p(\nu_2(t))\|_{H^1} \leq C[\|\nu_1\|_{H^2} + \|\nu_2\|_{H^2} + 1]^2 \|\nu_1 - \nu_2\|_{H^2}, \end{cases} \quad (4.120)$$

其中常数  $C$  依赖于  $\|a\|_{C^1(\mathbb{R}^2)} + \|\eta\|_{C^2(\mathbb{R}^2)}$ , 不等式 (4.120) 能由  $p(\nu)$  的定义及标准的 Sobolev 嵌入定理和 Nirenberg-Gagliardo 不等式得到.

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &\leq C \|f\|_{H^2 R^2}, \\ \|f\|_{L^4 R^2} &\leq C \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{1/2} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{1/2}, \end{aligned} \quad (4.121)$$

等式 (4.117) 来自标准的能量估计.

如下的  $H^2$  模增长率估计对于线性结果到非线性动力学性质是至关重要的.

**引理 4.13** 设  $\nu(t)$  为整个 Maxwell-Higgs 方程组 (4.115) 的解, 且

$$\|\nu(t)\|_{H^1} + \|\nu_t(t)\|_2 \leq C e^{\Omega t} [\|\nu(0)\|_{H^1} + \|\nu_t(0)\|_2] \quad (4.122)$$



对  $0 \leq t \leq T, \Omega > 0$  成立, 则存在常数  $C_0 > 0$  使得如果

$$\sup_{0 \leq s \leq T} [\|\nu(s)\|_X + \|\nu(s)\|_X^2] \leq C_0, \quad (4.123)$$

则对  $0 \leq t \leq T$  有

$$\begin{aligned} \|\nu(t)\|_{H^2} + \|\nu_t(t)\|_{H^1} &\leq C e^{\Omega t} [\|\nu(0)\|_{H^2} \\ &\quad + \|\nu_t(0)\|_{H^1}], \end{aligned} \quad (4.124)$$

其中常数  $C$  与  $t$  无关.

**证** 证明的主要想法由  $\|\nu\|_{H^1}$  估计  $\|\nu\|_{H^2}$ , (4.115) 对空间变元求导一次,  $\partial_l = \partial_{x_l}$ , 得

$$\begin{cases} \partial_t(\partial_l \partial_t \omega_1 + \partial_2 \partial_l \omega_2) - \frac{i}{2} \partial_t(\eta \bar{\partial}_l \psi - \bar{\eta} \partial_l \psi) \\ = \frac{i}{2} \partial_t(\partial_l \eta \bar{\psi} - \partial_l \bar{\eta} \psi) - \frac{i}{2} \partial_l(\psi \bar{\partial}_l \bar{\psi} - \bar{\psi} \partial_l \psi), \\ \frac{d^2}{dt^2}(\partial_l \nu) - L(\partial_l \nu) = L_1(\nu) + \partial_l N(\nu), \end{cases} \quad (4.125)$$

这里  $L_1(\nu)$  为

$$\begin{aligned} &\frac{i}{2} [\eta_l \bar{\psi}_k + \psi \bar{\eta}_{kl} - \bar{\eta}_l \psi_k - \bar{\psi} \eta_{kl} - \partial_l a_k (\eta \bar{\psi} + \bar{\eta} \psi) \\ &- a_k (\eta_l \bar{\psi} + \bar{\eta}_l \psi) - \omega_k \partial_l |\eta|^2 - 2i \partial_l a_j \psi_j - 2i \omega_j \eta_{jl} \\ &- i \partial_j \omega_j \eta_l - \partial_l [|\alpha|^2 + \lambda |\eta|^2] \psi - 2\omega_j \partial_l (a_j \eta) - \frac{\lambda}{2} \partial_l (\eta^2) \bar{\psi}], \end{aligned} \quad (4.126)$$

估计 (4.125) 右端的  $L^2$  模. 因  $\|a\|_{C^1} + \|\eta\|_{C^1}$  为有限, 有

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{i}{2} \partial_t(\partial_l \eta \bar{\psi} - \partial_l \bar{\eta} \psi) \right\|_2 + \|L_1(\nu)\|_2 \\ &\leq C [\|\nu\|_{H^1} + \|\nu_t\|_2]. \end{aligned} \quad (4.127)$$

由 (4.121) 得

$$\left\| \frac{i}{2} \partial_l(\psi \partial_t \bar{\psi} - \bar{\psi} \partial_t \psi) \right\|_2 \leq C \|\nu\|_X (\|\nu\|_{H^2} + \|\nu_t\|_{H^1}), \quad (4.128)$$

$$\begin{aligned} \|\partial_l N(\nu)\|_2 &\leq C [\|\nu\|_\infty + \|\nu\|_{H^1} + \|\nu_t\|_2 \\ &\quad + \|\nu\|_\infty^2] (\|\nu\|_{H^1} + \|\nu_t\|_{H^1}) \\ &\leq C [\|\nu\|_X + \|\nu\|_X^2] (\|\nu\|_{H^1} + \|\nu_t\|_{H^1}), \end{aligned} \quad (4.129)$$

其中常数  $C$  依赖于  $\|a\|_{C^1} + \|\eta\|_{C^2}$ . 现用能量方法估计  $\|\nu\|_{H^2}$ . 乘 (4.125) 的第一个方程两边以  $(\partial_1 \partial_t w_1 + \partial_2 \partial_t w_2) - \frac{i}{2}(\eta \overline{\partial_t \psi} - \overline{\eta} \partial_t \psi)$ , 利用 (4.128) 得

$$\begin{aligned} & \|\partial_t \operatorname{div} W\|_2^2(t) \\ & \leq C \|\nu\|_{H^2(0)}^2 + C \int_0^t \{ \|\nu\|_X [ \|\nu\|_{H^2} + \|\nu_t\|_{H^1} ]^2 \\ & \quad + \|\nu\|_{H^1} + \|\nu_t\|_2^2 \} dt. \end{aligned} \quad (4.130)$$

乘 (4.125) 第二个方程以  $\partial_t \nu$ , 得

$$\begin{aligned} & \|\partial_t \nu_t\|_2^2 \Big|_0^t - (L(\partial_t \nu), \partial_t \nu) \Big|_0^t \\ & \leq \int_0^t \left\| \frac{i}{2} \partial_t (\partial_t \eta \bar{\psi} - \partial_t \bar{\eta} \psi) \right\|_2 \|\partial_t \nu_t\|_2 d\tau \\ & \quad + \int_0^t [ \|L_1(\nu)\|_2 + \|\partial_t N(\nu)\|_2 ] \|\partial_t \nu_t\|_2 d\tau \\ & \leq C \sup_{0 \leq s \leq T} [ \|\nu\|_X + \|\nu\|_X^2 ] \int_0^t \|\nu\|_{H^2} \|\partial_t \nu_t\|_2 d\tau \\ & \quad + C \int_0^t \|\nu\|_{H^1} \|\partial_t \nu_t\|_2 d\tau. \end{aligned} \quad (4.131)$$

注意到

$$\begin{aligned} (-L(\partial_t \nu), \partial_t \nu) & \geq \|\operatorname{curl}(\partial_t w)\|_2^2 + \|\partial_t w\|_{H^1}^2 \\ & \quad - \frac{1}{2} \|\nabla \partial_t \psi\|^2 - C \|\partial_t \nu\|_2^2, \end{aligned} \quad (4.132)$$

联合 (4.132), (4.130) 和 (4.131), 令  $y(t) = \|\nu(t)\|_{H^2}^2 + \|\nu_t(t)\|_{H^1}^2$ , 可得

$$\begin{aligned} y(t) & \leq C [ \|\nu\|_X + \|\nu\|_X^2 + \varepsilon ] \int_0^t y(\tau) d\tau + C_\varepsilon \int_0^t [ \|\nu\|_{H^1}^2 \\ & \quad + \|\nu_t\|_2^2 ] dt + C \|\nu(t)\|_{H^1}^2 \\ & \quad + C [ \|\nu(0)\|_{H^2}^2 + \|\nu_t(0)\|_{H^1}^2 ]. \end{aligned} \quad (4.133)$$

这里我们已用到了

$$\int_0^t \|\nu\|_{H^1} \|\partial_t \nu_t\|_2 d\tau \leq \int_0^t [ C_\varepsilon \|\nu\|_{H^2}^2 + \varepsilon \|\partial_t \nu_t\|_2^2 ] d\tau, \quad (4.134)$$

选取  $C_0$  如同在(4.123)中和充分小的  $\varepsilon$  使得

$$\sup_{0 \leq t \leq T} [\|\nu\|_X + \|\nu_t\|_2^2 + \varepsilon] \leq \frac{\Omega}{2}.$$

由(4.133)和(4.134)得

$$y(t) \leq \frac{\Omega}{2} \int_0^t y(\tau) d\tau + Ce^{2\Omega t} [\|\nu(0)\|_{H^2}^2 + \|\nu_t(0)\|_{H^1}^2], \quad (4.135)$$

则由 Gronwall 不等式推出引理.

下面证明我们的主要结果.

**定理 4.14** 设  $(a, \eta)$  为涡旋使得

$$\langle \xi''(\nu_1), \nu_1 \rangle < 0, \quad (4.136)$$

对某个  $\nu_1 \in H^1(\mathbb{R}^2)$ , 则存在  $\varepsilon_0 > 0, C > 0$ , 对任何  $\delta > 0$ , 存在 Maxwell-Higgs 方程组的一族解  $\nu^\delta(t)$ , 使得  $W^\delta(0)$  的涡旋数为 0, 且

$$\|\nu^\delta(0)\|_X \leq \delta,$$

但

$$\sup_{0 \leq t \leq C|\ln \delta|} \|\nu^\delta(t)\|_X \geq \varepsilon_0, \quad (4.137)$$

于是我们说  $(a, \eta)$  依模  $X$  是不稳定的.

**证** 由定理 4.3, 存在线性化方程组(4.12), (4.13), (4.14) 的增长模  $\nu_0 e^{\omega t}$ ,  $\omega > 0$ ,  $\nu_0 \in H^2(\mathbb{R}^2)$ . 规范化  $\nu_0$ , 使得  $\|\nu_0\|_{H^2(\mathbb{R}^2)} = 1$ , 现解 Maxwell-Higgs 方程组具有一族初值  $\nu|_{t=0} = \delta\nu_0, \nu_t|_{t=0} = \delta\omega\nu_0$ , 从(4.52)可知  $a + W$  的涡旋数同于  $a$  的涡旋数. 用  $\nu^\delta(t)$  表示上述  $H^2$  解,  $T_\delta^0$  表示最大的  $H^2$  存在区间, 无损于一般性, 设  $C|\ln \delta| \leq T_\delta^0$ . 事实上, 我们断言: 如果  $C|\ln \delta| > T_\delta^0$ , 则有

$$\sup_{0 \leq t \leq C|\ln \delta|} \|\nu^\delta(t)\|_X = \infty, \quad (4.138)$$

因此定理(4.14)得证.

断言的证明. 如果此断言不真, 则  $\sup_{0 \leq t \leq C|\ln \delta|} \|\nu^\delta(t)\|_X < \infty$ , 由能量守恒(4.117)和(4.118)的第一个方程推出  $\|\nu\|_{H^1} + \|\nu_t\|_2$

是有界于  $[0, C|\ln \delta|]$ . 由引理 4.13 可知  $\|\nu\|_{H^2} + \|\nu_t\|_{H^1}$  也有界于  $[0, C|\ln \delta|]$ . 但  $T_\delta^0 < C|\ln \delta|$ . 这和  $T_\delta^0$  的意义矛盾.

现在  $T_\delta^0 \leq C|\ln \delta|$ , 相应的簇解  $\nu^\delta(t) = \nu(t)$  能写成

$$\nu(t) = \delta e^{i\omega t} \nu_0 + \int_0^t \mathcal{U}(t-\tau) \mathcal{V}(\nu) d\tau, \quad (4.139)$$

其中  $\mathcal{U}$  表示线性化 Maxwell-Higgs 方程组 (4.12), (4.13), (4.14) 的解算子,  $\mathcal{V}(\nu) = \left( \frac{i}{2} (\psi \partial_t \bar{\psi} - \bar{\psi} \partial_t \psi), N(\nu) \right)$ . 令  $\omega < \Omega < 2\omega$ ,

$$\begin{aligned} T &= \sup \{ s : \|\nu(t) - \delta \nu_0 e^{i\omega t}\|_{H^1} + \|\nu_t(t) - \omega \delta \nu_0 e^{i\omega t}\|_2 \\ &\leq \frac{1}{2} \delta e^{i\omega t} b \}, \end{aligned} \quad (4.140)$$

$0 \leq t \leq s, b = \|\nu_0\|_{H^1} + \|\omega \nu_0\|_{L^2}$ . 对  $0 \leq t \leq T$ , 有

$$\|\nu(t)\|_{H^1} + \|\nu_t(t)\|_2 \leq \frac{3}{2} e^{i\omega t} [\|\nu_0\|_{H^1} + \|\omega \nu_0\|_2]. \quad (4.141)$$

令

$$T^* = \sup \{ s : \|\nu(t)\|_X \leq \varepsilon, 0 \leq t \leq s, \quad (4.142)$$

选取  $\varepsilon$  充分小和应用引理 4.13,  $\Omega = \omega$  有

$$\begin{aligned} \|\nu(t)\|_\infty &\leq C \|\nu(t)\|_{H^1} \leq C e^{i\omega t} [\|\nu_0\|_{H^2} + \|\omega \nu_0\|_{H^1}] \\ &= C e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (4.143)$$

其中  $0 \leq t \leq \min(T, T^*)$ . 由线性化估计 (4.57)' 和 (4.142), 对  $0 \leq t \leq \min(T, T^*)$  有

$$\begin{aligned} &\|\nu(t) - \delta e^{i\omega t} \nu_0\|_{H^1} + \|\nu_t(t) - \delta \omega e^{i\omega t} \nu_0\|_2 \\ &\leq \int_0^t e^{\frac{3}{2}\omega(t-\tau)} \left[ \left\| \frac{i}{2} (\psi \partial_t \bar{\psi} - \bar{\psi} \partial_t \psi) \right\|_2 + \|\omega(\nu)\|_2 \right] d\tau \\ &\leq C \int_0^t e^{\frac{3}{2}\omega(t-\tau)} [\|\nu(\tau)\|_\infty \|\nu(\tau)\|_{H^1} \\ &\quad + \|\nu(\tau)\|_\infty^2 \|\nu(\tau)\|_2] d\tau \\ &\leq C \int_0^t e^{\frac{3}{2}\omega(t-\tau)} \|\nu(\tau)\|_\infty \|\nu(\tau)\|_{H^1} d\tau \\ &\leq C \int_0^t e^{\frac{3}{2}\omega(t-\tau)} (\delta e^{i\omega \tau}) (\delta e^{i\omega \tau}) d\tau \end{aligned}$$

$$\leq C(\delta b e^{\omega t})^2. \quad (4.144)$$

因此, 对  $0 \leq t \leq \min(T, T^*)$  有

$$\|\nu(t)\|_{H^1} + \|\nu_t(t)\|_2 \geq b \delta e^{\omega t} - C_1 (b e^{\omega t})^2, \quad (4.145)$$

其中常数  $C_1$  与  $\varepsilon, t$  无关. 我们选取  $T^{**}$  使得

$$\delta e^{T^{**}\omega} = \frac{1}{2bC_1}. \quad (4.146)$$

令  $0 < \varepsilon_0 < \min\left(\varepsilon, \frac{1}{2C_1}\right)$ . 现考虑三个数  $T, T^*, T^{**}$  为最小的情况.

(i) 如  $T < \min(T^*, T^{**})$ , 则有

$$\begin{aligned} & \|\nu(t) - \delta e^{\omega t} \nu_0\|_{H^1} + \|\nu_t(t) - \delta \omega e^{\omega t} \nu_0\|_2 \\ & \leq C_1 (\delta b e^{\omega t})^2 \leq C (\delta b e^{\omega T}) (\delta b e^{\omega T^{**}}) = \frac{1}{2} b \delta e^{\omega t}. \end{aligned} \quad (4.147)$$

它和(4.140)矛盾.

(ii)  $T^{**} \leq \min(T, T^*)$ , 则有

$$\|\nu(T^{**})\|_{H^1} + \|\nu_t(T^{**})\|_2 \geq \frac{1}{2} C_1 \delta b e^{\omega T^{**}} = \varepsilon_0. \quad (4.148)$$

最后, 如  $T^* \leq \min(T, T^{**})$ , 则有

$$\|\nu(t)\|_X \geq \varepsilon > \varepsilon_0, t \leq T^*.$$

由此推得我们的定理.

**推论 4.15** 如  $n > n_0, \beta > \beta_0$ , 则  $(a, \eta)$  为非线性不稳定的.

## 参 考 文 献

- [1] Z. M. Chen, K. H. Hoffmann and J. Liang, On a non-stationary Ginzburg-Landau superconductivity model, Math. Mech. Appl. Sci, 16(1993), 855—876.
- [2] Qiang Du, Global existence and uniqueness of solutions of the time-dependent Ginzburg-Landau model for superconductivity, Appl. Anal., 52(1994), 1—17.
- [3] Qi Tang, shouhong wang, Time-dependent Ginzburg-Landau equations of superconductivity, preprint.
- [4] K. H. Hoffmann and Lishang Jiang, Numerical studies of a non-stationary Ginzburg-Landau model for superconductivity Adv. Math. Sci. Appl. 5(1995), 363—389.

- [5] Zhiming Chen, K. H. Hoffmann and Lishang Jiang, On the Lawrence-Doniach model for Layered superconductors, *Euro. J. Appl. Math.* 8(1997), 369—387.
- [6] Y. Yang, Existence, regularity and asymptotic behavior of the solution to the Ginzburg-Landau equations on  $\mathbb{R}^3$ , *Comm. Math. phys.*, 123, 1989, 147—161.
- [7] Y. Yang, The existence of Ginzburg-Landau solution on the plane by a direct variational method, *Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Nonlinear*, 11(1994), 517—536.
- [8] Boling Guo, Guangwei Yuan, Cauchy problem for the Ginzburg-Landau equation for the superconductivity model, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 127A, 1997, 1181—1192.
- [9] Guo Boling, Wu Yonghui, Finite dimensional behavior of Ginzburg-Landau model for super-conductivity, *Prog. Nat. Sci.*, 5(1995), 6, 658—667.
- [10] Guo Boling, Gao Hongjun and Yuan Guangwei, Finite energy solution for the hyperbolic type Ginzburg-Landau system, *Pro. Nat. Sci.*, 7(1997), 4, 483—488.
- [11] Yan Guo, Instability of symmetric vortices with large charge and coupling Constant, *Comm. Pure. Appl. Math*, Vol.  $\mathbb{X}$ , 1996, 1051 - 1080.
- [12] E. M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of function (Princeton, NJ: Princeton University Press, 1970).
- [13] T. Colin, On the Cauchy problem for a nonlocal nonlinear Schrödinger-equation occurring in plasma physics, *Diff. Int. Equ.*, 6(1993), 1431—1450.
- [14] R. Taman, Infinite dimensional dynamical system in mechanical and physics, Springer verlag, New York. 1988.
- [15] D. Eardley, V. Moncrief, The global existence of Yang Mills-Higgs in  $M^{3+1}$ , *Comm. Math. phys.*, 83(1982), 171.
- [16] S. Klainerman, M. Macheden, on the Maxwell-Klein Gordon equation with finite energy, *Duke Math J.*, 74(1994), 19.
- [17] M. S. Berger, Y. Y. Chen, Symmetric vortices for the Ginzburg-Landau equations of superconductivity and the nonlinear desingularization phenomenon, *J. Funct. Anal*, 82 (1989), 259—295.
- [18] M. Reed, B. Simon, Methods of modern mathematical physics, vol. 4, Academic press, New York, 1978.

## 第五章 Ginzburg-Landau 模型方程

这一章主要讨论 Ginzburg-Landau 模型方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} = \Delta u_\epsilon + \frac{1}{\epsilon^2} u_\epsilon (1 - |u_\epsilon|^2), x \in \Omega, t > 0, \\ u_\epsilon(x, t) = g(x), x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u_\epsilon(x, 0) = u_0(x), x \in \Omega \end{cases} \quad (\text{I})$$

的定态方程的 Dirichlet 边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u_\epsilon = \frac{1}{\epsilon^2} u_\epsilon (1 - |u_\epsilon|^2), x \in \Omega, \\ u_\epsilon = g, x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{II})$$

当  $\epsilon \rightarrow 0$  时  $u_\epsilon$  的形态, 此时  $d = \deg(g, \partial\Omega)$  ( $g$  的 Brouwer 度或 Winding 数,  $g$  看成从  $\partial\Omega$  到  $S^1$  的一个映照) 起着十分重要的作用.

当  $d = 0$  时, 我们将证明  $u_\epsilon \rightarrow u_0$  依  $C^1(\Omega)$  模, 甚至依  $C_{\text{loc}}^k(\Omega)$  模,  $\forall k, u_0$  为一个调和映照.

当  $d \neq 0$  时, 情况比较复杂, 因此时  $\int |\nabla u_\epsilon|^2 \rightarrow +\infty$ , 此时仅能存在一个子序列  $u_{\epsilon_n}$  在  $\Omega - S$  的紧集上一致收敛, 于此奇性集  $S$  精确地由  $\Omega$  内  $|d|$  点组成. 为了进一步讨论  $u_\epsilon$  的形态, 类似于调和映照的热流方程, 即研究问题 (I) 的解  $u_\epsilon(x, t)$ , 当  $t \rightarrow \infty$  时以及  $\epsilon \rightarrow 0$  时的形态. 这一章的主要内容可参见文献 [1] 以及 [2—6] 等.

### §1 $\deg(g, \partial\Omega) = 0$ 的情形

现设

$$\deg(g, \partial\Omega) = 0, \quad (1.1)$$

由此我们可作  $g$  的光滑延拓:  $\bar{\Omega} \rightarrow S^1$ . 记

$H_g^1(\Omega; S^1) = \{u \in H^1(\Omega; S^1); u = g, \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上}\},$   
考虑极小化问题

$$\min_{u \in H_g^1(\Omega; S^1)} \int |\nabla u|^2. \quad (1.2)$$

设  $u_0$  为 (1.2) 的极小元. 由 [7] 中 C. Marrey 的古典结果, 可知  $u_0(x)$  为光滑的且满足

$$\begin{aligned} -\Delta u_0 &= u_0 |\nabla u_0|^2, & x \in \Omega, \\ |u_0| &= 1, & x \in \Omega, \\ u_0 &= g, & x \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (1.3)$$

且  $u_0$  为问题 (1.2) 的惟一解, 我们有如下结果.

**定理 1.1** 当  $\epsilon \rightarrow 0$  时, 我们有

$$u_\epsilon \rightarrow u_0, \text{ 在 } C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}) \text{ 内, } \forall \alpha < 1, \quad (1.4)$$

$$\|\Delta u_\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C, \quad (1.5)$$

$$\|u_\epsilon - u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\epsilon^2. \quad (1.6)$$

对于每个紧子集  $K \subset \Omega$ , 和每个正整数  $k$ ,

$$\|u_\epsilon - u_0\|_{C^k(K)} \leq C_{K,k}\epsilon^2, \quad (1.7)$$

$$\left\| \frac{1 - |u_\epsilon|^2}{\epsilon^2} - |\nabla u_0|^2 \right\|_{C^k(K)} \leq C_{k,k}\epsilon^2. \quad (1.8)$$

定理 1.1 的证明需要几个命题.

**命题 1.2** 当  $\epsilon \rightarrow 0$  时, 则有

$u_\epsilon \rightarrow u_0$ , 在  $H^1$  中强收敛.

**证** 因  $u_0 \in H_g^1(\Omega; S^1)$ , 我们有

$$\frac{1}{2} \int |\nabla u_\epsilon|^2 + \frac{1}{4\epsilon^2} \int (|u_\epsilon|^2 - 1)^2 \leq \frac{1}{2} \int |\nabla u_0|^2, \quad (1.9)$$

因此,  $u_\epsilon$  在  $H^1$  中有界. 于是

$u_{\epsilon_n} \rightarrow u$  在  $H^1$  中弱收敛.

由 (1.9) 和下半连续性可得

$$\int |\nabla u|^2 \leq \int |\nabla u_0|^2. \quad (1.10)$$



另一方面,由(1.9)有

$$\int (|u_\epsilon|^2 - 1)^2 \leq C\epsilon^2,$$

故  $|u| = 1$ . 因此  $u \in H^1_k(\Omega; S^1)$ . 基于(1.10),  $u$  为(1.2)的极小元, 即  $u = u_0$ , 从

$$\int |\nabla u_\epsilon|^2 \leq \int |\nabla u_0|^2$$

推出  $u_\epsilon \rightarrow u$  在  $H^1$  中强收敛, 由  $u_0$  的唯一性,  $u_\epsilon$  的一切序列均收敛.

**命题 1.3**  $|u_\epsilon| \leq 1, x \in \Omega$ .

**证** 我们有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta |u_\epsilon|^2 &= u_\epsilon \cdot \Delta u_\epsilon + |\nabla u_\epsilon|^2 \\ &= \frac{1}{\epsilon^2} |u_\epsilon|^2 (|u_\epsilon|^2 - 1) + |\nabla u_\epsilon|^2 \\ &\geq \frac{1}{\epsilon^2} |u_\epsilon|^2 (|u_\epsilon|^2 - 1). \end{aligned}$$

令  $v = |u_\epsilon|^2 - 1$  满足

$$\begin{aligned} -\Delta v + a(x)v &\leq 0, & x \in \Omega, \\ v(x) &= 0, & x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

其中  $a(x) = \frac{2}{\epsilon} |u_\epsilon|^2 > 0$ , 由极大值原理推得  $v \leq 0, x \in \Omega$ , 命题得证.

**命题 1.4** 设  $u_\epsilon$  为

$$\min_{u \in H^1_k} E_\epsilon(u) \quad (1.11)$$

的极小元, 其中

$$E_\epsilon(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\epsilon^2} \int_\Omega (|u|^2 - 1)^2, \quad (1.12)$$

则

$$\int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \mathbf{n}} \right|^2 \leq C,$$

其中常数  $C$  仅依赖于  $g$  和  $\Omega$ ,  $\mathbf{n}$  为  $\partial\Omega$  的单位外法向量.

证  $\partial\Omega$  单位外法向量  $\mathbf{n}$  扩充成  $\Omega$  的光滑向量场  $V = (v_1, v_2)$ , 乘 (II) 第一式以  $V \cdot \nabla u_\epsilon = V_1 \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_2}$ , 为简单计, 忽略  $\epsilon$ , 注意到左端有

$$\int_{\Omega} \Delta u (V \cdot \nabla u) = \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|^2 - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 u_{x_i} (V \cdot \nabla u)_{x_i},$$

因  $\int_{\Omega} |\nabla u_\epsilon|^2$  保持有界,  $\epsilon \rightarrow 0$ , 我们有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_{x_i} (V_1 u_{x_1} + V_2 u_{x_2})_{x_i} &= \int_{\Omega} u_{x_i} (V_1 u_{x_1 x_i} + V_2 u_{x_2 x_i}) + O(1) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} V_1 (|u_{x_i}|^2)_{x_1} + V_2 (|u_{x_i}|^2)_{x_2} + O(1) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (u_{x_i})^2 + O(1). \end{aligned}$$

因此

$$\int \Delta u (V \cdot \nabla u) = \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|^2 - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 + O(1).$$

另一方面, 右端为

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\Omega} u (1 - |u|^2) (V \cdot \nabla u) &= \frac{1}{2\epsilon^2} \int_{\Omega} (1 - |u|^2) \sum_{i=1}^2 V_i (|u|^2)_{x_i} \\ &= \frac{1}{4\epsilon^2} \int_{\Omega} (1 - |u|^2)^2 \operatorname{div} V = O(1) \quad \text{由(1.9)),} \end{aligned}$$

由此推出

$$\int_{\partial\Omega} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|^2 - \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \right) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|^2 - \left| \frac{\partial u}{\partial \tau} \right|^2 \right) = O(1),$$

其中  $\frac{\partial}{\partial \tau}$  表示切向导数, 因  $\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial g}{\partial \tau}$ , 于是命题 1.4 成立.

为了证明定理 1.1, 我们分二部分证明: A. 内估计, B. 边界估计.

A. 内估计

step A.1  $|\nabla u_\varepsilon| \leq \frac{C_k}{\varepsilon}$ , 在任意闭子集  $K \subset \Omega$  上.

证 我们先证一个断言.

断言: 设  $u$  满足

$$-\Delta u = f, x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N,$$

则有

$$|\nabla u(x)|^2 \leq C(\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{1}{\text{dist}^2(x, \partial\Omega)} \|u\|_{L^\infty(\Omega)}^2),$$

$$x \in \Omega, \quad (1.13)$$

其中  $C$  为常数仅依赖于  $N$ .

证 为简单计, 设  $0 \in \Omega$ , 令  $d = \text{dist}(0, \partial\Omega)$ , 证(1.13) 在  $x = 0$  上成立. 设  $0 < \lambda \leq d$  为一待定常数. 函数

$$v(y) = u(\lambda y)$$

定义在球  $B(0, 1) = B_1$  上, 满足

$$-\Delta v(y) = \lambda^2 f(y), \quad \text{in } B_1. \quad (1.14)$$

从标准的椭圆型方程估计在  $B_1$  上有

$$|\nabla v(0)| \leq C(\lambda^2 \|f(\lambda y)\|_{L^\infty(B_1)} + \|v\|_{L^\infty(B)}),$$

其中  $C$  仅依赖于  $N$ , 特别有

$$\lambda |\nabla u(0)| \leq C(\lambda^2 \|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \|u\|_{L^\infty(\Omega)}). \quad (1.15)$$

现分两种情况:

$$(i) \quad \left( \frac{\|u\|_{L^\infty}}{\|f\|_{L^\infty}} \right)^{\frac{1}{2}} \leq d,$$

此时利用(1.15), 取

$$\lambda = \left[ \frac{\|u\|_{L^\infty}}{\|f\|_{L^\infty}} \right]^{\frac{1}{2}},$$

即得

$$|\nabla u(0)| \leq 2C \|f\|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}},$$

因此 在  $x = 0(1.13)$  成立;

$$(ii) \quad \left[ \frac{\|u\|_{L^\infty}}{\|f\|_{L^1}} \right]^{\frac{1}{2}} > d,$$

此时利用(1.15),  $\lambda = d$ , 有

$$\begin{aligned} |\nabla u(0)| &\leq C \left[ d \|f\|_{L^1} + \frac{1}{d} \|u\|_{L^\infty} \right] \\ &\leq C \left[ \|f\|_{L^1} \|u\|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{d} \|u\|_{L^\infty} \right], \end{aligned}$$

此时(1.13)也成立.

由此断言及命题(1.3)  $|u_\epsilon| \leq 1$  代入  $f$ , 即得  $|\nabla u_\epsilon| \leq \frac{C_K}{\epsilon}$ .

step A.2  $|u_\epsilon| \rightarrow 1$ , 在任一紧子集  $K \subset \Omega$  上一致收敛.

证 由(1.9)及  $u_\epsilon \rightarrow u_0$  在  $H^1$  中可知

$$\frac{1}{\epsilon^2} \int_\Omega (|u_\epsilon|^2 - 1)^2 \rightarrow 0, \quad (1.16)$$

令  $x_0 \in K, \alpha = |u_\epsilon(x_0)|$ , 由 step 1 有

$$|u_\epsilon(x)| \leq \alpha + \frac{C}{\epsilon} \rho, \quad |x - x_0| < \rho < d = \text{dist}(K, \partial\Omega),$$

因此

$$1 - |u_\epsilon(x)| \geq 1 - \alpha - \frac{C}{\epsilon} \rho, \text{ 在 } B(x_0, \rho) \text{ 上,}$$

$$(1 - |u_\epsilon(x)|)^2 \geq \left(1 - \alpha - \frac{C}{\epsilon} \rho\right)^2, \quad \frac{C\rho}{\epsilon} < 1 - \alpha.$$

因

$$(1 - |u_\epsilon(x)|^2)^2 \geq (1 - |u_\epsilon(x)|)^2,$$

由(1.16)得

$$\epsilon^2 O(1) = \int_{B(x_0, \rho)} (1 - |u_\epsilon|^2)^2 \geq \pi \rho^2 \left(1 - \alpha - \frac{C\rho}{\epsilon}\right)^2.$$

选取

$$\rho = \frac{\epsilon(1 - \alpha)}{2C} < d \quad (\epsilon \text{ 充分小}),$$

于是有

$$\epsilon^2 O(1) \geq \pi \frac{\epsilon^2 (1-\alpha)^2}{4C^2} \frac{(1-\alpha)^2}{4}.$$

因此

$$(1-\alpha)^4 \leq O(1),$$

即  $|u_\epsilon| \rightarrow 1$  在  $\Omega$  的紧子集上一致成立.

step A.3 令

$$A_\epsilon = \frac{1}{2} |\nabla u_\epsilon|^2,$$

则有

$$-\Delta A_\epsilon + \frac{1}{2} |D^2 u_\epsilon|^2 \leq \frac{4}{|u_\epsilon|^2} A_\epsilon^2, \quad x \in \Omega, \quad (1.17)$$

其中  $|D^2 u_\epsilon|^2 = \sum_{i,j=1}^2 \left( \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2$ .

证 忽略  $\epsilon$ ,  $A_\epsilon = \frac{1}{2} \sum \sum u_i^a u_i^a$ ,  
 $\partial_j A_\epsilon = \sum \sum u_{ja}^a u_i^a$ ,  
 $\partial_j (\partial_j A_\epsilon) = \sum \sum u_{ja}^a u_{ja}^a + \sum \sum u_i^a u_{ji}^a$   
 $= |D^2 u|^2 + \sum \sum u_i^a (u_{jj}^a)_i$ .

即有

$$\Delta A = |D^2 u|^2 + \sum_{i,j=1,2} u_{x_j} \Delta(u_{x_i}), \quad (1.18)$$

再利用 Euler 方程(II)可得

$$\Delta u_{x_i} = u_{x_i} \cdot \frac{(|u|^2 - 1)}{\epsilon^2} + \frac{2}{\epsilon^2} u(u \cdot u_{x_i}),$$

代入(1.18)得

$$\Delta A = |D^2 u|^2 + |\nabla u|^2 \frac{(|u|^2 - 1)}{\epsilon^2} + \frac{2}{\epsilon^2} (u \cdot \nabla u)^2.$$

于是

$$\nabla A \geq |D^2 u|^2 - |\nabla u|^2 \frac{|\Delta u|}{|u|}.$$

因  $|\Delta u| \leq \sqrt{2} |D^2 u|$ , 有

$$-\Delta A + |D^2 u|^2 \leq 2\sqrt{2}A \frac{|D^2 u|}{|u|} \leq \frac{1}{2} |D^2 u|^2 + 4 \frac{A^2}{|u|^2}.$$

step A.4

$$\{u_\varepsilon\} \text{ 在 } H_{\text{loc}}^2 \text{ 中有界,} \quad (1.19)$$

$$\{\nabla u_\varepsilon\} \text{ 在 } L_{\text{loc}}^\infty \text{ 中有界.} \quad (1.20)$$

证 给定  $\delta > 0$  (待定), 选取其充分小使得

$$\int_{B(x_0, R)} |\nabla u_\varepsilon|^2 < \delta, \forall x_0 \in \Omega, \forall \varepsilon \quad (1.21)$$

(这里积分理解为在  $\Omega \cap B(x_0, R)$  上), 这是由于命题 1.2,  $u_\varepsilon \rightarrow u_0$  在  $H^1(\Omega)$  中强收敛.

固定点  $x_0 \in \Omega$ , 令  $d = \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$ ,  $\zeta(x)$  为光滑函数, 其支集在  $B(x_0, r)$  中,  $r = \min(d/2, R)$ , 使得在  $B(x_0, r/2)$  中  $\zeta = 1$ . 乘(1.17) 以  $\zeta^2$  得

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \zeta^2 |D^2 u_\varepsilon|^2 \leq 4 \int_{\Omega} \frac{\zeta^2}{|u_\varepsilon|^2} A_\varepsilon^2 + \int_{\Omega} (\Delta \zeta)^2 A_\varepsilon. \quad (1.22)$$

因  $u_\varepsilon \rightarrow 1$  在  $\Omega$  的紧子集上一致成立, 我们有, 对  $\varepsilon$  充分小,

$$|u_\varepsilon| > \frac{1}{2} \quad \text{在 } B(x_0, r) \text{ 中.} \quad (1.23)$$

因此我们有

$$\int_{\Omega} \zeta^2 |D^2 u_\varepsilon|^2 \leq C \int_{\Omega} \zeta^2 |\nabla u_\varepsilon|^4 + C(u_\varepsilon \text{ 在 } H^1 \text{ 中有界}),$$

因  $W^{1,1}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ , 则

$$\left[ \int_{\Omega} \varphi^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq C \int_{\Omega} |\nabla \varphi| + |\varphi|, \forall \varphi \in W^{1,1}(\Omega). \quad (1.24)$$

在(1.24)中, 置  $\varphi = \zeta |\nabla u_\varepsilon|^2$ , 可得

$$\int_{\Omega} \zeta^2 |\nabla u_\varepsilon|^4 \leq C \left[ \int_{\Omega} \zeta |\nabla u_\varepsilon| |D^2 u_\varepsilon|^2 + C \right].$$

于此我们多次用到  $u_\varepsilon$  在  $H^1$  中的有界性. 由 Cauchy-Schwartz 不等式和(1.21) 得

$$\int_{\Omega} \zeta^2 |\nabla u_{\epsilon}|^4 \leq C \delta \int_{\Omega} \zeta^2 |D^2 u_{\epsilon}|^2 + C.$$

如选取  $\delta$  充分小, 使吸收  $\int_{\Omega} \zeta^2 |\nabla u_{\epsilon}|^4$  于 (1.24) 左端, 即得

$$\int_{\Omega} \zeta^2 |D^2 u_{\epsilon}|^2 \leq C.$$

于是证明了 (1.19).

从 (1.19) 和 Sobolev 嵌入可知  $\nabla u_{\epsilon}$  在  $L_{\text{loc}}^q(\Omega)$  中有界,  $\forall q < \infty$ , 再回到 (1.17) 有

$$-\Delta A_{\epsilon} < f_{\epsilon},$$

其中  $f_{\epsilon}$  在  $L_{\text{loc}}^q(\Omega)$  中有界,  $\forall q < \infty$ , 这就由标准的椭圆型方程理论推出  $(A_{\epsilon})$  在  $L_{\text{loc}}^{\infty}(\Omega)$  中有界.

step A.5 我们有

$$\frac{1}{\epsilon^2}(1 - |u_{\epsilon}|^2) \text{ 在 } L_{\text{loc}}^{\infty} \text{ 中有界,} \quad (1.25)$$

$$\Delta u_{\epsilon} \text{ 在 } L_{\text{loc}}^{\infty} \text{ 中有界.} \quad (1.26)$$

证 如 (1.25) 成立, 则

$$\|\Delta u_{\epsilon}\| \leq \|u_{\epsilon}(1 - |u_{\epsilon}|^2)/\epsilon^2\|_{L^{\infty}} \leq C,$$

即 (1.26) 成立. 为证 (1.25) 成立, 需要如下引理.

引理 1.5 设  $w(r)$  为

$$\begin{cases} -\epsilon^2 \Delta w + w = 0, x \in B(0, R), \\ w = 1, x \in \partial B(0, R) \end{cases}$$

的解, 则对  $\epsilon < \frac{3}{4}R$ , 有

$$w(r) \leq e^{\frac{1}{4\epsilon R}(r^2 - R^2)}, r \in B(0, R).$$

证 容易计算函数  $e^{\frac{1}{4\epsilon R}(r^2 - R^2)}$  为上解.

现证 (1.25), 我们有

$$\begin{aligned} \Delta |u_{\epsilon}|^2 &= \nabla(\nabla |u_{\epsilon}|^2) = \nabla(\nabla(u_{\epsilon} \cdot u_{\epsilon})) \\ &= 2(\nabla(u_{\epsilon} \nabla u_{\epsilon})) = 2u_{\epsilon} \Delta u_{\epsilon} + 2|\nabla u_{\epsilon}|^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\epsilon^2} |u_\epsilon|^2 (|u_\epsilon|^2 - 1) + 2 |\nabla u_\epsilon|^2.$$

于是有

$$\frac{1}{2} \Delta |u_\epsilon|^2 = \frac{1}{\epsilon^2} |u_\epsilon|^2 (|u_\epsilon|^2 - 1) + |\nabla u_\epsilon|^2. \quad (1.27)$$

令  $K$  为  $\Omega$  的一个紧子集,  $d = \text{dist}(K, \partial\Omega)$ . 设  $x_0 = 0 \in K$ , 对  $\epsilon$  充分小, 我们有

$$|u_\epsilon| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x \in B\left(0, \frac{d}{2}\right).$$

于是由 step A.4 和 (1.27) 有

$$\Delta |u_\epsilon|^2 + \frac{1}{\epsilon^2} (1 - |u_\epsilon|^2) \leq C, \quad x \in B\left(0, \frac{d}{2}\right).$$

置  $\varphi = 1 - |u_\epsilon|^2$ , 可得

$$-\epsilon^2 \Delta \varphi + \varphi \leq \epsilon^2 C, \quad x \in B\left(0, \frac{d}{2}\right).$$

应用引理 1.4 和最大值原理可得

$$\varphi \leq \epsilon^2 C + e^{\frac{1}{2\epsilon d}} \left(x^2 - \frac{d^2}{4}\right),$$

特别有

$$\frac{1}{\epsilon^2} \varphi(0) \leq C + \frac{1}{\epsilon^2} e^{-\frac{d}{8\epsilon}}.$$

这就证明了 (1.25).

## B. 边界估计

step B.1 设  $u_\epsilon$  为 (II) 的解, 则

$$|\nabla u_\epsilon| \leq \frac{C}{\epsilon}, \quad x \in \Omega, \quad (1.28)$$

其中  $C$  仅依赖于  $g$  和  $\Omega$ .

证 记  $u_\epsilon = v_\epsilon + w$ , 其中  $v_\epsilon$  为定解问题

$$\begin{cases} -\Delta v_\epsilon = \frac{1}{\epsilon^2} u_\epsilon (1 - |u_\epsilon|^2), & x \in \Omega, \\ v_\epsilon = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的解.  $w$  为定解问题



$$\begin{cases} -\Delta w = 0, & x \in \Omega, \\ w = g, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

我们需要如下引理进行估计.

**引理 1.6** 设  $u$  满足

$$\begin{cases} -\Delta u = 1, & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.29)$$

其中  $\Omega$  为光滑有界区域, 则有

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \leq C \|f\|_{L^1(\Omega)} \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad (1.30)$$

其中  $C$  仅依赖于  $\Omega$ .

**证** 从椭圆型方程理论,

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^1(\Omega)}. \quad (1.31)$$

另一方面, 如  $K$  为  $\Omega$  中的紧子集, 则由 (1.13) 联合 (1.31) 得

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(K)} \leq C_K \|f\|_{L^1(\Omega)} \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad (1.32)$$

因此仅需估计  $\nabla u$  在靠近边界上的界. 在靠近边界点  $x_0$  的局部坐标变换之后, 方程 (1.29) 变为

$$\begin{cases} -\sum \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = f, & x \in B_R^+ = \{x \in B_R, x_N > 0\} \\ u = 0, & x \in B_R \cap \{x_N = 0\}, \end{cases} \quad (1.33)$$

其中  $a_{ij}(x)$  为光滑的, 具有一致椭圆型系数 (它们仅依赖于  $\partial\Omega$ ) 和  $R$  能取定, 与  $x_0$  无关.

令

$$v(y) = u(\lambda y + \xi), \text{ 在 } B_1^+ \text{ 内,}$$

其中  $0 < \lambda \leq \frac{R}{2}$  待定,  $\xi$  为在  $B_{R/2} \cap \{Y_N = 0\}$  中的任意点. 函数  $v$  满足

$$\begin{cases} -\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial y_j} \left( a_{ij}(\lambda y + \xi) \frac{\partial v}{\partial y_i}(y) \right) = \lambda^2 f(\lambda y + \xi), & y \in B_1^+, \\ v = 0, & y \in B_1 \cap \{Y_N = 0\}. \end{cases}$$

标准的椭圆型方程在  $B_1^+$  中的估计推出

$$\|\nabla v\|_{L^\infty(B_1^+)} \leq C(\lambda^2 \|f(\lambda y + \xi)\|_{L^\infty(B_1^+)} + \|v\|_{L^\infty(B_1^+)}), \quad (1.34)$$

其中  $C$  依赖于  $a_{ij}(\lambda y + \xi)$  的椭圆型常数和  $\|a_{ij}(\lambda y + \xi)\|_{C^1(B_1^+)}$ .

因所有量被控制得与  $\lambda$  和  $\xi$  无关,  $\lambda \leq \frac{R}{2}$ ,  $|\xi| \leq \frac{R}{2}$ , 我们有

$$\lambda \|\nabla u\|_{L^\infty(\xi + B_{\lambda/2}^+)} \leq C(\lambda^2 \|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \|u\|_{L^\infty(\Omega)}). \quad (1.35)$$

我们分两种情况讨论.

$$(i) \quad \left[ \frac{\|u\|_{L^\infty}}{\|f\|_{L^\infty}} \right]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{R}{2}.$$

$$\text{应用(1.35), } \lambda = \left[ \frac{\|u\|_{L^\infty}}{\|f\|_{L^\infty}} \right]^{\frac{1}{2}} \text{ 得}$$

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(\xi + B_{\lambda/2}^+)} \leq C \|f\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{1}{2}}.$$

因  $\xi$  是任意的,  $|\xi| \leq \frac{R}{2}$ , 推出

$$|\nabla u(x)| \leq C \|f\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall x \in (x', x_N),$$

$$|x'| \leq \frac{R}{2}, \quad 0 \leq x_N \leq \frac{\lambda}{2}.$$

$u$  回到  $\Omega$  上, 我们已经证明

$$|\nabla u(x)| \leq C \|f\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall x \in \Omega, \text{dist}(x, \partial\Omega) \leq \frac{\lambda}{K}.$$

其中  $K$  是某个大的常数, 它仅依赖于  $\Omega$ . 另一方面, 如  $\text{dist}(x, \partial\Omega)$

$> \frac{\lambda}{K}$ , 则由(1.13) 推得

$$\begin{aligned} |\nabla u(x)|^2 &\leq C \left( \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \left\| \frac{K^2}{x^2} \right\| \|u\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right) \\ &= C(1 + k^2) \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^\infty(\Omega)}. \end{aligned}$$

因此两种情形(1.30) 均成立.

$$(ii) \quad \left[ \frac{\|u\|_{L^\infty}}{\|f\|_{L^\infty}} \right]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{R}{2}.$$

此时应用(1.35),  $\lambda = \frac{R}{2}, \xi = 0$  有

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|_{L^\infty(B_{R/2}^+)} &\leq C\left(R\|f\|_{L^s(\Omega)} + \frac{1}{R}\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\right) \\ &\leq C\left(2\|f\|_{L^s(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\|u\|_{L^s(\Omega)}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{R}\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\right) \\ &\leq C\|f\|_{L^s(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\|u\|_{L^s(\Omega)}^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

$u$  回到  $\Omega$  得

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^s(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\|u\|_{L^s(\Omega)}^{\frac{1}{2}},$$

其中  $\Omega$  为  $\partial\Omega$  的某个固定的邻域, 这就完成了引理的证明, 因为我们已有内估计(1.32).

由引理 1.6 和命题 1.3,  $\|u_\epsilon\| \leq 1$  有

$$\|\nabla v_\epsilon\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\epsilon}\|v_\epsilon\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\epsilon}(\|u_\epsilon\|_{L^s} + \|w\|_{L^\infty}) \leq \frac{C}{\epsilon},$$

因此

$$\|\Delta u_\epsilon\|_{L^\infty} \leq \|\Delta V_\epsilon\|_{L^\infty} + \|\Delta W\|_{L^s} \leq \frac{C}{\epsilon} + C.$$

由此得(1.28).

step B.2  $\|u_\epsilon\| \rightarrow 1$ , 在  $\bar{\Omega}$  上一致.

证 如同 step A.2 所证, 取  $x_0 \in \bar{\Omega}$  及利用

$$\text{meas}(\Omega \cap B(x_0, \rho)) \geq C\rho^2$$

即可. 其中常数  $C$  仅依赖于  $\partial\Omega$  的光滑性.

step B.3  $u_\epsilon$  在  $H^2(\Omega)$  中有界.

证 我们在 step A.4 中已知  $\{u_\epsilon\}$  在  $H_{\text{loc}}^2(\Omega)$  中有界. 因此我们只需在靠近边界上建立  $H^2$  估计, 令  $x_0 \in \partial\Omega$ , 为方便计, 忽略  $\epsilon$ .

先设靠近  $x_0$  处为平坦的, 即

$$\Omega \cap B(x_0, d) = \{(x_1, x_2), x_2 > 0\} \cap B(x_0, d), d > 0,$$

令  $\zeta$  为一光滑函数, 具有支集在  $B(x_0, r)$  中,  $r = \min(d, R)$ , 使得在  $B(x_0, r/2)$  上,  $\zeta = 1$ , 乘(1.17)以  $\zeta^2$ , 再在  $\Omega$  上积分得

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \zeta^2 |D^2 u|^2 \leq 4 \int_{\Omega} \frac{\zeta^2}{|u_{\epsilon}|^2} A^2 + \int_{\Omega} \zeta^2 \Delta A. \quad (1.36)$$

由 step B.2,  $|u_{\epsilon}| \rightarrow 1$  在  $\bar{\Omega}$  上一致收敛且对  $\epsilon$  充分小,

$$|u_{\epsilon}| \geq \frac{1}{2}, \text{ 在 } \Omega \text{ 上.} \quad (1.37)$$

由(1.36), (1.37) 可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \zeta^2 |D^2 u|^2 &\leq 4 \int_{\Omega} \zeta^2 |\nabla u|^4 + \int_{\{x_2=0\}} \zeta^2 \frac{\partial A}{\partial x_2} \\ &\quad + \int_{\{x_2=0\}} \frac{\partial \zeta^2}{\partial x_2} A + \int_{\Omega} \Delta \zeta^2 A. \end{aligned} \quad (1.38)$$

(1.38) 右端最后两个积分由命题 1.4 和(1.9) 知是有界的, 我们断言

$$\int_{\{x_2=0\}} \zeta^2 \frac{\partial A}{\partial x_2} \text{ 是有界的.} \quad (1.39)$$

事实上, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} A &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} |\nabla u|^2 = (u_{x_1} u_{x_1 x_2} + u_{x_2} u_{x_2 x_2}) \\ &= (u_x u_{x_1 x_2} - u_{x_2} \cdot u_{x_1 r_1}). \end{aligned}$$

这是因为在  $\partial\Omega$  上,  $\Delta u = \frac{1}{\epsilon^2} u (|u|^2 - 1) = 0$ . 因此

$$\begin{aligned} \int_{\{x_2=0\}} \zeta^2 \frac{\partial A}{\partial x_2} &= \int_{\{x_2=0\}} \zeta^2 (g_{x_1} u_{x_1 x_2} - g_{x_1 x_2} u_{x_2}) \\ &= -2 \int_{\{x_2=0\}} u_{x_2} (\zeta^2 g_{x_1 x_1} + \zeta \zeta_{x_1} g_{r_1}). \end{aligned}$$

由命题 1.4 可知, 上面等式右端是有界的.

于是我们已证

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \zeta^2 |D^2 u|^2 \leq 4 \int_{\Omega} \zeta^2 |\nabla u|^4 + C.$$

和 step A.4 相同的方法可证

$$\int_{\Omega} \zeta^2 |D^2 u|^2 \leq C.$$

对于一般情况,即  $\Omega$  在靠近  $x_0$  不是平坦的,我们引入局部坐标,把边界拉直,在新坐标下函数  $u$  变为  $\bar{u}$ ,定义在

$$U = \{(x_1, x_2); x_2 > 0\} \cap B(0, d)$$

上,选取坐标变换,  $(x_1, x_2) = (x_1, x_2 + h(x_1))$ , 其中  $h$  表示局部  $\partial\Omega$ , 方程 II 变为

$$\begin{cases} L\bar{u} = \frac{1}{\epsilon^2} \bar{u} (1 - |\bar{u}|^2), & x \in U, \\ \bar{u} = \bar{g}, & x \in [x_2 = 0] \cap \partial U. \end{cases} \quad (1.40)$$

其中  $L = \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j})$ , 且

$$a_{11} = 1, a_{12} = a_{21} = h', a_{22} = 1 + h'^2.$$

再令

$$A = \frac{1}{2} |\nabla \bar{u}|^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 (\bar{u}_{x_k})^2,$$

其中  $\nabla$  表示在新坐标  $(x_1, x_2)$  中的梯度, 我们进行如同 step A. 3 的计算, 不同的是对算子  $L$ , 为简单计, 忽略求和号, 并写  $u$  代替  $\bar{u}$ .

$$LA = a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} u_{x_k} + u_{x_k} \cdot L(u_{x_k}). \quad (1.41)$$

(1.40) 第一个方程对  $x_k$  微分可得

$$-L(u_{x_k}) = (a_{ijx_k} u_{x_i}) x_j + \frac{1}{\epsilon^2} u_{x_k} (1 - |u|^2) - \frac{2}{\epsilon^2} u (u \cdot u_{x_k}), \quad (1.42)$$

代入(1.41)得

$$\begin{aligned} LA &\geq \alpha |D^2 u|^2 + \frac{1}{\epsilon^2} |\nabla u|^2 (|u|^2 - 1) \\ &\quad - C |\nabla u| (|\nabla u| + |D^2 u|), \end{aligned} \quad (1.43)$$

其中  $\alpha$  表示椭圆型常数,  $C$  依赖于  $\|a_{ij}\|_{C^2}$ . 于是

$$\begin{aligned} LA &\geq \frac{\alpha}{2} |D^2 u|^2 + \frac{1}{\epsilon^2} |\nabla u|^2 (|u|^2 - 1) - C |\nabla u|^2 \\ &\geq \frac{\alpha}{2} |D^2 u|^2 - |\nabla u|^2 - \frac{tu}{|u|} - C |\nabla u|^2. \end{aligned}$$

因

$$|Lu| \leq C(|D^2u| + |\nabla u|), \quad (1.44)$$

我们有

$$\begin{aligned} -LA + \frac{\alpha}{2} |D^2u|^2 &\leq \frac{C}{|u|} |\nabla u|^2 (|D^2u| + |\nabla u|) + C |\nabla u|^2 \\ &\leq \frac{\alpha}{4} |D^2u|^2 + C |\nabla u|^4 + C, \end{aligned}$$

其中用到了 step B.2 和 Young 不等式. 这样我们有

$$-LA + \frac{\alpha}{4} |D^2u|^2 \leq C |\nabla u|^4 + C. \quad (1.45)$$

于是

$$\frac{\alpha}{4} \int_U \zeta^2 |D^2u|^2 \leq C \int_U \zeta^2 |\nabla u|^4 + \int_U \zeta^2 LA. \quad (1.46)$$

最后我们断言

$$\left| \int_U \zeta^2 LA \right| \leq C. \quad (1.47)$$

事实上, 我们有

$$\begin{aligned} \int_U \zeta^2 LA &= \int_U AL(\zeta^2) + 2 \int_{[x_2=0]} (\zeta^2)_{,x_1} a_{12} A + \int_{[x_2=0]} \zeta^2 (a_{12})_{x_1} A \\ &\quad - \int_{[x_2=0]} a_{22} \zeta^2 (A)_{x_2} + \int_{[x_2=0]} a_{22} (\zeta^2)_{x_2} A. \end{aligned} \quad (1.48)$$

在(1.48)右端中的所有积分, 除了  $\int_{[x_2=0]} a_{22} \zeta^2 (A)_{x_2}$  外, 由于  $u$  在

$H^1(\Omega)$  中有界和命题 1.4, 因此它们均为有界.

记

$$Ax_2 = u_{x_1} u_{x_1 x_2} + u_{x_2} u_{x_2 x_2},$$

在  $x_2 = 0$  上, 由(1.40),  $Lu = 0$ , 因此

$$(a_{22} u_{x_2})_{x_2} = -(a_{11} u_{x_1})_{x_1} - (a_{12} u_{x_1})_{x_2} - (a_{21} u_{x_2})_{x_1}.$$

利用  $u_{x_1 x_2} u_{x_2} = \frac{1}{2} (u_{x_2}^2)_{x_1}$  和简单计算, 对  $x_1$  的几项分部积分和命题 1.4, 可知积分  $\int_{[x_2=0]} a_{22} \zeta^2 (A)_{x_2}$  是有界的. 这就完成了(1.47)

的证明.

最后回到(1.46), 利用(1.47) 有

$$\frac{\alpha}{4} \int_U \xi^2 |D^2 u|^2 \leq C \int_U \xi^2 |\nabla u|^4 + C. \text{ 如同 step A.4 所证, 可得}$$

$$\int_U \xi^2 |D^2 u|^2 \leq C.$$

step B.4 定理 1.1 中(1.5),  $\|\Delta u_\epsilon\|_{L^q(\Omega)} \leq C$ .

证 由 step B.2, 设

$$|u_\epsilon| \geq \frac{1}{2}, x \in \Omega.$$

令  $\phi = \frac{1}{\epsilon^2}(1 - |u_\epsilon|^2)$ . 如 step A.5 所证,

$$-2\epsilon^2 \Delta \phi + \phi \leq 4 |\nabla u_\epsilon|^2, x \in \Omega. \quad (1.49)$$

由 step B.3 和 Sobolev 嵌入定理可知  $|\nabla u_\epsilon|$  在  $L^r(\Omega)$  中有界,  $\forall r < \infty$ . 乘(1.49) 以  $\phi^{q-1}$ , 因在  $\partial\Omega$  上  $\phi = 0$ , 有

$$\int_\Omega \phi^q \leq 4 \int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^2 \phi^{q-1},$$

$$\text{即 } \|\phi\|_{L^q} \leq 4 \|\nabla u_\epsilon\|_{L^{2q}}^2 \leq C_q.$$

基于(II) 推出

$$\|\Delta u_\epsilon\|_{L^q} \leq C_q, \forall q < \infty.$$

特别地, 选取  $q > 2$ , 有

$$\|\nabla u_\epsilon\|_{L^\infty} \leq C, \quad (1.50)$$

回到(1.49), 利用极大值原则得

$$\|\phi\|_{L^\infty} \leq 4 \|\nabla u_\epsilon\|_{L^\infty}^2 \leq C.$$

由于  $-\Delta u_\epsilon = u_\epsilon \phi$ , 即得(1.5).

step B.5 (1.6) 的证明,  $\|u_\epsilon - u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\epsilon^2$ .

证 因  $|u_\epsilon| \geq \frac{1}{2}, x \in \Omega, \epsilon$  充分小, 可写

$$u_\epsilon = \rho_\epsilon e^{i\varphi_\epsilon}, \quad \rho_\epsilon = |u_\epsilon|. \quad (1.51)$$

方程(II) 变为

$$\rho_\varepsilon \Delta \varphi_\varepsilon + 2\Delta \rho_\varepsilon \varphi_\varepsilon = 0 \quad (\text{比较虚部}), \quad (1.52)$$

即

$$\operatorname{div}(\rho_\varepsilon^2 \nabla \varphi_\varepsilon) = 0 \quad (1.53)$$

和

$$-\Delta \rho_\varepsilon + \rho_\varepsilon |\nabla \varphi_\varepsilon|^2 = \frac{1}{\varepsilon^2} \rho_\varepsilon (1 - \rho_\varepsilon^2) \quad (\text{比较实部}). \quad (1.54)$$

由 step B.4 可知

$$\|\rho_\varepsilon - 1\|_{L^1(\Omega)} \leq C\varepsilon^2. \quad (1.55)$$

再写(1.53)为

$$\begin{cases} -\Delta(\varphi_\varepsilon - \varphi_0) = \operatorname{div}((\rho_\varepsilon^2 - 1)\nabla \varphi_\varepsilon), x \in \Omega, \\ \varphi_\varepsilon - \varphi_0 = 0, x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.56)$$

其中  $\Delta \varphi_0 = 0$ , 由椭圆型方程估计和(1.55), (1.50) 得

$$\|\varphi_\varepsilon - \varphi_0\|_{L^\infty} \leq C \|(\rho_\varepsilon^2 - 1)\nabla \varphi_\varepsilon\|_{L^\infty} \leq C\varepsilon^2. \quad (1.57)$$

由(1.55) 和(1.57) 即得(1.6).

step B.6 对每个  $k$ , 有

$$\|\nabla \varphi_\varepsilon\|_{C_{k\alpha}^k} \leq C, \quad (1.58)$$

$$\left\| \frac{1 - \rho_\varepsilon}{\varepsilon^2} \right\|_{C_{k\alpha}^k} \leq C. \quad (1.59)$$

**证** 用归纳法证明. 当  $k = 0$  时, 这些估计已经建立(甚至在  $\Omega$  上是整体的) 见(1.50) 和(1.55). 设  $k$  成立证明  $k + 1$  也成立. 置

$$X_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2} (1 - \rho_\varepsilon), \rho_\varepsilon = |u_\varepsilon|. \quad (1.60)$$

写(1.56) 为

$$-\Delta \rho_\varepsilon = -\rho_\varepsilon |\nabla \varphi_\varepsilon|^2 + \rho_\varepsilon (1 + \rho_\varepsilon) X_\varepsilon. \quad (1.61)$$

(1.61) 的右端由(1.58), (1.59) 在  $C_{k\alpha}^k$  中保持有界, 于是

$$\|\rho_\varepsilon\|_{W_{k\alpha}^{k+2, \rho}} \leq C, \forall \rho < \infty. \quad (1.62)$$

特别

$$\|\nabla \rho_\varepsilon\|_{C_{k\alpha}^k} \leq C. \quad (1.63)$$



由(1.52) 有

$$-\Delta\varphi_\varepsilon = 2 \frac{\nabla \rho_\varepsilon}{\rho_\varepsilon} \nabla \varphi_\varepsilon, x \in \Omega. \quad (1.64)$$

从(1.58), (1.63), (1.64) 和椭圆型方程估计得

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{W^{k+2,p}_{\text{loc}}} \leq C, \forall p < \infty. \quad (1.65)$$

由 Sobolev 嵌入定理推出

$$\|\nabla \varphi_\varepsilon\|_{C^{k+1}_{\text{loc}}} \leq C. \quad (1.66)$$

因此, (1.58) 对  $k+1$  成立. 从  $X_\varepsilon$  的定义和(1.61) 有

$$\varepsilon^2 \Delta X_\varepsilon = -\rho_\varepsilon |\nabla \varphi_\varepsilon|^2 + \rho_\varepsilon (1 + \rho_\varepsilon) X_\varepsilon. \quad (1.67)$$

由(1.13) 应用于  $D^k X_\varepsilon$  得

$$\begin{aligned} \|D^{k+1} X_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega')}^2 &\leq C \|D^k X_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega')} (\|D^k X_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega')} \\ &\quad + \|D^k \Delta X_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega')}), \end{aligned} \quad (1.68)$$

其中  $\overline{\Omega'} \subset \Omega'$ ,  $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ . 基于(1.59),

$$\|D^k X_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega')} \leq C.$$

利用(1.67), (1.58), (1.59) 得

$$\|D^k \Delta X_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C/\varepsilon^2.$$

由(1.68) 推之得

$$\varepsilon \|D^{k+1} X_\varepsilon\|_{L^\infty_{\text{loc}}} \leq C,$$

即

$$\|\varepsilon X_\varepsilon\|_{C^{k+1}_{\text{loc}}} \leq C. \quad (1.69)$$

再写(1.67) 为

$$-\varepsilon^2 \Delta X_\varepsilon + 2X_\varepsilon = 3\varepsilon^2 X_\varepsilon^2 - \varepsilon^4 X_\varepsilon^3 + \rho_\varepsilon |\nabla \varphi_\varepsilon|^2 \equiv R_C. \quad (1.70)$$

注意到

$$3\varepsilon^2 X_\varepsilon^2 - \varepsilon^4 X_\varepsilon^3 = X_\varepsilon^2 (3\varepsilon^2 + \rho_\varepsilon - 1),$$

$$\|\nabla \varphi_\varepsilon\|_{C^{k+1}_{\text{loc}}} \leq C, \left\| \frac{1 - \rho_\varepsilon}{\varepsilon^2} \right\|_{C^k_{\text{loc}}} \leq C, \|X \cdot X_\varepsilon\|_{C^{k+1}_{\text{loc}}} \leq C,$$

可得

$$\|R_C\|_{C^{k+1}_{\text{loc}}} \leq C. \quad (1.71)$$

(1.70) 对  $x$  微分  $k+1$  次, 得

$$-\varepsilon^2 \Delta(D^{k+1}X_\varepsilon) + 2D^{k+1}X_\varepsilon - D^{k+1}R_\varepsilon, x \in \Omega'. \quad (1.72)$$

另一方面,

$$\|D^{k+1}X_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega')} \leq \frac{C}{\varepsilon} \quad (\text{由(1.69)}),$$

应用引理 1.5 得

$$\|D^{k+1}X_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega')} \leq C + \frac{C}{\varepsilon} e^{-\frac{d}{4\varepsilon}},$$

其中  $d = \text{dist}(\Omega'', \partial\Omega')$ , 推出

$$\|X_\varepsilon\|_{C_{\text{loc}}^{k+1}} \leq C, \quad (1.73)$$

即(1.59) 对  $k+1$  成立.

step B.7 估计(1.7) 和(1.8) 的证明.

因  $\Delta\varphi_0 = 0$ , 从(1.64) 有

$$-\Delta(\varphi_\varepsilon - \varphi_0) = 2 \frac{\nabla \rho_\varepsilon}{\rho_\varepsilon} \nabla \varphi_\varepsilon, x \in \Omega.$$

因此, 从(1.57), (1.58) 和(1.59) 有

$$\|\varphi_\varepsilon - \varphi_0\|_{C_{\text{loc}}^{k+1}} \leq C\varepsilon^2. \quad (1.74)$$

于是

$$u_\varepsilon - u_0 = \rho_\varepsilon e^{i\varphi_\varepsilon} - u_0 = (\rho_\varepsilon - 1)e^{i\varphi_\varepsilon} + e^{i\varphi_\varepsilon} - e^{i\varphi_0}$$

满足

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{C_{\text{loc}}^k} \leq C\varepsilon^2 \quad (\text{由(1.59) 和(1.74)}),$$

这就完成了(1.7) 的证明. 现转向(1.8) 的证明. 回到(1.70),

写

$$\begin{aligned} & -\varepsilon^2 \Delta(X_\varepsilon - \frac{1}{2} |\nabla u_0|^2) + z(X_\varepsilon - \frac{1}{2} |\nabla u_0|^2) \\ & = |\nabla \varphi_\varepsilon|^2 - |\nabla \varphi_0|^2 + S_\varepsilon, \end{aligned} \quad (1.75)$$

其中  $S_\varepsilon = 3\varepsilon^2 X_\varepsilon^2 - \varepsilon^4 X_\varepsilon^3 + (\rho_\varepsilon - 1) |\nabla \varphi_\varepsilon|^2 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \Delta(|\nabla u_0|^2)$ .

因  $u_0 = e^{i\varphi_0}$ ,  $|\nabla u_0| = |\nabla \varphi_0|$ , 由(1.58), (1.59) 和(1.74) 有

$$\|S_\varepsilon\|_{C_{\text{ax}}^k} \leq C\varepsilon^2,$$

$$\|\|\nabla\varphi_\varepsilon\|^2 - \|\nabla\varphi_0\|^2\|_{C_{\text{kv}}^k} \leq C\varepsilon^2.$$

再应用引理 1.4 于  $\omega = D^k(X_\varepsilon - \frac{1}{2}\|\nabla u_0\|^2)$ , 可得

$$\|X_\varepsilon - \frac{1}{2}\|\nabla u_0\|^2\|_{C_{\text{kv}}^k} \leq C\varepsilon^2\left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2}e^{-\frac{d}{4\varepsilon}}\right).$$

由此完成(1.8)的证明.

以下考虑问题

$$\min_{u \in H_R^1} E_\varepsilon(u). \quad (1.76)$$

其中

$$E_\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_\Omega (\|u\|^2 - 1)^2, \quad (1.77)$$

$$H_{g_\varepsilon}^1 = \{u \in H^1(\Omega); u = g_\varepsilon, x \in \partial\Omega\}. \quad (1.78)$$

即边界函数  $g$  依赖于  $\varepsilon$ , 对应(1.76) 的 Euler 方程为

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{1}{\varepsilon^2} u (1 - \|u\|^2), & x \in \Omega, \\ u = g_\varepsilon, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.79)$$

对  $g_\varepsilon$  作如下假设

$$\|g_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1, \quad (1.80)$$

$$\|g_\varepsilon\|_{H_{(\Omega)}^1} \leq C, \quad (1.81)$$

$$\int_{\partial\Omega} (\|g_\varepsilon\|^2 - 1)^2 \leq C\varepsilon^2, \quad (1.82)$$

且设

$$g_\varepsilon \rightarrow g \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上一致收敛}. \quad (1.83)$$

由(1.82) 知,  $\|g\| = 1$ , 因此  $\deg(g, \partial\Omega)$  有定义, 设

$$\deg(g, \partial\Omega) = 0. \quad (1.84)$$

写

$$g = e^{i\varphi_0}, x \in \partial\Omega,$$

其中  $\varphi_0$  为某调和函数. 令

$$u_0 = e^{iq_0}, x \in \Omega.$$

主要结果如下:

**定理 1.7** 在假设(1.80)–(1.84)下,我们有

$$u_\epsilon \rightarrow u_0 \quad \text{在 } H^1(\Omega) \text{ 中强收敛;} \quad (1.85)$$

$$u_\epsilon \rightarrow u_0 \quad \text{在 } \bar{\Omega} \text{ 中一致收敛;} \quad (1.86)$$

$$u_\epsilon \rightarrow u_0 \quad \text{在 } (C_{\text{loc}}^k(\Omega)) \text{ 中收敛, } \forall k; \quad (1.87)$$

$$\frac{1 - |u_\epsilon|^2}{\epsilon^2} \rightarrow |\nabla u_0|^2, \text{ 在 } (C_{\text{loc}}^k(\Omega)) \text{ 收敛, } \forall k. \quad (1.88)$$

证明分成三步:

step 1 我们有

$$u_\epsilon \rightarrow u_0 \quad \text{在 } H^1(\Omega) \text{ 中强收敛,} \quad (1.89)$$

$$\frac{1}{\epsilon^2} \int_{\Omega} (|u_\epsilon|^2 - 1)^2 \rightarrow 0, \quad (1.90)$$

**证** 我们特殊选取和  $u_\epsilon$  比较的函数具有形式

$$v_\epsilon = \eta_\epsilon e^{i\psi_\epsilon}, \quad (1.91)$$

其中  $\eta_\epsilon$  为如下问题的解

$$\begin{cases} -\epsilon^2 \Delta \eta_\epsilon + \eta_\epsilon = 1, & x \in \Omega, \\ \eta_\epsilon = |g_\epsilon|, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1.92)$$

和  $\psi_\epsilon$  为如下问题的解

$$\begin{cases} \Delta \psi_\epsilon = 0, & x \in \Omega, \\ \psi_\epsilon = \varphi_\epsilon, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.93)$$

其中  $\varphi_\epsilon: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , 定义为

$$e^{i\psi_\epsilon} = g_\epsilon / |g_\epsilon|,$$

这是可能的, 因  $\deg(g_\epsilon, \partial\Omega) = 0$ , 基于(1.83), 我们能选取  $\varphi_\epsilon$  使得  $\varphi_\epsilon \rightarrow \varphi_0$ , 在  $\partial\Omega$  上一致收敛, 我们断言:

$$\int_{\Omega} |\nabla \eta_\epsilon|^2 \leq C_\epsilon, \quad (1.94)$$

$$\frac{1}{\epsilon^2} \int_{\Omega} (\eta_\epsilon - 1)^2 \leq C_\epsilon. \quad (1.95)$$

(1.94)、(1.95) 的证明: 注意到  $\eta_\epsilon$  为问题

$$\int_{\Omega} |\nabla \eta|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} (\eta - 1)^2 \text{ 在 } H_{k_c}^1(\Omega; k) \text{ 上} \quad (1.96)$$

的极小. 我们在局部坐标下比较函数为

$$\bar{\eta}_{\varepsilon}(x_1, x_2) = (|g_{\varepsilon}(x_1)| - 1)\gamma(x_2) + 1,$$

设靠近边界点  $\Omega = \{(x_1, x_2); x_2 > 0\}$ ,  $\gamma(x)$  为光滑函数, 靠近 0 具有小的支集, 且  $\gamma(0) = 1$ . 注意到由 (1.81), (1.82) 有

$$\int_{\Omega} |\nabla \bar{\eta}_{\varepsilon}|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} (\eta_{\varepsilon} - 1)^2 \leq C, \quad (1.97)$$

因此

$$\int_{\Omega} |\nabla \eta_{\varepsilon}|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} (\eta_{\varepsilon} - 1)^2 \leq C. \quad (1.98)$$

其次, 乘 (1.92) 以  $V \cdot \nabla(\eta_{\varepsilon} - 1)$ , 如同命题 1.4 可得

$$\int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial \eta_{\varepsilon}}{\partial n} \right|^2 \leq C. \quad (1.99)$$

以上用到了 (1.98), (1.81) 和 (1.82). 最后乘 (1.92) 以  $(\eta_{\varepsilon} - 1)$  分部积分得

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \int_{\Omega} |\nabla \eta_{\varepsilon}|^2 + \int_{\Omega} (\eta_{\varepsilon} - 1)^2 &\leq \varepsilon^2 \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial \eta_{\varepsilon}}{\partial n} \right|^2 + |\eta_{\varepsilon} - 1| \\ &\leq \varepsilon^2 \left\| \frac{\partial \eta_{\varepsilon}}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial\Omega)} \left\| |g_{\varepsilon}| - 1 \right\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\varepsilon^2. \end{aligned}$$

这就证明了 (1.94) 和 (1.95).

我们断言

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon}|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_{\Omega} (|u_{\varepsilon}|^2 - 1)^2 \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \psi_{\varepsilon}|^2 + C\varepsilon. \quad (1.100)$$

事实上, 由 (1.76) 知  $u_{\varepsilon}$  为极小元, 比较函数  $v_{\varepsilon}$  由 (1.91) 所定义, 且由 (1.95) 注意到

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} (|v_{\varepsilon}|^2 - 1)^2 = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} (\eta_{\varepsilon}^2 - 1)^2 \leq C.$$

另一方面

$$\int_{\Omega} |\nabla v_{\varepsilon}|^2 = \int_{\Omega} |\nabla \eta_{\varepsilon}|^2 + \eta_{\varepsilon}^2 |\nabla \psi_{\varepsilon}|^2$$

$$\leq C\varepsilon + \int_{\Omega} |\nabla \psi_{\varepsilon}|^2, \eta_{\varepsilon} \leq 1,$$

这就证明了(1.100).

最后,我们证明  $\psi_{\varepsilon} \rightarrow \varphi_0$  在  $H^1(\Omega)$  中强收敛,事实上,  $\varphi_{\varepsilon}$  在  $H^1(\partial\Omega)$  中有界(1.81),且  $\varphi_{\varepsilon} \rightarrow \varphi_0$  在  $\partial\Omega$  上一致收敛推出  $\varphi_{\varepsilon} \rightarrow \varphi_0$  在  $H^{1/2}(\partial\Omega)$  中强收敛,由(1.93)推出  $\psi_{\varepsilon} \rightarrow \varphi_0$  在  $H^1(\Omega)$  中强收敛.

从(1.100)可知,  $\{u_{\varepsilon}\}$  在  $H^1$  中有界,因此,  $u_{\varepsilon_n} \rightharpoonup u$  在  $H^1$  中弱收敛.

由(1.100)和下半连续法知

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \leq \int_{\Omega} |\nabla \varphi_0|^2 = \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2. \quad (1.101)$$

另一方面,

$$\int_{\Omega} (|u_{\varepsilon}|^2 - 1)^2 \leq C\varepsilon^2,$$

因此,  $|u| = 1, a.e., u \in H^1_g(\Omega, S^1)$ , 基于(1.101),  $u$  为(1.2)的极小元,即  $u = u_0, u_{\varepsilon} \rightarrow u_0$  在  $H^1$  中强收敛来自

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int |\nabla u_{\varepsilon}|^2 \leq \int |\nabla u_0|^2$$

和  $u_0$  的唯一性.回到(1.100)和利用  $u_{\varepsilon} \rightarrow u_0$  在  $H^1$  中的强收敛性.可得(1.90).

step 2 (1.80) 的证明.

由 step A.1 和 A.2 可证.

$|u_{\varepsilon}| \rightarrow 1$  在  $\Omega$  的任何紧子集上一致收敛. 现证

$$|u_{\varepsilon}| \rightarrow 1 \text{ 在 } \overline{\Omega} \text{ 上一致收敛.} \quad (1.102)$$

若不然,则存在序列  $\varepsilon_n \rightarrow 0, a_n \in \Omega$ ,使得

$$|u_{\varepsilon_n}(a_n)| \leq 1 - \delta, \delta > 0. \quad (1.103)$$

设  $a_n \rightarrow a, a \in \partial\Omega$ , 置  $u_n = u_{\varepsilon_n}, d_n = \text{dist}(a_n, \partial\Omega)$ .

我们断言

$$\frac{d_n}{\varepsilon_n} \rightarrow 0. \quad (1.104)$$

证 令  $r_n \leq \frac{1}{2}d_m$  为待定正数序列, 由(1.13) 可知

$$|\nabla u_n|^2 \leq C \left[ \frac{1}{\epsilon_n^2} + \frac{1}{\text{dist}^2(x, \partial\Omega)} \right], x \in \Omega,$$

其中  $C$  为某绝对常数, 特别有

$$|\nabla u_n(x)| \leq C \left[ \frac{1}{\epsilon_n} + \frac{1}{d_n} \right], \forall x \in B(a_n, r_n).$$

因此

$$|u_n(x) - u_n(a_n)| \leq Cr_n \left[ \frac{1}{\epsilon_n} + \frac{1}{d_n} \right], \forall x \in B(a_n, r_n).$$

$$\text{推之, } |u_n(x)| \leq |u_n(a_n)| + Cr_n \left[ \frac{1}{\epsilon_n} + \frac{1}{d_n} \right], \forall x \in B(a_n, r_n).$$

因此

$$1 - |u_n(x)| \geq \delta - Cr_n \left[ \frac{1}{\epsilon_n} + \frac{1}{d_n} \right], \forall x \in B(a_n, r_n).$$

选取  $r_n$  使得

$$\delta - Cr_n \left[ \frac{1}{\epsilon_n} + \frac{1}{d_n} \right] \geq \frac{\delta}{2},$$

因此

$$(1 - |u_n|^2)^2 \geq \frac{\delta^2}{4}, \quad x \in B(a_n, r_n).$$

于是有

$$\int_{\Omega} (1 - |u_n|^2)^2 \geq \frac{\delta^2}{4} \pi r_n^2,$$

$$\frac{r_n}{\epsilon_n} \rightarrow 0. \quad (1.105)$$

现选取  $r_n$ , 使得如下要求满足

$$\frac{r_n}{d_n} \leq \frac{1}{2}, \frac{r_n}{\epsilon_n} \leq \frac{\delta}{4C}, \frac{r_n}{d_n} \leq \frac{\delta}{4C}.$$

例如可取

$$r_n = \min \left\{ \frac{d_n}{2}, \frac{d_n \delta}{4C}, \frac{\epsilon_n \delta}{4C} \right\}.$$

由(1.105) 推出(1.104).

现用 blow-up 原理证明(1.102), 令

$$v_n(y) = u_n(d_n y + a_n), \quad y \in G_n = \frac{1}{d_n}(\Omega - a_n).$$

通过旋转, 设

$$G_n \rightarrow G = (-1, +\infty) \times \dots,$$

$v_n$  满足

$$-\Delta v_n = \left(\frac{d_n}{\varepsilon_n}\right)^2 v_n(1 - |v_n|^2), \quad x \in G_n, \quad (1.106)$$

且

$$\int_{G_n} |\nabla v_n|^2 = \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 \leq C,$$

通过选取子序列, 使  $v_n \rightarrow v$  在  $G$  的一个紧子集上一致收敛, 其中  $v$  满足

$$\Delta v = 0, x \in G \quad \text{由(1.104) 和(1.106),}$$

$$\int_G |\nabla v|^2 < \infty.$$

最后, 因  $g_\varepsilon \rightarrow g$  在  $\partial\Omega$  上一致收敛, 易知

$$v = g(a), x \in \partial G$$

因此, 在  $G$  上  $v \equiv g(a)$ . 另一方面,  $v_n(0) = u_n(a_n)$ , 于是  $|v_n(0)| \leq 1 - \delta$ , 因此  $|v(0)| \leq 1 - \delta$ , 它和  $|v(0)| = |g(a)| = 1$  矛盾. (1.102) 得证.

(1.86) 的证明. 前面已写

$$u_\varepsilon = \rho_\varepsilon e^{i\varphi_\varepsilon}.$$

我们已证  $\rho_\varepsilon \rightarrow 1$  在  $\bar{\Omega}$  上一致收敛, 再取 (1.53) 为

$$-\operatorname{div}(\rho_\varepsilon^2 \nabla(\varphi_\varepsilon - \varphi_0)) = \operatorname{div}((\rho_\varepsilon^2 - 1) \nabla \varphi_0). \quad (1.107)$$

这个方程因  $\rho_\varepsilon \rightarrow 1$  在  $\bar{\Omega}$  上一致收敛为一致椭圆的, 从椭圆型方程估计 (见[9] 或[10]) 有

$\|\varphi_\varepsilon - \varphi_0\|_{L^p(\Omega)} \leq C[\|\varphi_\varepsilon - \varphi_0\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + \|(\rho_\varepsilon^2 - 1) \nabla \varphi_0\|_{L^p(\Omega)}],$   
其中  $\forall p > 2$ . 因  $g \in H^1(\partial\Omega)$ ,  $\varphi_0 \in H^{3/2}(\Omega)$ , 因此  $\nabla \varphi_0 \in H^{1/2}(\Omega) \subset L^4(\Omega)$ , 我们推出  $\varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi_0$  在  $\bar{\Omega}$  上一致收敛. 于是证明



了(1.86).

step 3. (1.87) 和(1.88) 的证明.

类似于前面的证明, step A. 3, A4 和 A5 没有改变, 由此可得

$$u_\epsilon \text{ 在 } H_{\text{loc}}^2 \text{ 中有界,} \quad (1.108)$$

$$\nabla u_\epsilon \text{ 在 } L_{\text{loc}}^\infty \text{ 中有界,} \quad (1.109)$$

$$\frac{1}{\epsilon^2}(1 - |u_\epsilon|^2) \text{ 在 } L_{\text{loc}}^\infty \text{ 中有界,} \quad (1.110)$$

$$\Delta u_\epsilon \text{ 在 } L_{\text{loc}}^\infty \text{ 中有界} \quad (1.111)$$

其次证明, 对任何正整数  $k$ ,

$$\|\nabla \varphi_\epsilon\|_{C_{\text{loc}}^k} \leq C, \quad (1.112)$$

$$\left\| \frac{1 - \rho_\epsilon}{\epsilon^2} \right\|_{C_{\text{loc}}^k} \leq C. \quad (1.113)$$

对  $k = 0$ , 这些估计已建立(见(1.109)(1.110)) 用归纳法证. 由(1.112), (1.113) 有

$$\varphi_\epsilon \rightarrow \varphi_0, \text{ 在 } C_{\text{loc}}^* \text{ 中,} \quad (1.114)$$

$$\rho_\epsilon \rightarrow 1, \text{ 在 } C_{\text{loc}}^* \text{ 中.} \quad (1.115)$$

这就推出  $u_\epsilon = \rho_\epsilon e^{i\varphi_\epsilon} \rightarrow u_0$  在  $C_{\text{loc}}^*$  中, 这就证明了(1.87).

(1.88) 的证明. 由 step B. 7(18) 的证明, 再用(1.75) 式, 由(1.113), (1.112) 和(1.115) 知

$$|\nabla \varphi_\epsilon|^2 - |\nabla \varphi_0|^2 \rightarrow 0, \text{ 在 } C_{\text{loc}}^k \text{ 中,}$$

$$S_\epsilon = 3\epsilon^2 X_\epsilon^2 - \epsilon^4 X_\epsilon^3 + (\rho_\epsilon - 1)|\nabla \varphi_\epsilon|^2 + \frac{1}{2}\epsilon^2 \Delta(|\nabla u_0|^2) \rightarrow 0,$$

在  $C_{\text{loc}}^*$  中, 另一方面, 由(1.113) 知  $X_\epsilon$  在  $C_{\text{loc}}^*$  中有界, 再利用一次

引理 1.4 于  $\omega = D^k \left( X_\epsilon - \frac{1}{2} |\nabla u_0|^2 \right)$ , 有

$$\left\| X_\epsilon - \frac{1}{2} |\nabla u_0|^2 \right\|_{C_{\text{loc}}^k} \rightarrow 0,$$

这就证明了(1.88).

## § 2 $\deg(g, \partial\Omega) \neq 0$ 的情形

现考虑极小问题

$$\min_{u \in H^1_g} E_\varepsilon(u), \quad (2.1)$$

其中

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(u) &= E_\varepsilon(u, \Omega) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_{\Omega} (1 - |u|^2)^2, \\ u &\in H^1_g(\Omega; \mathbb{C}^2) \equiv \{u \in H^1(\Omega; \mathbb{C}^2); u = g, x \in \partial\Omega\}, \\ \deg(g, \partial\Omega) &= d > 0. \end{aligned}$$

(2.1) 相应的 Euler 方程为

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2} u_\varepsilon (1 - |u_\varepsilon|^2), & x \in \Omega, \\ u_\varepsilon = g, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.2)$$

有如下主要结果.

**定理 2.1** 设  $\Omega$  是星形的, 则存在子序列  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  和恰好  $d$  ( $d > 0$ ) 个点  $a_1, a_2, \dots, a_d \in \Omega$  (在区域内, 不在边界上) 和光滑调和映射  $u_* = \Omega \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_d\} \rightarrow S^1$ , 使  $u_* = g$  在边界上, 使得

$$u_{\varepsilon_n} \rightarrow u_* \text{ 依 } C^k_{\text{loc}}(\Omega \setminus \bigcup_i \{a_i\}) \text{ 收敛, } \forall k, \quad (2.3)$$

$$u_{\varepsilon_n} \rightarrow u_* \text{ 依 } C^{1,\alpha}_{\text{loc}}(\overline{\Omega} \setminus \bigcup_i \{a_i\}) \text{ 收敛, } \forall \alpha < 1. \quad (2.4)$$

更进一步有, 每个奇点具有度为  $+1$ , 存在复常数  $\{a_i\}$ ,  $|a_i| = 1$ , 使得

$$|u_*(z) - a_i| \frac{|z - a_i|}{|z - \bar{a}_i|} \leq C |z - a_i|^2, z \rightarrow a_i, \forall i. \quad (2.5)$$

**定理 2.2** 设  $a_i$  为定理 2.1 所述, 则  $a_i$  为函数  $w(a, d, g)$  在  $\Omega$  上的极小, 其中

$$w(a, d, g) = -\pi \sum_{i \neq j} \log |a_i - a_j| + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \Phi(g \times g_\tau) - \pi \sum_{i=1}^d R(a_i), \quad (2.6)$$

这里  $\Phi$  为如下线性 Neumann 问题的解,

$$\begin{cases} \Delta \Phi = 2\pi \sum_{i=1}^d \delta_{a_i}, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = g \times g_T, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.7)$$

( $\nu$  为  $\partial\Omega$  的外法线,  $\tau$  为  $\partial\Omega$  的单位切向量.)

$$R(x) = \Phi(x) - \sum_{i=1}^d \log |x - a_i|. \quad (2.8)$$

我们先证定理 2.1, 我们首先简述一下证明的主要思想, 然后再逐步予以证明, 先用比较函数法证明能量具有上界

$$E_\epsilon(u_\epsilon, \Omega) \leq \pi d |\log \epsilon| + C, \quad (2.9)$$

其次对于  $|u_{\epsilon_n}(x_{j^n})| < \frac{1}{2}, n \geq N_0$  有

$$x_{j^n} \rightarrow a_1, \dots, a_d.$$

再建立下界估计,  $|u_{\epsilon_n}| \geq \frac{1}{2}$ ,

$$E_{\epsilon_n}(u_{\epsilon_n}, B(a_j, \delta)) \geq \pi[|\log \epsilon_n| - |\log \delta|] - C.$$

由于

$$\begin{aligned} \pi d |\log \epsilon_n| + C &\geq E_{\epsilon_n}(u_{\epsilon_n}, \Omega) \\ &\geq E_{\epsilon_n}(u_{\epsilon_n}, G \setminus \bigcup_{j=1}^d B(a_j, \delta)) + E_{\epsilon_n}(u_{\epsilon_n}, \bigcup_{j=1}^d B(a_j, \delta)), \end{aligned}$$

最后建立估计

$$\int_{\Omega_\delta} |\nabla u_{\epsilon_n}|^2 \leq C(\delta), \quad (2.10)$$

其中  $\Omega_\delta = \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^d B(a_j, \delta)$ ,  $C(\delta)$  仅依赖于  $\delta, \Omega$  和  $g$ , 但与  $\epsilon_n$  无关.

现在估计(2.9).

**定理 2.3** 估计(2.9) 成立, 即对  $\epsilon < \epsilon_0$ , 有

$$E_\epsilon(u_\epsilon) < \pi d \log |\epsilon| + C,$$

其中  $u_\epsilon$  为

$$E_{\epsilon}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\epsilon^2} \int_{\Omega} (|u|^2 - 1)^2$$

的极小元,

$$u \in H^1_{\epsilon}(\Omega; \mathbb{R}^2),$$

$$H^1_{\epsilon}(\Omega, \mathbb{R}^2) = \{u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^2); u = g, x \in \partial\Omega\},$$

$g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^2, |g(x)| = 1, \forall x \in \partial\Omega, \epsilon_0$  和  $C$  仅依赖于  $\epsilon$  和  $\Omega$ .

证 记

$$g_d(x) = \frac{x - x_d}{|x - x_d|},$$

$$\tilde{g} = \begin{cases} g, \partial\Omega, \\ g_i(x), \partial B(x_i, R), \Omega = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^d B_R(x_i), \end{cases}$$

则  $\deg(\tilde{g}, \partial\Omega) = 0, u \in H^1(\Omega; S^1)$ , 记

$$I(t) = I(t, 1),$$

其中

$$I(\epsilon, R) = \min_{u \in H^1_{\epsilon}} \left\{ \frac{1}{2} \int_{B_R} |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\epsilon^2} \int_{B_R} (|u|^2 - 1)^2 \right\}.$$

由伸缩变换易知

$$I(\epsilon, R) = I\left(\frac{\epsilon}{R}, 1\right) = I\left(\frac{\epsilon}{R}\right) = I\left(1, \frac{R}{\epsilon}\right).$$

可以证明

$$I(t_1) \leq \pi \log \frac{t_2}{t_1} + I(t_2), \quad \forall t_1 \leq t_2,$$

$$I(t) \leq \pi \log \frac{1}{t} + I(1), \quad \forall t \leq 1.$$

事实上,  $I(t_1) = I\left(1, \frac{1}{t_1}\right)$ , 设  $u_2$  为  $I(t_2)$  的极小元. 选取

$$u = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, \frac{1}{t_2} < |x| < \frac{1}{t_1}, \\ u_2, |x| \leq \frac{1}{t_2}, \end{cases} \in H^1_{\frac{1}{t_1}}(B_R(0)),$$

因此

$$\begin{aligned}
I(t_1) &\leq \frac{1}{2} \int_{B_1} |\nabla u|^2 + \frac{1}{4} \int_{B_1} (1 - |u|^2)^2 \\
&= \frac{1}{2} \int_{B_1} |\nabla u_2|^2 + \frac{1}{4} \int_{B_1} (1 - |u_2|^2)^2 + \frac{1}{2} \int_{B_1 \setminus B_{1/2}} \left| \nabla \frac{x}{|x|} \right|^2 \\
&= I(t_2) + \frac{1}{2} \int_{B_{1/2} \setminus B_{1/4}} |\nabla \theta|^2 dx (\nabla \theta = \frac{1}{|x|} \frac{x}{|x|} (-x_2, x_1)) \\
&= I(t_2) + \frac{1}{2} \int_{t_2}^{t_1} \frac{2\pi}{r} dr \\
&= I(t_2) + \pi \log \frac{t_2}{t_1}.
\end{aligned}$$

推出

$$I(\varepsilon, R) \leq C + \pi \log \frac{1}{\varepsilon}.$$

存在光滑映射  $v: \Omega \rightarrow S^1$ , 使得  $v = g, x \in \partial\Omega$ ,

$$v(x) = \begin{cases} u, \tilde{\Omega}, & u|_{\partial B_i \cap \tilde{\Omega}} = g_i, \\ u_i, B_i. \end{cases}$$

我们有

$$\begin{aligned}
E_\varepsilon(u_\varepsilon) &\leq E_\varepsilon(v) = E_\varepsilon(v, \tilde{\Omega}) + \sum_{i=1}^d E_\varepsilon(u_i; B_i) \\
&\leq C + \sum_{i=1}^d I(\varepsilon, R) = C + dI(\varepsilon, R) \\
&\leq C + \pi d \log \frac{1}{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

定理 2.3 得证.

**定理 2.4** 设  $\Omega$  是星形区域 ( $x \cdot \nu \geq \alpha > 0, \forall x \in \partial\Omega$ ), 则存在常数  $C = C(\Omega, g)$  使得对 (2.2) 的任何解  $u_\varepsilon$  有

$$\int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} \right|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} (1 - |u_\varepsilon|^2)^2 \leq C. \quad (2.11)$$

证 以  $x \cdot \nabla u_\varepsilon$  乘 (2.2) 并在  $\Omega$  上积分得 (Pohozaev 恒等式

方法)

$$\begin{aligned}
 -\int \Delta u_\epsilon (\mathbf{x} \cdot \nabla u_\epsilon) &= \frac{1}{\epsilon^2} \int_\Omega u_\epsilon (1 - |u_\epsilon|^2) (\mathbf{x} \cdot \nabla u_\epsilon) \\
 &= \frac{1}{2\epsilon^2} \int_\Omega (1 - |u_\epsilon|^2) x_i \partial_i |u_\epsilon|^2 \\
 &= -\frac{1}{4\epsilon^2} \int_\Omega x_i \partial_i (1 - |u_\epsilon|^2)^2 \\
 &= \frac{1}{2\epsilon^2} \int_\Omega (1 - |u_\epsilon|^2), \\
 -\int \Delta u_\epsilon (\mathbf{x} \cdot \nabla u_\epsilon) &= -\int_\Omega \partial_j \partial_j u_\epsilon (x_i \partial_i u_\epsilon) \\
 &= -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{x} \cdot \nabla u_\epsilon + \int_\Omega \partial_j u_\epsilon [\delta_{ij} \partial_j u_\epsilon + x_i \partial_j \partial_i u_\epsilon] \\
 &= -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \mathbf{v}} (\mathbf{x} \cdot \nabla u_\epsilon) + \int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^2 + \frac{1}{2} \int_\Omega x_i \partial_i \\
 &\quad |\nabla u_\epsilon|^2 + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}) |\nabla u_\epsilon|^2 \\
 &= -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \mathbf{v}} (\mathbf{x} \cdot \nabla u_\epsilon) + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}) |\nabla u_\epsilon|^2.
 \end{aligned}$$

于是有

$$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \mathbf{v}} (\mathbf{x} \cdot \nabla u_\epsilon) + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}) |\nabla u_\epsilon|^2 = \frac{1}{2\epsilon^2} \int_\Omega (1 - |u_\epsilon|^2)^2. \quad (2.12)$$

因

$$\begin{aligned}
 \nabla u_\epsilon &= \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \tau} \tau + \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \nu} \nu, \\
 \mathbf{x} \cdot \nabla u_\epsilon &= \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \tau} (\mathbf{x} \cdot \tau) + \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \nu} (\mathbf{x} \cdot \nu), \\
 |\nabla u_\epsilon|^2 &= \left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \tau} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \nu} \right|^2.
 \end{aligned}$$

由(2.12) 得

$$-\int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \nu} \right)^2 (\mathbf{x} \cdot \nu) - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \nu} \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \tau} (\mathbf{x} \cdot \tau) + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{x} \cdot \nu) \left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \nu} \right|^2$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}) \left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \tau} \right|^2 = \frac{1}{2\epsilon^2} \int (1 - |u_\epsilon|^2)^2,$$

即有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \nu} \right|^2 (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}) + \frac{1}{2\epsilon^2} \int_{\Omega} (1 - |u_\epsilon|^2)^2 \\ &= - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \nu} \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \tau} (\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\tau}) + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}) \left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \tau} \right|^2, \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} \geq \alpha > 0. \end{aligned}$$

由此可得

$$\frac{\alpha}{2} \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \nu} \right|^2 + \frac{1}{2\epsilon^2} \int_{\Omega} (1 - |u_\epsilon|^2)^2 \leq \frac{\alpha}{4} \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \nu} \right|^2 + C \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial g}{\partial \tau} \right|^2.$$

现考虑所谓“好圆盘”及“坏圆盘”,及其上的性质.

**定理 2.5** 存在  $\lambda_0 = \lambda_0(\Omega, g) > 0, \mu_0 = \mu_0(\Omega, g) > 0$ , 使得只要  $\frac{l}{\epsilon} \geq \lambda_0, l \leq 1$ , 就有

$$\frac{1}{\epsilon^2} \int_{B_l \cap \Omega} (1 - |u_\epsilon|^2)^2 \leq \mu_0.$$

那么

$$|u_\epsilon(x)| \geq \frac{1}{2}, x \in B_l \cap \Omega, \quad (2.13)$$

其中  $B_l$  为  $R^2$  中半径为  $l$  的圆盘.

**证** 首先与以前一样有  $|\nabla u_\epsilon| \leq \frac{C}{\epsilon}$ , 因此

$$|u_\epsilon(x) - u_\epsilon(y)| \leq \frac{C}{\epsilon} |x - y|.$$

反设, 有  $x_0 \in B_l \cap \Omega$ , 使  $|u_\epsilon(x_0)| < \frac{1}{2}$ , 则由上式有

$$|u_\epsilon(x)| \leq \frac{1}{2} + \frac{C}{\epsilon} \rho, x \in \Omega \cap B_\rho(x_0).$$

于是

$$1 - |u_\epsilon|^2 \geq 1 - |u_\epsilon| \geq \frac{1}{2} - \frac{C}{\epsilon} \rho, x \in \Omega \cap B_\rho(x_0).$$

取  $\rho = \frac{\epsilon}{4C}$ , 则有

$$1 - |u_\epsilon|^2 \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}, x \in \Omega \cap \frac{B_\epsilon}{4C}(x_0).$$

但存在  $\alpha > 0$ , 使

$$\text{mes}(B_r(x) \cap \Omega) \geq \alpha r^2, x \in \Omega.$$

因  $\frac{\epsilon}{4C} \leq 1$ , 当  $x_0 \in B_l, \frac{\epsilon}{4C} \leq l$  时,  $B_{\frac{\epsilon}{4C}}(x_0) \subset B_{2l}$ , 因此

$$\int_{\Omega \cap B_l} (1 - |u_\epsilon|^2)^2 \geq \frac{\alpha \epsilon^2}{(16C)^2}.$$

于是, 当  $\lambda_0 = \frac{1}{4C}, \mu_0 < \frac{\alpha}{(16C)^2}$  时,  $\frac{l}{\epsilon} \geq \lambda_0, l \leq 1$ , 推出

$$\mu_0 \geq \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\Omega \cap B_{2l}} (1 - |u_\epsilon|^2)^2 > \mu_0.$$

由矛盾定理得证.

把  $u_\epsilon, g$  延拓到  $\Omega'$  上,  $\Omega \subset \subset \Omega'$ , 分别记为  $u_\epsilon, \bar{g}$ ,

$$\begin{cases} |\bar{g}| = 1, & x \in \Omega' \setminus \Omega, \\ \bar{g} = g, & x \in \partial\Omega, \\ u_\epsilon = g, & x \in \Omega' \setminus \Omega. \end{cases}$$

考虑  $\{B(x_i, \lambda_0 \epsilon)\}_{i \in I}$ , 使得当  $x_i \in \Omega$  时有

$$B\left(x_i, \frac{\lambda_0 \epsilon}{4}\right) \cap B\left(x_j, \frac{\lambda_0 \epsilon}{4}\right) \neq \emptyset, \forall i \neq j,$$

$$\bigcup_{i \in I} B(x_i, \lambda_0 \epsilon) \supset \Omega.$$

**定义** 称  $B(x, \lambda_0 \epsilon)$  为好圆盘, 如  $\frac{1}{\epsilon^2} \int_{B(x, 2\lambda_0 \epsilon)} (1 - |u_\epsilon|^2)^2 \leq \mu_0$  (此

时有  $|u_\epsilon| \geq \frac{1}{2}, x \in B(x_0, \lambda_0 \epsilon)$ ), 否则, 即

$$\frac{1}{\epsilon^2} \int_{B(x, 2\lambda_0 \epsilon)} (1 - |u_\epsilon|^2)^2 > \mu_0,$$

称为坏圆盘.

令  $J = \{j \in I : B(x_j, \lambda_0 \epsilon) \text{ 为坏圆盘}\}.$

**引理 2.6** 存在正整数  $N = N(g, \Omega)$ , 与  $\epsilon$  无关, 使得

$$\text{card } J \leq N. \quad (2.14)$$



证 存在绝对常数  $C$  使得

$$\sum_{i \in I} \int_{B(x_i, 2\lambda_0 \epsilon)} (1 - |u_\epsilon|^2)^2 \leq C \int_{\Omega} (1 - |u_\epsilon|^2)^2,$$

这是因为  $\Omega$  中的每一个点能为  $C$  个圆盘  $B(x_i, 2\lambda_0 \epsilon)$  所遮盖. 从上述坏圆盘的定义, 以及定理 2.4 有

$$\mu_0 \text{card } J \leq \frac{C}{\epsilon^2} \int_{\Omega} (1 - |u_\epsilon|^2)^2 \leq C,$$

由此即得 (2.14).

引理 2.7 我们有

$$|u_\epsilon(x)| \geq \frac{1}{2}, \forall x \in \Omega' \setminus \bigcup_{i \in J} B(x_i, \lambda_0 \epsilon).$$

证 设  $x \in \Omega - \bigcup_{i \in J} B(x_i, \lambda_0 \epsilon)$ , 则存在  $j \in I \setminus J$  使得  $x \in B(x_j, \lambda_0 \epsilon)$ , 它是好圆盘,

由定理 2.5 得  $|u_\epsilon(x)| \geq \frac{1}{2}$ .

下面我们置坏圆盘  $B(x_i, \lambda_0 \epsilon)_{i \in J}$  以最大的圆盘使奇点拉开.

定理 2.8 能选取子集  $J' \subset J$ , 和常数  $\lambda \geq \lambda_0$ , 仅依赖于  $g$  和  $\Omega$ , 使得

$$|x_i - x_j| \geq \delta \lambda \epsilon, \forall ij \in J', i \neq j, \quad (2.15)$$

$$\bigcup_{i \in J} B(x_i, \lambda_0 \epsilon) \subset \bigcup_{i \in J'} B(x_i, \lambda \epsilon). \quad (2.16)$$

证 对  $\text{card } J$  进行归纳法证明, 首先前面已证  $\text{card } J \leq 1$ , 如 (2.15), 对  $J' = J, \lambda = \lambda_0$  成立, 则已证. 否则设有  $x_1, x_2$ , 使得

$$|x_1 - x_2| < 8\lambda_0 \epsilon, \quad (2.17)$$

则取  $\lambda = 9\lambda_0, J' = J \setminus \{1\}$ , 通过有限步 (至多为  $N$  步), 则可得到定理结论,  $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_0 9^{\text{card } J} \leq \lambda_0 9^N$ .

现考虑坏圆盘中心的聚点, 任给  $\epsilon_n \rightarrow 0$ , 可选子列  $\epsilon_n$  使  $\text{card } J_{\epsilon_n} = \text{const} = N_1, x_i = x_i^{\epsilon_n} \rightarrow l_i \in \bar{\Omega}, i = 1, 2, \dots, N_1. l_1, l_2, \dots, l_{N_1}$  中不重复的点集记作  $a_1, \dots, a_{N_2}, N_2 \leq N_1 \leq N$ . 然后希望证明:

$$(1) \int_K |\nabla u_{\epsilon_n}|^2 dx \text{ 有界}, \forall K \subset \subset \bar{\Omega} \setminus \bigcup_{i=1}^{N_2} \{a_i\}.$$

(2)  $a_j \in \partial\Omega$ ,

(3) 具有更强的收敛性.

现估计在离开奇点的紧区域上  $u_\epsilon$  的能量上界.

令  $\Delta_j = \{j: x_j^{\epsilon_n} \rightarrow a_j, a_i \neq a_j, i = 1, \dots, N_2\}$ , 固定  $\eta > 0, \eta < \text{dist}(\Omega, \partial\Omega'), \eta < \frac{1}{2} \|a_i - a_j\|, i \neq j$ , 则

$B(a_i, \eta) \subset \subset \Omega', i = 1, \dots, N_2$ , 且彼此分开.

显然, 对于充分大的  $n$ , 存在  $N(\eta) > 0$ , 当  $n > N(\eta)$  时, 有

$$\bigcup_{j \in \Delta_j} B(x_j^{\epsilon_n}, \lambda \epsilon_n) \subset \bigcup_j B(a_j, \eta/4). \quad (2.18)$$

以下用  $x$  代替  $x_j^{\epsilon_n}$ , 显然

$$\|u_{\epsilon_n}(x)\| \geq \frac{1}{2}, x \in \partial B(a_j, \eta/2), n \geq n(\eta).$$

因此

$$\deg(u_{\epsilon_n}, \partial B(a_j, \eta/2))$$

是确定的, 且由如下引理它保持有界,  $n \rightarrow \infty$ .

**引理 2.9**  $\forall j \in J$ , 我们有

$$\|\deg(u_\epsilon, \partial B(x_j^\epsilon, \lambda \epsilon))\| \leq C, \quad (2.19)$$

其中常数  $C$  与  $\epsilon$  无关.

$$\begin{aligned} \text{证} \quad \deg(u_\epsilon, \partial B(x_j^\epsilon, \lambda \epsilon)) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B(x_j^\epsilon, \lambda \epsilon)} \frac{u_\epsilon}{|u_\epsilon|} \wedge \left( \frac{u_\epsilon}{|u_\epsilon|} \right)_\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B(x_j^\epsilon, \lambda \epsilon)} \frac{u_\epsilon}{|u_\epsilon|^2} \Delta u_{\epsilon_j} \\ &\leq \frac{4}{2\pi} \int_{\partial B(x_j^\epsilon, \lambda \epsilon)} \frac{C}{\epsilon} \leq C. \end{aligned}$$

于是定义

$$d_j = \deg(u_{\epsilon_n}, \partial B(x_j^{\epsilon_n}, \lambda \epsilon_n)),$$

$$K_j = \deg(u_{\epsilon_n}, \partial B(a_j, \eta)),$$

均与  $\epsilon_n$  无关, 且  $K_j = \sum_{j \in \Delta_i} d_j$ .

**定理 2.10** 存在常数  $C = C(g, \Omega)$  与  $\eta, n$  无关, 使得当  $n \geq N(\eta)$  时有

$$\int_{\Omega \setminus \bigcup_{i \in \Lambda_i} B(a_i, \eta)} |\nabla u_{\epsilon_n}|^2 \leq 2\pi d \log \eta + C. \quad (2.20)$$

**推论 2.11** 存在常数  $C$  与  $\eta, n$  无关使得

$$\int_{\Omega_i} |\nabla u_{\epsilon_n}|^2 \geq 2\pi |K_i| \log \frac{\eta}{\epsilon_n} - C, \quad (2.21)$$

其中

$$\Omega_i = B(a_i, \eta) \setminus \bigcup_{j \in \Lambda_i} B(x_j^{\epsilon_n}, \lambda \epsilon_n).$$

**推论 2.12** 如果  $d_j \geq 0, j \in \Lambda_i$ , 则

$$\int_{\Omega_i} |\nabla u_{\epsilon_n}|^2 \geq 2\pi \left( \sum_{j \in \Lambda_i} d_j^2 \right) \log \frac{\eta}{\epsilon_n} - C. \quad (2.22)$$

**定理 2.13** 存在常数  $C$  与  $\eta, n$  无关, 使得

$$\int_{\Omega_i} |\nabla u_{\epsilon_n}|^2 \geq 2\pi |K_i| \log \frac{\eta}{\epsilon_n} - C. \quad (2.23)$$

定理 2.13 的证明, 令

$$u_0(Z) = \prod_{j \in \Lambda_i} \left( \frac{Z - X_j^{\epsilon_n}}{|Z - X_j^{\epsilon_n}|} \right)^{d_j}$$

为典则调和映照.  $u_0 \in S^1$ , 且  $\deg(u_0) \partial B(x_i^{\epsilon_n}, \lambda \epsilon_n) = d_i$

断言 1.

$$\int_{\Omega_i} |\nabla u_{\epsilon_n}|^2 \geq \int_{\Omega_i} |\nabla u_0|^2 - C. \quad (2.24)$$

断言 2.

$$\int_{\Omega_i} |\nabla u_0|^2 \geq 2\pi |K_i| \log \frac{\eta}{\epsilon_n} - C. \quad (2.25)$$

在(2.24), (2.25) 中, 常数  $C$  均与  $\eta, n$  无关, 显然由断言 1, 2 即得定理 2.13 的证明.

我们先证断言 1, 设  $B_R$  为中心为原点半径为  $R$  的圆盘.  $p_1$ ,

$p_2, \dots, p_m$  为  $B_R$  中的点使得

$$|p_j| \leq \frac{R}{2}, \quad \forall j, \quad (2.26)$$

$$|p_j - p_k| \geq 4R_0, \quad \forall j, k, j \neq k, \quad (2.27)$$

其中  $R_0 \leq \frac{R}{4}$ . 置

$$\Omega = B_R \setminus \bigcup_{j=1}^m B(p_j, R_0).$$

设  $u$  为光滑映照:  $\Omega \rightarrow \mathbb{C}^m$ , 且作如下假设

$$0 < a \leq |u| \leq 1, x \in \Omega, \quad (2.28)$$

$$\frac{1}{R_0^2} \int_{\Omega} (|u|^2 - 1)^2 \leq K, \quad (2.29)$$

其中  $a$  和  $K$  为常数, 由 (2.28) 可知

$$d_j = \deg(u, \partial B(p_j, R_0))$$

是有定义的, 考虑“参考映照”

$$u_0(Z) = \prod_{j=1}^m \left( \frac{Z - p_j}{|Z - p_j|} \right)^{d_j}.$$

我们有如下定理.

**定理 2.14** 设 (2.28) — (2.29) 成立, 则有

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \geq \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 - C \|d\|^2 \cdot m^2, \quad (2.30)$$

其中  $\|d\| = \max_j |d_j|$ ,  $C$  为常数, 仅依赖于  $a$  和  $K$ , 更详细些, 如置  $\rho = |u|$ , 则存在单值函数  $\psi: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  使得

$$u = \rho u_0 e^{i\psi}, x \in \Omega$$

和

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \geq \int_{\Omega} |\nabla \rho|^2 + \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 + \frac{a^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 - C \|d\|^2 m^2, \quad (2.31)$$

其中常数仅依赖于  $a$  和  $K$ .

先证一个简单的引理.

**引理 2.15** 给定函数  $\psi$  定义在  $B_{2R_0} \setminus B_{R_0}$ , 则存在  $\psi$  的一个

扩张  $\bar{\varphi}$ , 定义在  $B_{2R_0}$ , 使得

$$\int_{B_{2R_0}} |\nabla \bar{\varphi}|^2 \leq C \int_{B_{2R_0} \setminus B_{R_0}} |\nabla \psi|^2. \quad (2.32)$$

证 由伸缩变换, 设  $R_0 = 1$ , 附加一个常数于  $\psi$  使得

$$\int_{B_2 \setminus B_1} \psi = 0.$$

于是由 Poincaré 不等式推出

$$\int_{B_2 \setminus B_1} |\psi|^2 \leq C \int_{B_2 \setminus B_1} |\nabla \psi|^2.$$

再扩张  $\psi$  于  $B_1$ , 由标准的反射和截断技巧得到.

定理 2.14 的证明, 置  $\rho = |u|$ , 局部表示

$$u = \rho e^{i\psi},$$

则有

$$|\nabla u|^2 = |\nabla \rho|^2 + \rho^2 |\nabla \varphi|^2. \quad (2.33)$$

类似地, 局部表示

$$u_0 = e^{i\varphi_0}$$

具有  $|\nabla u_0| = |\nabla \varphi_0|$ ,

$$\nabla \varphi_0(z) = \sum_j \frac{d_j V_j(z)}{|z - z_j|}, \quad (2.34)$$

其中  $V_j(z)$  为单位向量, 它和以  $\rho_j$  为中心, 以  $|z - \rho_j|$  为半径的圆相切, 有

$$V_j(z) = \left( -\frac{y - \rho_j}{|z - \rho_j|}, \frac{x - \rho_j}{|z - \rho_j|} \right). \quad (2.35)$$

为方便引入在  $\Omega$  上整体定义的函数  $\psi$ ,

$$u = \rho u_0 e^{i\psi}, \quad (2.36)$$

因此

$$|\nabla u|^2 = |\nabla \rho|^2 + \rho^2 |\nabla \varphi_0 + \nabla \psi|^2, \quad (2.37)$$

推之

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \geq \int_{\Omega} |\nabla \rho|^2 + \rho^2 |\nabla u_0|^2 + 2\rho^2 \nabla \varphi_0 \cdot \nabla \psi + \rho^2 |\nabla \psi|^2$$

$$\geq \int_{\Omega} |\nabla \rho|^2 + \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 + \int_{\Omega} a^2 |\nabla \psi|^2 - X, \\ a \leq \rho \leq 1, \quad (2.38)$$

其中

$$X = \int_{\Omega} (1 - \rho^2) |\nabla u_0|^2 + \int_{\Omega} 2(1 - \rho^2) \nabla \varphi_0 \cdot \nabla \psi - \int_{\Omega} 2 \nabla \varphi_0 \nabla \psi \\ = X_1 + X_2 + X_3.$$

先估计  $X_1$ , 我们有

$$|\nabla u_0| = |\nabla R| \leq \sum_{j=1}^m \frac{|d_j|}{|z - \rho_j|}. \quad (2.39)$$

因此

$$\|\nabla u_0\|_4 \leq \|d\| \sum_j \left\| \frac{1}{z - \rho_j} \right\|_4 \leq \|d\| m \left( \frac{\pi}{R_0^2} \right)^{1/4}. \quad (2.40)$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式, (2.40) 和 (2.29) 可得

$$|X_1| \leq K^{1/2} \|d\|^2 m^2 \pi^{1/2}. \quad (2.41)$$

估计  $X_2$ , 从 (2.34) 有

$$|\nabla \varphi_0| \leq \frac{m \|d\|}{R_0}. \quad (2.42)$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式和 (2.42) 得

$$|X_2| \leq 2 \int_{\Omega} (1 - \rho^2) |\nabla \varphi_0| |\nabla \psi| \leq 2 K^{1/2} m \|d\| \|\nabla \psi\|_2. \quad (2.43)$$

估计  $X_3$ , 我们有

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi_0 \nabla \psi = \sum_j d_j \int_{\Omega} \frac{V_j \cdot \nabla \psi}{|z - \rho_j|}.$$

扩张  $\psi$  在每个圆盘  $B(p_j, R_0)$  的内部, 由引理 (2.16) 得

$$\int_{\Omega} \frac{V_j \cdot \nabla \psi}{|z - \rho_j|} = \int_{B_K \setminus B(p_j, R_0)} \frac{V_j \cdot \nabla \overline{\psi}}{|z - \rho_j|} - \sum_{k \neq j} \int_{B(p_k, R_0)} \frac{V_j \cdot \nabla \overline{\psi}}{|z - \rho_j|}, \quad \forall j, \quad (2.44)$$

当  $k \neq j$  时,

$$\left| \int_{B(p_k, R_0)} \frac{V_j \cdot \nabla \psi}{|z - p_j|} \right| \leq \frac{1}{R_0} \int_{B(p_k, R_0)} |\nabla \psi|, \quad (2.45)$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式和引理 2.15 有

$$\left| \sum_{k \neq j} \int_{B(p_k, R_0)} \frac{V_j \cdot \nabla \psi}{|z - p_j|} \right| \leq C(m-1) \|\nabla \psi\|_2, \quad (2.46)$$

其中  $C$  为某绝对常数.

考虑以  $p_j$  为中心,  $R = |p_j|$  为半径的圆  $\subset B_R(0)$ , 当  $r \in (0, R - |p_j|)$  时, 在  $S_r = \partial B_r(p_j)$  上,  $V_j = \tau$  (切向). 因此

$$\frac{1}{r} \int_{S_r(p_j)} V_j \cdot \nabla \psi = \frac{1}{r} \int_{S_r} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = 0.$$

对于  $\rho_j = R - |p_j|$ , 我们有

$$\begin{aligned} & \left| \int_{B_R(0) \setminus B_{\rho_j}(p_j)} \frac{V_j \nabla \psi}{|z - p_j|} \right| = \left| \int_{B_R(0) \setminus B_{\rho_j}(p_j)} + \int_{B_{\rho_j}(p_j) \setminus B_{R_0}(p_j)} \right| \\ &= \left| \int_{B_R(0) \setminus B_{\rho_j}(p_j)} \frac{V_j \nabla \psi}{|z - p_j|} \right| \leq \frac{1}{\rho_j} \int_{B_R \setminus B(p_j, \rho_j)} |\nabla \psi| \\ &\leq \frac{1}{\rho_j} \|\nabla \psi\|_2 (\pi R^2 - \pi \rho_j^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

因此可得

$$\int_{B_R(0) \setminus B(p_j, R_0)} \frac{V_j \nabla \psi}{|z - p_j|} \leq C \|\nabla \psi\|_2. \quad (2.47)$$

联合(2.44), (2.46) 和(2.47) 有

$$|X_3| \leq Cm \|d\| \|\nabla \psi\|_2. \quad (2.48)$$

连同(2.41), (2.43), (2.48) 可得

$$\begin{aligned} |X| &\leq CK^{1/2} \|d\|^2 m^2 + \|d\| m \|\nabla \psi\|_2 (2K^{1/2} + C) \\ &\leq \frac{1}{2} a^2 \|\nabla \psi\|_2^2 + \frac{\|d\|^2}{a^2} m^2 (4K + C). \end{aligned}$$

回到(2.40) 可得

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \geq \int_{\Omega} |\nabla \rho|^2 + \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 + \frac{a^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2$$

$$= \frac{\|d\|^2}{a^2} m^2(4K + C),$$

其中  $C$  为某绝对常数, (2.31) 成立, 断言 1 也得证.

为证断言 2, 利用 [1, 推论 II, 1], 即有

**引理 2.16** 设  $G \subset \mathbb{R}^2$  为有界开集,  $\omega_i = B(x_i, \rho)$ ,  $i = 1,$

$2, \dots, n$ ,  $\Omega = G \setminus \bigcup_{i=1}^n \omega_i$ ,  $d_i \in \mathbb{R}$ ,  $d = \sum_{i=1}^n d_i$ , 如满足条件

$$(1) \operatorname{dist}(x_i, \partial G) \geq 2\rho,$$

$$(2) \rho \leq \frac{1}{2} \operatorname{dist}(x, \partial G),$$

$$(3) \delta\rho \leq |x_i - x_j| \quad (i \neq j),$$

$$\mathcal{E} = \{v \in H^1(\Omega; S^1), \deg(v, \partial G) = d, \deg(v, \partial \omega_i) = d_i\},$$

则对  $v \in \mathcal{E}$  有

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \geq 2\pi |d| \log \frac{\pi}{\mu} - C, \quad (2.49)$$

其中常数  $C$  依赖于  $\sum_{i=1}^n |d_i|$ ,  $\operatorname{diam} G/\mu$ , 和  $n$ .

对于  $u_0 \in S^1$ ,  $\deg(u_0, \partial B(x_k^{\varepsilon_n}, \lambda_{\varepsilon_n})) = d_j$ , 则由 (2.11) 即得

$$\int_{\Omega_j} |\nabla u_0|^2 \geq 2\pi |k_j| \log(n/\varepsilon_n) - C, \quad (2.50)$$

断言 2 得证.

现证定理 2.10, 为此我们需要某些准备的引理和定理.

**引理 2.17** 我们有

$$k_j \geq 0, \quad \forall j.$$

**证** 由定理 2.13, 可知

$$\int_{\Omega_j} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \geq 2\pi |k_j| |\log \varepsilon_n| - C(\eta), \quad (2.51)$$

因此

$$\sum_j \int_{\Omega_j} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \geq 2\pi |\log \varepsilon_n| \sum_j |k_j| - C(\eta). \quad (2.52)$$



另一方面,由定理 2.3 有

$$\int_G |\nabla u_{\epsilon_n}|^2 \leq 2\pi |\log \epsilon_n| + C. \quad (2.53)$$

联合(2.51) 和(2.52) 得

$$\sum_j |k_j| \leq d + \frac{C(\eta)}{|\log \epsilon_n|}.$$

令  $n \rightarrow \infty$  (因  $K_j$  与  $n$  无关) 得

$$\sum_j |K_j| \leq d.$$

另一方面有

$$\sum_j k_j = d.$$

由此推得  $k_j \geq 0, \forall j$ .

**定理 2.18** 存在常数  $C = C(g, G)$ , 使得

$$\int_G |\nabla u_\epsilon|^2 \geq 2\pi d |\log \epsilon| - C, \forall \epsilon \leq 1. \quad (2.54)$$

**证** 若不然, (2.54) 不成立, 则存在序列  $\epsilon_n \leq 1$ , 使得

$$\int_G |\nabla u_{\epsilon_n}|^2 - 2\pi d |\log \epsilon_n| \rightarrow -\infty. \quad (2.55)$$

由定理 2.13 和引理 2.16 有

$$\int_{\Omega_j} |\nabla u_{\epsilon_n}|^2 \geq 2\pi k_j \log \left( \frac{\eta}{\epsilon_n} \right) - C.$$

对  $j$  求和得

$$\int_{\bigcup_j \Omega_j} |\nabla u_{\epsilon_n}|^2 \geq 2\pi d \log \left( \frac{\eta}{\epsilon_n} \right) - C, \quad (2.56)$$

这与(2.55) 矛盾, 其中  $\eta$  为固定, 定理得证.

定理 2.10 的证明. 联合(2.56) 和定理 2.3 的上界, 即得

$$\int_{G \setminus \bigcup_j B(a_j, \eta)} |\nabla u_{\epsilon_n}|^2 \leq 2\pi d |\log \eta| + C,$$

定理得证.

前面我们已经知道, 存在一个极小元子序列  $\{u_{\epsilon_n}\}$  和有限集

$\{a_j\}_{j=1}^{N_2} \in \Omega$  使得对每一个紧集  $K \subset \Omega' \setminus \sum_{j=1}^{N_2} \{a_j\}$ ,

$$\int_K |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \leq C_K, \quad (2.57)$$

$$|u_{\varepsilon_n}| \geq \frac{1}{2}, \forall x \in K, \quad (2.58)$$

$$u_{\varepsilon_n} \rightarrow u_*, a, e \text{ 在 } \Omega \text{ 上}, \quad (2.59)$$

$$u_{\varepsilon_n} \rightarrow u_*, \text{ 在 } H^1(K) \text{ 上弱收敛}, \quad (2.60)$$

$$\int_{\Omega} (|u_{\varepsilon_n}|^2 - 1)^2 \leq (\varepsilon_n^2), \quad (2.61)$$

推出  $|u_*| = 1, \text{ a.e. 且 } u_* = \bar{g}, x \in \Omega' \setminus \Omega, \bar{\Omega} \subset \Omega'.$

我们要证明的主要结果为

**定理 2.19** 我们有

$$u_* \in C^\infty(\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{N_2} \{a_j\}; S^1), \quad (2.62)$$

$u_*$  为调和映照, 即

$$-\Delta u_* = u_* |\nabla u_*|^2, x \in \Omega \setminus \sum_{j=1}^{N_2} \{a_j\}, \quad (2.63)$$

$$u_* = g, x \in \partial\Omega, \quad (2.64)$$

$$\deg(u_*, a_j) \geq 0, \forall j, \quad (2.65)$$

$$\sum_j \deg(u_*, a_j) = d. \quad (2.66)$$

对于每一个紧子集  $K \subset \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{N_2} \{a_j\}$  和任何正整数  $k$  有

$$u_{\varepsilon_n} \rightarrow u_*, \text{ 在 } C^k(K) \text{ 中}, \quad (2.67)$$

$$\frac{1 - |u_{\varepsilon_n}|^2}{\varepsilon_n^2} \rightarrow |\nabla u_*|^2 \text{ 在 } C^k(\Omega) \text{ 中}, \quad (2.68)$$

$$u_{\varepsilon_n} \rightarrow u_* \text{ 在 } C_{loc}^{1,\alpha}(\bar{\Omega} \setminus \bigcup_{j=1}^{N_2} \{a_j\}), \forall \alpha < 1. \quad (2.69)$$

定理 2.19 的证明. 固定  $x_0 \in \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{N_2} \{a_j\}$ , 选取  $R > 0$  使得

$\overline{B(x_0, 2R)} \subset \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{N_2} \{a_j\}$ , 因

$$\int_{B(x_0, 2R)} |\nabla u_{\epsilon_n}|^2 \leq C,$$

利用 Fubini 定理, 能找到  $R' \in (R, 2R)$  使得

$$\int_{\partial B(x_0, R')} |\nabla u_{\epsilon_n}|^2 \leq C_1. \quad (2.70)$$

$$\int_{\partial B(x_0, R')} (|u_{\epsilon_n}|^2 - 1)^2 \leq C_1 \epsilon_n^2. \quad (2.71)$$

由(2.70) 和(2.59) 推出

$u_{\epsilon_n} \rightarrow u_*$  在  $\partial B(x_0, R')$  中一致收敛.

因

$$\deg(u_{\epsilon_n}, \partial B(x_0, R')) = 0,$$

且  $|u_{\epsilon_n}| \geq \frac{1}{2}$ ,  $x \in B(x_0, R')$ , 可得

$$\deg(u_*, \partial B(x_0, R')) = 0. \quad (2.72)$$

由此和前面第 §1 可推出(2.61), (2.63), (2.67), (2.68). 性质(2.66)来自  $u_*$  远离奇点是光滑的,  $|u_*| = 1$ ,  $\deg(g, \partial\Omega) = \deg(u_*, \partial\Omega) = d$ .

现证(2.67),  $\deg(u_*, a_j) \geq 0, \forall j$ .

前面引理 2.17 已证  $k_j = \deg(u_{\epsilon_n}, \partial B(a_j, \eta)) \geq 0$ , 要证(2.65), 只要证  $u_j = \deg(u_*, a_j)$ , 如果  $a_j \in \Omega$ , 由于(2.67)成立,

$$\text{则 } k_j = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B(a_j, \eta)} \frac{u_{\epsilon_n}}{|u_{\epsilon_n}|^2} \times (u_{\epsilon_n})_\tau \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B(a_j, \eta)} u_* \times u_{*\tau} = \deg(u_*, a_j).$$

如果  $a_j \in \partial\Omega$ , 则能选取  $R' > 0$ , 使得

$$\int_{\partial B(a_j, R')} |\nabla u_{\epsilon_n}|^2 \leq C,$$

且使得  $\overline{B(a_j, R')}$  不含有奇性, 同上.

$u_{\epsilon_n} \rightarrow u_*$  在  $\partial B(a_j, R')$  一致收敛.

于是当  $n$  充分大时,

$$k_j = \deg(u_{\epsilon_n}, \partial B(a_j, R')) = \deg(u_*, \partial B(a_j, R')) \geq 0.$$

(2.69) 的证明分两步:

step 1 证  $u_{\epsilon_n} \rightarrow u_*$  在  $H^1_{\text{loc}}(\Omega' \setminus \bigcup_{j=1}^{N_2} \{a_j\})$  内,

$u_{\epsilon_n} \rightarrow u_*$  在  $C^0(\Omega' \setminus \bigcup_{j=1}^{N_2} \{a_j\})$  内.

只要证,  $X_0 \in \partial\Omega$ ,  $X_0$  不是奇点  $a_j$ , 且对某个  $R^1 > 0$ , 有

$u_{\epsilon_n} \rightarrow u_*$  在  $H^1(B(x_0, R^1) \cap \Omega)$  和  $C^0(\overline{B(x_0, R^1)} \cap \Omega)$  内.

实际上, 固定  $R < \frac{1}{2} \text{dist}(\Omega, \partial\Omega')$ ,  $B(x_0, 2R)$  不含有任何奇点, 由 Fubini 定理, 可找到  $R' \in (R, 2R)$ , 使得

$$\int_{\partial B(x_0, R')} |\nabla u_{\epsilon_n}|^2 \leq C,$$

$$\int_{\partial B(x_0, R')} (|u_{\epsilon_n}|^2 - 1) \leq C\epsilon_n^2.$$

因  $\deg(u_{\epsilon_n}, \partial B(x_0, R')) = 0$ , 由前面第一节可知,

$u_{\epsilon_n} \rightarrow u_*$  在  $H^1(l \cap B(x_0, R')) \cap C^0(\overline{\Omega \cap B(x_0, R')})$ ,

且

$$\frac{1}{\epsilon_n^2} \int_{\partial B(x_0, R')} (|u_{\epsilon_n}|^2 - 1)^2 \rightarrow 0.$$

step 2  $u_{\epsilon_n} \rightarrow u_*$  在  $C^{1,\alpha}_{\text{loc}}(\overline{\Omega} \setminus \bigcup_{j=1}^{N_2} \{a_j\})$ .

不妨认为  $a_i \in \Omega$ ,  $i = 1, \dots, N_2$ . 当  $\delta > 0$  充分小时,  $B(a_i, \delta) \subset \Omega$ ,  $B(a_i, \delta) \cap B(a_j, \delta) = \emptyset$ , 令

$$U = \Omega \setminus \sum_{i=1}^{N_2} B(a_i, \delta).$$

由 step 1 可知,  $u_{\epsilon_n} \rightarrow u_*$  在  $H^1(U)$  和  $C^0(\overline{U})$  中, 现证  $u_{\epsilon}$  在

$H^2(U)$  中有界. 因

$$-\Delta u_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2} u_\varepsilon (1 - |u_\varepsilon|^2),$$

记

$$\psi = \frac{1}{\varepsilon^2} (1 - |u_\varepsilon|^2).$$

我们有

$$-2\varepsilon^2 \Delta \psi + \psi \leq 4 |\Delta u_\varepsilon|^2 \text{ 在 } U \text{ 中.}$$

两边乘以  $\psi^{q-1}$ ,  $\forall q > 2$ , 有

$$\int_U \psi^q \leq 4 \int_U |\nabla u_\varepsilon|^2 \psi^{q-1} + 2\varepsilon^2 \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{v}} \psi^{q-1}.$$

分  $\partial U$  为两部分,  $\partial U = \Gamma \cup \partial\Omega$ , 注意到

$$\psi = 0, x \in \partial\Omega,$$

$$\varepsilon^2 \left| \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{v}} \right| \psi^{q-1} \leq C, x \in \Gamma.$$

这是因为由 (2.68),  $\psi$  在  $L^\infty(\Gamma)$  中有界, 而  $\varepsilon^2 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{v}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} |u|^2$ ,

由 (2.67) 在  $L^\infty(\Gamma)$  中有界, 由此推出  $\psi$  在  $L^\infty(U)$  中有界.

以下证明  $u_*$  具有性质: 奇性度数为 1, 且奇点不在  $\partial\Omega$  上.

**定理 2.20** 我们有

$$k_j = \deg(u_*, a_j) = 1, \forall j, \quad (2.73)$$

$$a_j \in \Omega, \forall j. \quad (2.74)$$

推之, 具有精确的  $d$  个不同点在集合  $\{a_j\}$  中.

**证** step 1,  $k_j = \deg(u_*, a_j) > 0$ .

在引理 2.17 中已证  $k_j \geq 0, \forall j$ , 现证明  $k_j = 0$  是不可能的, 否则, 设对某个  $j, k_j = 0$ , 则可找到  $R > 0$ , 使得

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(a_j, R)} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 &\leq C, \\ \int_{\partial B(a_j, R)} (|u_{\varepsilon_n}|^2 - 1)^2 &\leq C\varepsilon_n^2, \end{aligned}$$

且  $\overline{B(a_j, R)}$  不含有任何其他奇点, 因此  $\deg(u_{\epsilon_n}, \partial B(a_j, R)) = k_j = 0$ , 由此可推得

$$\frac{1}{\epsilon^2} \int_{B(a_j, R)} (|u_{\epsilon_n}|^2 - 1)^2 \rightarrow 0. \quad (2.75)$$

另一方面, 由  $a_j$  的定义, 至少存在一个坏圆盘  $B(x_j, 2\lambda\epsilon_n) \subset B(a_j, R)$ , 因此

$$\frac{1}{\epsilon^2} \int_{B(x_j, 2\lambda\epsilon_n)} (|u_{\epsilon_n}|^2 - 1)^2 \geq \mu_0 > 0. \quad (2.76)$$

联合(2.75)和(2.76)得矛盾. 因此  $k_j > 0$ .

step 2  $k_j = 1$ .

固定  $\eta > 0$ , 使得

$$\eta < \frac{1}{8} \min_{j \neq k} |a_j - a_k| + \frac{1}{2} \text{dist}(\Omega, \partial\Omega').$$

利用不等式(2.20)于  $\Omega'$  中,

$$\Omega = \Omega' \setminus \bigcup_j B(a_j, \eta),$$

$\mu = \frac{1}{2} \text{dist}(\Omega, \partial\Omega')$ , 可得

$$\int_{\Omega} |\nabla u_*|^2 \geq 2\pi \sum_j k_j^2 \left( \log \frac{\mu}{\eta} \right) - C, \quad (2.77)$$

其中常数  $C$  依赖于  $d, \Omega, \Omega'$ , 再写(2.77)为

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_*|^2 \geq \pi \left( \sum_{j=1}^N k_j^2 \right) |\log \eta| - C. \quad (2.78)$$

另一方面, 由不等式

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_{\epsilon_n}|^2 \leq \pi d |\log \eta| + C,$$

取  $n \rightarrow \infty$  极限, 得

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_*|^2 \leq \pi d |\log \eta| + C, \quad (2.79)$$

其中在(2.78), (2.79)中的常数  $C$  均与  $\eta$  无关. 由(2.78), (2.79)得

$$\sum_j (k_j^2 - k_j) |\log \eta| \leq C.$$

令  $\eta \rightarrow 0$  得

$$\sum_j (k_j^2 - k_j) \leq 0,$$

$k_j > 0$ , 所以  $k_j = 1, N_2 = d$ .

step 3  $a_j \in \Omega, \forall j$ .

至今我们仅知道  $a_j \in \bar{\Omega}$ , 不排除  $a_j \in \partial\Omega$  的可能性, 现设  $a_j \in \partial\Omega$ , 对某个  $j$ , 简单设  $a_1 \in \partial\Omega, a_2, \dots, a_d \in \Omega$ , 取  $R > 0$  使得

$$\overline{B(a_1, R)} \subset \Omega' \setminus \{a_2, \dots, a_d\}.$$

选取  $\eta \in (0, R)$ , 且  $\eta \rightarrow 0$ , 引用如下引理.

**引理 2.21** 设  $a \in \partial\Omega$ , 对任何映照  $u \in C_{\text{loc}}^1(\overline{B(a, R)} \setminus \{a\}; S^1)$  使得

$$u = \bar{g}, x \in \Omega' \setminus \Omega \cap B(a, R), \quad (2.80)$$

$$\deg(u, \partial B(a, R)) = 1. \quad (2.81)$$

我们有

$$\frac{1}{2} \int_{B(a, R) \setminus B(a, \eta)} |\nabla u|^2 \geq 2\pi |\log \eta| - C, \forall \eta \in (0, R),$$

其中常数  $C$  仅依赖于  $\bar{g}$  和  $R$ .

现完成 step 3 的证明. 应用不等式 (2.21) 于  $\hat{G} = (\Omega' \setminus B(a, R)) \setminus \sum_{j=2}^d B(a_j, \eta)$  可得

$$\frac{1}{2} \int_{\hat{G}} |\nabla u_*|^2 \geq \pi(d-1) |\log \eta| - C, \quad (2.82)$$

其中常数  $C$  仅依赖于  $R, d, \Omega$  和  $\Omega'$ , 由引理 2.21 有

$$\frac{1}{2} \int_{B(a_1, R) \setminus B(a_1, \eta)} |\nabla u_*|^2 \geq 2\pi |\log \eta| - C. \quad (2.83)$$

由 (2.82) 和 (2.83) 可得

$$\frac{1}{2} \int_G |\nabla u_*|^2 \geq \pi(d+1) |\log \eta| - C,$$

其中  $G = \Omega' \setminus \bigcup_{j=1}^n B(a_j, \eta)$ , 常数  $C$  仅依赖于  $R, d, \Omega, \Omega'$ , 如同 step 2 所证, 可推出

$$|\log \eta| \leq C, \forall \eta \in (0, R),$$

其中  $C$  与  $\eta$  无关, 这是不可能的. 于是 step 3 得证.

现证引理 2.21. 通过共形坐标变换不妨认为  $\Omega = \{(x_1, x_2), x_2 > 0\}$ ,  $a = (0, 0)$  在保角变换中,  $B(a, R) \setminus B(a, \eta)$  变换为含于区域  $B(0, R') \setminus B(0, \eta')$  中,  $R' \approx R, \eta' \approx \eta$ .

考虑中心在  $O$  点半径为  $t$  的圆  $S_t, \eta < t < R$ , 我们有

$$1 = \deg(u, S_t) = \frac{1}{2\pi} \int_{S_t^+} u \times u_\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{S_t^+} u \times u_\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{S_t^-} \bar{g} \times \bar{g}_t,$$

其中  $S_t^+ = S_t \cap \{x_2 > 0\}, S_t^- = S_t \cap \{x_2 < 0\}$ . 注意到

$$\left| \int_{S_t^-} \bar{g} \times \bar{g}_t \right| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} g \times g_\theta d\theta \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t) - \varphi(-t)| \leq C\sqrt{t},$$

其中

$$g(te^{i\theta}) = e^{i\varphi(te^{i\theta})}, g_\tau = g_\theta = (i\varphi(te^{i\theta})) e^{i\varphi(te^{i\theta})}, g \in H^1(\partial\Omega),$$

因此

$$\begin{aligned} 1 - C\sqrt{t} &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{S_t^+} u \times u_\tau \leq \frac{1}{2\pi} \int_{S_t^+} |u_\tau| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left( \int_{S_t^+} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} (\pi t)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

于是

$$\int_{S_t^+} |\nabla u|^2 \geq \frac{4\pi}{t} - \frac{C}{\sqrt{t}}.$$

上式在  $[\eta, R]$  上积分可得

$$\int_{B(0, R) \setminus B(0, \eta)} |\nabla u|^2 \geq 2\pi |\log \eta| - C, \forall \eta \in (0, R),$$

其中  $C = C(\bar{g}, R)$ , 引理得证.

至此, 我们已经完全证明了定理 2.1.



现来证明定理 2.2, 即奇点  $\{a_i\}$  为函数  $W$  在  $\Omega$  上的极小, 这里

$$W(a, d, g) = -\pi \sum_{i \neq j} \log |a_i - g_j| + \frac{1}{2} \int_{\partial G} \Phi(g \times g_{\bar{r}}) - \pi \sum_{i=1}^d R(a_i),$$

其中  $\Phi, R$  为 (2.7), (2.8) 所定义.

为了证明定理 2.2, 我们需要某些引理和定理.

**引理 2.22** 设  $\bar{a} = \{\bar{a}_j\}$  为  $\Omega$  中的任意不同点, 则存在  $\rho_0 > 0$ , 它仅依赖于  $\bar{a}$  和  $\Omega$ , 使得对任何  $\rho < \rho_0$  和  $\epsilon > 0$ , 有

$$E_\epsilon(u_\epsilon) \leq dI(\epsilon, \rho) - W(\bar{a}) - \pi d \log\left(\frac{1}{\rho}\right) + O(\rho), \quad (2.84)$$

其中  $O(\rho)$  表示量  $X$ , 使得  $|X| \leq C\rho$ ,  $C$  仅依赖于  $\Omega, \bar{a}$  和  $g$ .

**引理 2.23** 设  $a = \{a_j\}$  为  $\bar{\Omega}$  中有限奇点集, 则给定任何  $\rho$  (充分小,  $\rho < \rho_1$ ), 存在正整数  $N = N(\rho)$  使得对任何  $n \geq N$  有

$$E_{\epsilon_n}(u_{\epsilon_n}) \geq dI(\epsilon_n, \rho) + W(a) + \pi d \log\left(\frac{1}{\rho}\right) + O(\rho^2), \quad (2.85)$$

其中  $O(\rho^2)$  表示对于量  $Y$  有  $|Y| \leq C\rho^2$ , 常数  $C$  仅依赖于  $\Omega, a$  和  $g$ .

$$I(\epsilon, \rho) = \min_{u \in H_\rho^1} \left\{ \frac{1}{2} \int_{B_\rho} |\nabla u_\epsilon|^2 + \frac{1}{4\epsilon^2} \int_{B_\rho} (|u_\epsilon|^2 - 1)^2 \right\}.$$

定理 2.2 的证明. 固定  $\rho < \min(\rho_0, \rho_1)$ , 联合 (2.84), (2.85) 可得,

$$W(a) \leq W(\bar{a}) + O(\rho). \quad (2.86)$$

令  $\rho \rightarrow 0$  有

$$W(a) \leq W(\bar{a}).$$

因  $\bar{a}$  为任意点, 由此推出  $a$  为  $W$  的极小点.

为了证明引理 2.22 和引理 2.23, 我们需要以下定理.

**定理 2.24** 当  $\rho \rightarrow 0$  时, 我们有

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_\rho} |\nabla \bar{u}_\rho|^2 = \pi \left( \sum_{i=1}^n d_i^2 \right)^2 \log\left(\frac{1}{\rho}\right) + W(a) + O(\rho), \quad (2.87)$$

其中  $\bar{u}_\rho$  为

$$\min_{u \in \epsilon_\rho} \int_{\Omega_\rho} |\nabla u|^2 \quad (2.88)$$

的极小元.

$$\tilde{\epsilon}_\rho = \left\{ v \in H^1(\Omega_\rho; S^1) \left| \begin{array}{l} v = g, x \in \partial G, \forall i, \exists \alpha_i \in \mathbb{C}, |\alpha_i| = 1 \\ \text{使得 } x(z) = \frac{\alpha_i}{\rho d_i} (z - a_i)^{d_i}, z \in \partial B(a_i, \rho) \end{array} \right. \right\}.$$

**定理 2.25** 设  $u_0$  为典型调和映照, 则当  $\rho \rightarrow 0$  时有

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_\rho} |\nabla u_0|^2 = \pi \left( \sum_{i=1}^n d_i^2 \right) \log \left( \frac{1}{\rho} \right) + W + O(\rho^2), \quad (2.89)$$

其中  $\Omega_\rho = G \setminus \bigcup_{i=1}^n \overline{B(a_i; \rho)}$ .

**定理 2.26**

$$E'_\tau = \inf_{v \in \epsilon'_\tau} \int_\Omega |\nabla v|^2 \quad (2.90)$$

为某一映照所惟一达到(至少差一位相), 其中

$$\epsilon'_\tau = \left\{ V \in H^1(\Omega; S^1) \left| \begin{array}{l} \forall i = 0, 1, \dots, n, \exists \alpha_i \in \mathbb{C}, \\ |\alpha_i| = 1, v = d_i g_i, x \in \partial W_i \end{array} \right. \right\}, \quad (2.91)$$

$$\overline{W_i} \subset \Omega, \overline{W_i} \cap \overline{W_j} = \emptyset, i \neq j, \Omega = G \setminus \bigcup_{i=1}^n \overline{W_i},$$

进一步有

$$E'_\tau = \int_\Omega |\nabla \Phi_\tau|^2, \quad (2.92)$$

其中  $\Phi_\tau$  为问题

$$\begin{cases} \Delta \Phi_\tau = 0, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial \Phi_\tau}{\partial \tau} = g \times \frac{\partial g_1}{\partial \tau}, & x \in \partial w_i, i = 0, 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (2.93)$$

的解.

**定理 2.27** 存在  $\mathcal{C}$  和  $\mathcal{L}$  的一一对应, 更详细些, 给定任何  $u \in \mathcal{C}$ , 存在惟一  $\psi \in \mathcal{L}$ , 使得

$$u = \Omega^\psi u_0, \quad (2.94)$$

其中

$$\mathcal{L} = \{ \psi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \psi \text{ 连续到 } \partial\Omega, \text{ 且}$$

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= 0, & x &\in \Omega \\ \psi &= 0, & x &\in \partial\Omega \end{aligned},$$

$u_0$  为典则调和映照,

$$u_0(z) = \prod_{i=1}^n \left( \frac{z - a_i}{|z - a_i|} \right)^{d_i} e^{h_0(z)}, \Delta h_0(z) = 0, \quad (2.95)$$

我们先证明引理 2.22 和引理 2.23, 最后证明定理 2.24, 定理 2.25, 定理 2.26 和定理 2.27.

引理 2.22 的证明. 应用定理 2.24 于点  $\bar{a}$ , 对于任意的  $\rho < \rho_0$

$$= \min_{j \neq k} \left\{ \frac{1}{2} |\bar{a}_j - \bar{a}_k|, \text{dist}(\bar{a}_j, \partial G) \right\},$$

某映照  $\tilde{u}_\rho: \Omega_\rho \rightarrow S^1$ , 使得  $\tilde{u}_\rho$

$$= g, x \in \partial G, \tilde{u}_\rho(z) = \alpha_i \frac{z - \bar{a}_j}{|z - \bar{a}_j|}, z \in \partial B(\bar{a}_j, \rho) \mid \alpha_j \mid = 1, \text{ 且}$$

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_\rho} |\nabla \tilde{u}_\rho|^2 = \pi d \log(1/\rho) + W(\bar{a}) + O(\rho). \quad (2.96)$$

另一方面, 对每一个  $j$ , 由  $I(\epsilon, \rho)$  的定义, 能找到函数  $v_j: B(a_j, \rho) \rightarrow \mathbb{C}$ , 使得  $v_j(z) = \alpha^j \frac{(z - \bar{a}_j)}{|z - \bar{a}_j|}, z \in \partial B(\bar{a}_j, \rho)$  且

$$\frac{1}{2} \int_{B(\bar{a}_j, \rho)} |\nabla v_j|^2 + \frac{1}{4\epsilon^2} \int_{B(\bar{a}_j, \rho)} (|v_j|^2 - 1)^2 = I(\epsilon, \rho). \quad (2.97)$$

令

$$W = \begin{cases} \tilde{u}_\rho, & x \in \Omega_\rho \\ v_j, & x \in B(\bar{a}_j, \rho), j = 1, 2, \dots, d. \end{cases}$$

联合(2.95)和(2.96)得

$$E_\epsilon(W) = dI(\epsilon, \rho) + W(\bar{a}) + \pi d \log(1/\rho) + O(\rho),$$

引理得证.

引理 2.23 的证明. 已知  $u_{\epsilon_n}$  依  $H_{\text{loc}}^1(\bar{G}, U\{a_j\})$  收敛于  $u_*$ , 因此,

对任何固定的  $\rho, \rho < \rho_1 = \min_{j \neq k} \left\{ \frac{1}{2} |\bar{a}_j - \bar{a}_k|, \text{dist}(\bar{a}_j, \partial G) \right\}$  有

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_\rho} |\nabla u_{\epsilon_n}|^2 \rightarrow \frac{1}{2} \int_{\Omega_\rho} |\nabla u_*|^2. \quad (2.98)$$

特别,存在正整数  $N_1 = N_1(\rho)$ ,使得对每个  $n \geq N_1$ ,有

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_\rho} |\nabla u_{\epsilon_n}|^2 \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega_\rho} |\nabla u_*|^2 - \rho^2.$$

另一方面,由定理 2.25 有

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_\rho} |\nabla u_*|^2 = \pi d \log(1/\rho) + W(u) + O(\rho^2), \quad (2.99)$$

联合(2.98)和(2.99)可知对  $n \geq N_1(\rho)$  有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega_\rho} |\nabla u_{\epsilon_n}|^2 + \frac{1}{4\epsilon_n^2} \int_{\Omega_\rho} (|u_{\epsilon_n}|^2 - 1)^2 \\ \geq \pi d \log(1/\rho) + W(u) + O(\rho^2). \end{aligned} \quad (2.100)$$

现转到在球  $B(a_j, \rho)$  上的能量估计,我们断言,对任何给定  $\rho, \rho < \rho_1$ ,存在正整数  $N_2 = N_2(\rho)$ ,使得对每一个  $n \geq N_2$  有

$$\frac{1}{2} \int_{B(a_j, \rho)} |\nabla u_{\epsilon_n}|^2 + \frac{1}{4\epsilon_n^2} \int_{B(a_j, \rho)} (|u_{\epsilon_n}|^2 - 1)^2 \geq I(\epsilon_n, \rho) + O(\rho^2). \quad (2.101)$$

联合(2.100)和(2.101)即得引理 2.23 的结论.

断言(2.101)的证明,由定理 2.27 可知在靠近  $a_j$  附近有

$$u_*(z) = e^{i(\theta + H_j(z))}, \quad (2.102)$$

其中  $e^{i\theta} = \frac{z - a_j}{|z - a_j|}$ ,  $H_j(z)$  为  $a_j$  邻域的实值光滑调和映照,且有

$$\nabla H_j(a_j) = 0. \quad (2.103)$$

前面已证,对任意给定  $\rho < \rho_1$ ,能找到正整数  $N_3 = N_3(\rho)$  使得对一切  $n \geq N_3$  有

$$\|u_{\epsilon_n} - u_*\|_{L^\infty(B(a_j, \rho), B(a_j, \rho/2))} \leq \rho^2, \quad (2.104)$$

$$\|\nabla u_{\epsilon_n} - \nabla u_*\|_{L^\infty(B(a_j, \rho), B(a_j, \rho/2))} \leq \rho. \quad (2.105)$$

同时可设对  $n \geq N_3$  有

$$\frac{1 - |u_{\epsilon_n}|^2}{\epsilon_n^2} \leq |\nabla u_*|^2 + 1, x \in B(a_j, \rho) \setminus B(a_j, \rho/2). \quad (2.106)$$

从(2.102)和(2.103)有

$$|\nabla u_*| \leq 2/\rho + o(\rho), x \in B(a_j, \rho) \setminus B(a_j, \rho/2), \quad (2.107)$$

联合(2.106)和(2.107)可得

$$-\frac{1 - |u_{\epsilon_n}|^2}{\epsilon_n^2} \leq \frac{4}{\rho^2} + C \equiv K(\rho), x \in B(a_j, \rho) \setminus B(a_j, \rho/2), \quad (2.108)$$

其中  $C$  表示与  $n, \rho$  无关的常数.

考虑映照

$$w_n(z) = \left( \frac{2(z - a_j)}{\rho} - 1 \right) (e^{i(\theta + H_j(a_j))} - u_{\epsilon_n}(z)) + u_{\epsilon_n}(z), \quad (2.109)$$

$z \in B(a_j, \rho) \setminus B(a_j, \rho/2)$ , 我们有如下引理.

**引理 2.28** 存在正整数  $N_4 = N_4(\rho)$  使得对任何  $n \geq N_4$ , 有

$$\|w_n - u_{\epsilon_n}\|_{L^\infty(B(a_j, \rho), B(a_j, \rho/2))} \leq C\rho^2, \quad (2.110)$$

$$\|\nabla w_n - \nabla u_{\epsilon_n}\|_{L^\infty(B(a_j, \rho), B(a_j, \rho/2))} \leq C\rho \quad (2.111)$$

和

$$|w_n(z)|^2 \geq 1 - C\rho^4, \forall z \in B(a_j, \rho) \setminus B(a_j, \rho/2). \quad (2.112)$$

**证** 从(2.99)有

$$|w_n - u_{\epsilon_n}| \leq |e^{i(\theta + H_j(a_j))} - u_*| + |u_* - u_{\epsilon_n}|,$$

则由(2.102), (2.103)和(2.104), 可得(2.110). 对任何  $n \geq N_3$ , 微分(2.109)易知

$|\nabla w_n - \nabla u_{\epsilon_n}| \leq \frac{2}{\rho} |e^{i(\theta + H_j(a_j))} - u_{\epsilon_n}| + |\nabla e^{i(\theta + H_j(a_j))} - \nabla u_{\epsilon_n}|$ , 则对任何  $n \geq N_3$ , 由(2.102), (2.103), (2.104)和(2.105)得(2.111).

(2.112)的证明来自下列恒等式

$$\begin{aligned} |ta + (1-t)b|^2 &= t|a|^2 + (1-t)|b|^2 + t(1-t)|a-b|^2 \\ &\geq t|a|^2 + (1-t)|b|^2 - \frac{1}{4}|a-b|^2, \\ &\forall t \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (2.113)$$

应用(2.113),  $a = e^{i(\theta+H_j(a_j))}$ ,  $b = u_{\epsilon_n}(t)$ ,  $t = \left(\frac{2|z-a_j|}{\rho} - 1\right)$ ,  
由(2.106)得

$$|w_n(z)|^2 \geq 1 - 2K(\rho)\epsilon_n^2 - \frac{1}{4} |e^{i(\theta+H_j(a_j))} - u_{\epsilon_n}(z)|^2, \quad (2.114)$$

最后选取  $N_4(\rho) \geq N_3(\rho)$  使得

$$K(\rho)\epsilon_n^2 \leq \rho^4, \forall n \geq N_4(\rho). \quad (2.115)$$

由(2.114), (2.115), (2.102), (2.103) 和(2.104)得(2.112).

现证断言(2.103), 置

$$R = R(n, \rho) = \sqrt{1 - k(\rho)\epsilon_n^2}. \quad (2.116)$$

可设  $n \geq N_4(\rho)$ ,  $\rho < 1$ , 于是  $R$  是确定的, 考虑映照  $p = p(n, \rho): \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  为

$$p(\xi) = \begin{cases} \xi, & |\xi| \geq R, \\ R \frac{\xi}{|\xi|}, & |\xi| < R. \end{cases}$$

标准的计算表明

$$\|\nabla p(\xi)\| \leq \begin{cases} 1, & |\xi| \geq R, \\ \frac{R}{|\xi|}, & |\xi| < R. \end{cases} \quad (2.117)$$

考虑映照  $v_n: B(a_j, \rho) \rightarrow \mathbb{C}$  为

$$v_n(z) = \begin{cases} u_{\epsilon_n}(z), & z \in B(a_j, \rho/2), \\ pw_n(z), & z \in B(a_j, \rho) \setminus B(a_j, \rho/2). \end{cases} \quad (2.118)$$

在  $\partial B(a_j, \rho)$  上,  $w_n(z) = e^{i(\theta+H_j(a_j))}$ , 因此

$$v_n(z) = e^{i(\theta+H_j(a_j))}.$$

从  $I(\epsilon_n, \rho)$  的定义有

$$\frac{1}{2} \int_{B(a_j, \rho)} |\nabla v_n|^2 + \frac{1}{4\epsilon_n} \int_{B(a_j, \rho)} (|v_n|^2 - 1)^2 \geq I(\epsilon_n, \rho), \quad (2.119)$$

注意到在  $\partial B(a_j, \frac{\rho}{2})$  上,  $w_n = u_{\epsilon_n}$ , 因此  $v_n = u_{\epsilon_n}$ , 由(2.108)知

$|u_{\epsilon_n}| \geq R$ , 因此,  $v_n \in H^1(B(a_j, \rho))$ .

从(2.118), (2.119) 得

$$\frac{1}{2} \int_{B(a_j, \rho)} |\nabla u_{\epsilon_n}|^2 + \frac{1}{4\epsilon_n^2} \int_{B(a_j, \rho)} (|u_{\epsilon_n}|^2 - 1)^2 \geq I(\epsilon_n, \rho) - U - V, \quad (2.120)$$

其中  $U = U(n, \rho)$ ,  $V = V(n, \rho)$  定义为

$$U = \frac{1}{2} \int_{B(a_j, \rho) \setminus B(a_j, \frac{\rho}{2})} (|\nabla v_n|^2 + |\nabla u_{\epsilon_n}|^2), \quad (2.121)$$

$$V = \frac{1}{4\epsilon_n^2} \int_{B(a_j, \rho) \setminus B(a_j, \frac{\rho}{2})} [(|v_n|^2 - 1)^2 - (|u_{\epsilon_n}|^2 - 1)^2]. \quad (2.122)$$

首先估计  $V$ , 因  $|W_n| \leq 1$  (由于  $W_n$  是  $u_{\epsilon_n}$  和  $e^{i(\theta + H_j(a_j))}$  的凸组合), 我们有  $R \leq |v_n| \leq 1$ , 且

$$(|v_n|^2 - 1)^2 \leq (1 - R^2)^2 = K^2(\rho)\epsilon_n^4.$$

从(2.108) 和(2.115) 有

$$V \leq \pi\rho^2 K^2(\rho)\epsilon_n^2 \leq C\rho^4, \quad \forall n \geq N_4(\rho). \quad (2.123)$$

现估计  $U$ , 在  $B(a_j, \rho) \setminus B(a_j, \rho/2)$  上, 由(2.117) 和(2.112) 有

$$|\nabla v_n|^2 \leq \|\nabla \rho(w_n)\|^2 + |\nabla w_n|^2 \leq \frac{1}{(1 - C\rho^4)} |\nabla w_n|^2. \quad (2.124)$$

由(2.124) 和(2.111) 可得

$$|\nabla v_n|^2 \leq \frac{1}{(1 - C\rho^4)} (|\nabla u_{\epsilon_n}|^2 + 2C\rho |\nabla u_{\epsilon_n}| + C^2\rho^2). \quad (2.125)$$

因此

$$|\nabla v_n|^2 - |\nabla u_{\epsilon_n}|^2 \leq C(\rho^4 |\nabla u_{\epsilon_n}|^2 + \rho |\nabla u_{\epsilon_n}| + \rho^2). \quad (2.126)$$

另一方面, 由(2.102), (2.103) 有

$$\|\nabla u_*\|_{L^2(B(a_j, \rho) \setminus B(a_j, \frac{\rho}{2}))} \leq C/\rho. \quad (2.127)$$

联合(2.117) 和(2.105) 得

$$\|\nabla u_{\varepsilon_n}\|_{L(\tilde{B(w_j, \varepsilon)} \setminus B(w_j, \frac{\varepsilon}{2}))} \leq C/\rho, \quad (2.128)$$

回到(2.126) 可得

$$U \leq C\rho^2. \quad (2.129)$$

从(2.120)、(2.123) 和(2.129) 即得估计(2.101).

以下证明定理 2.26、定理 2.27、定理 2.24 和定理 2.25.

设  $G$  为  $\mathbb{R}^2$  中光滑有界、单连通区域,  $w_i \in G, i = 1, 2, \dots, n$ .  
 $\overline{w_i} \cap \overline{w_j} = \emptyset, \overline{w_i} \subset G$ ,

$$\Omega = G \setminus \bigcup_{i=1}^n \overline{w_i}, d, d_i \in \mathbb{N}, d = \sum_{i=1}^n d_i.$$

考虑极小问题

$$E = \inf_{\varepsilon} \int_{\Omega} |\nabla u|^2, \varepsilon = \{v \in (H^1(\Omega); S^1), \deg(v, \partial G) = d, \\ \deg(v, \partial w_i) = d_i\} \quad (2.130)$$

和辅助问题

$$\begin{cases} \Delta \Phi = 0, x \in \Omega, \\ \Phi = \text{const}, x \in \partial w_i, \\ \Phi = 0, x \in \partial G, \\ \int_{\partial w_i} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{v}} = 2\pi d_i, i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (2.131)$$

**定理 2.29** 下确界  $E$  被  $\mathcal{E}$  中元素  $u$  所取到, 如果  $u_1, u_2 \in \mathcal{E}$ , 取得  $E$ , 则  $u_1 = \alpha u_2, |\alpha| = 1$ , 且

$$E = \int_{\Omega} |\nabla \Phi|^2, \quad (2.132)$$

其中  $\Phi$  是泛函  $F(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 + 2\pi \sum_{i=1}^n d_i p|_{\partial w_i}$  在空间  $V = \{\varphi \in H^1(\Omega; \mathbb{R}) : \varphi = 0, x \in \partial G, \varphi|_{\partial w_i} = \text{const}\}$  中的极小元.

**证** step 1 首先证明,  $\forall v \in \mathcal{E}$ , 有

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \geq \int_{\Omega} |\nabla \Phi|^2.$$



step 1 的证明. 因  $v$  取值在  $S^1$ , 即  $v \in \mathbb{C}, |v| = 1$ , 故有  $v \cdot v_{x_i} = 0 (i = 1, 2), v_{x_1} \times v_{x_2} = 0$ . 因此

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(v \times v_{x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(v \times v_{x_1}) = 0. \quad (2.133)$$

定义  $D = (-v \times v_{x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, v \times v_{x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2})$ , 则从(2.131) 和 (2.133) 有

$$\operatorname{div} D = 0, x \in \Omega. \quad (2.134)$$

另一方面, 有

$$\int_{\partial w_i} D \cdot \nu = \int_{\partial w_i} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} - \int_{\partial w_i} v \times v_\tau = 0, \quad (2.135)$$

其中  $\tau$  为  $\partial w_i$  的单位切向量,  $(\nu, \tau)$  为右手系, (2.135) 是从以下得到的

$$\int_{\partial w_i} v \times v_\tau = 2\pi \deg(v, \partial w_i) = 2\pi d_i,$$

$$\int_{\partial w_i} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 2\pi d_i.$$

**引理 2.30** 设  $\Omega$  为  $\mathbb{R}^2$  中的任何光滑开区域 (不必单连通),  $D$  为  $\Omega$  上的一个向量场使得

且  $\operatorname{div} D = 0$ ,

$$\int_{\Gamma_i} D \cdot \nu = 0,$$

对  $\partial\Omega$  的任一连通分支  $\Gamma_i$  上成立, 则存在  $\Omega$  上的函数  $H$ , 使得

$$D = \left( \frac{\partial H}{\partial x_2}, -\frac{\partial H}{\partial x_1} \right).$$

**证** 如  $\Omega$  为单连通区域, 它是已知的 Poincaré 引理对于一般区域  $\Omega$  (设它是连通的), 我们解每个由  $\Gamma_i$  所包围的区域  $w_i$  上的边值问题

$$\Delta w_i = 0, \quad x \in w_i,$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial \nu} = D \cdot \nu, \quad x \in \partial w_i.$$

向量场

$$\tilde{D} = \begin{cases} D, & x \in \Omega, \\ \nabla w_i, & x \in w_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{cases}$$

满足  $\operatorname{div} D = 0, x \in G = \Omega \cup (\bigcup_{i=1}^n w_i)$ , 它是单连通的, 引理得证.

由引理 2.30, 存在向量函数  $H$  使得

$$\begin{cases} v \times \frac{\partial v}{\partial x_1} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \\ v \times \frac{\partial v}{\partial x_2} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}. \end{cases} \quad (2.136)$$

由于  $|v| = 1$ , 有

$$\begin{aligned} |\nabla v|^2 &= |v \times v_{x_1}|^2 + |v \times v_{x_2}|^2 \\ &= |\nabla H|^2 + |\nabla \Phi|^2 + 2\left(\frac{\partial H}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \frac{\partial H}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\right). \end{aligned} \quad (2.137)$$

注意到

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial H}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \frac{\partial H}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) &= \int_{\Omega} \operatorname{div} \left( H \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - H \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) \\ &= \int_{\partial \Omega} H \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = 0, \end{aligned} \quad (2.138)$$

这是因为  $\Phi|_{\partial G} = 0, \Phi|_{\partial w_i} = \text{const}$ , 推出  $\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = 0$ , 于是由 (2.137),

(2.138) 得

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 = \int_{\Omega} |\nabla H|^2 + \int_{\Omega} |\nabla \Phi|^2 \geq \int_{\Omega} |\nabla \Phi|^2. \quad (2.139)$$

step 2 存在某个  $u \in \mathcal{E}$  使得

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 = \int_{\Omega} |\nabla \Phi|^2.$$

step 2 的证明. 基于 (2.139), 我们可找到某个  $u \in \mathcal{E}$ , 使它满足

$$\begin{cases} u \times \frac{\partial u}{\partial x_1} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \\ u \times \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}. \end{cases} \quad (2.140)$$

更一般地,我们在任意光滑连通区域  $\Omega$  上考虑问题

$$\begin{cases} u \times \frac{\partial u}{\partial x_1} = F_1, & x \in \Omega, \\ u \times \frac{\partial u}{\partial x_2} = F_2, & x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.141)$$

这个问题有解  $u: \Omega \rightarrow S^1$  当且仅当

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}$$

和

$$\int_{\Gamma_i} F \cdot \tau \in 2\pi/\mathbb{Z}, F = (F_1, F_2), \quad (2.142)$$

其中  $\Gamma_i$  为  $\partial\Omega$  的连通分支,事实上局部表示  $u = e^{i\psi}$ , 则(2.141)为

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = F_1, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = F_2. \end{cases} \quad (2.143)$$

(2.144) 可解的充要条件为满足(2.142). 如果  $u_1, u_2$  均为(2.144)的局部解, 则有  $u_1 = \alpha u_2$ ,  $\alpha$  为复数,  $|\alpha| = 1$ , 局部可由道路积分延拓到整体解.

$$\int_{\Gamma_i} F \cdot \tau ds = \int_{\Gamma_i} F_1 dx_1 + F_2 dx_2 = 2\pi/\mathbb{Z},$$

相应的积分是不同的,其差属于  $2\pi/\mathbb{Z}$ , 进一步,  $u \in \mathcal{E}$ , 因

$$2\pi \deg(u, \partial G) = \int_{\partial G} (u \times u_{x_2}, -u \times u_{x_1}) \cdot \nu = \int_{\partial G} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 2\pi d,$$

$$2\pi \deg(u, \partial w_i) = \int_{\partial w_i} (u \times u_{x_2}, -u \times u_{x_1}) \cdot \nu = \int_{\partial w_i} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 2\pi d_i.$$

注意到在我们的情况下, (2.142) 是满足的, 因  $\Phi$  是调和的, 且

$$F \cdot \tau = \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}, (2.143) \text{ 是满足的.}$$

现考虑定理 2.29 的各种变形, 考虑

$$\mathcal{E}_1 = \left\{ v \in H^1(\Omega; S^1) \left| \begin{array}{l} v = g, x \in \partial G, \\ \deg(v, \partial w_i) = d_i, i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right. \right\},$$

其中  $g: \partial G \rightarrow S^1$  满足

$$\deg(g, \partial G) = d = \sum_{i=1}^n d_i.$$

研究极小值问题

$$E_1 = \inf_{v \in \mathcal{E}_1} \int_{\Omega} |\nabla v|^2. \quad (2.144)$$

考虑辅助问题

$$\begin{cases} \Delta \Phi_1 = 0, x \in \Omega, \\ \int_{\partial w_i} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{v}} = 2\pi d_i, \\ \Phi_1 = \text{const}, x \in \partial w_i, \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathbf{v}} = g \times g_\tau, x \in \partial G. \end{cases} \quad (2.145)$$

**定理 2.31** 下确界  $E_1$  被某个  $u \in \mathcal{E}_1$  取到, 且

$$E_1 = \int_{\Omega} |\nabla \Phi_1|^2,$$

**证**  $\forall v \in \mathcal{E}_1$ , 有  $\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \geq \int_{\Omega} |\nabla \Phi_1|^2$ , 事实上

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \operatorname{div} \left[ H \cdot \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2}, -\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \right) \right] = \int_{\partial \Omega} H \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau} \\ &= \int_{\partial G} H \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau} - \sum_{i=1}^n \int_{\partial w_i} H \cdot \frac{\partial \Phi_i}{\partial \tau} = \int_{\partial G} H \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau} \\ &= - \int_{\partial G} \Phi_1 \frac{\partial H}{\partial \tau} \\ &= - \int_{\partial G} \Phi_1 \left( \left( -v \times v_{x_2} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \right) \nu_1 + \left( v \times v_{x_1} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} \right) \nu_2 \right) \\ &= - \int_{\partial G} \Phi_1 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{v}} - v \times \gamma_\tau \right) = 0. \end{aligned}$$

于是有

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \geq \int_{\Omega} |\nabla \Phi_1|^2.$$

由于(2.136) 可知

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{v}} - \mathbf{v} \times \mathbf{v}_\tau = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{v}} - \mathbf{g} \times \mathbf{g}_\tau = 0, x \in \partial G, H = 0, \text{于}$$

是可找到  $\mathbf{v} \in \varepsilon_1$  使得满足

$$\mathbf{v} \times \mathbf{v}_{x_1} = - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2},$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{v}_{x_2} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}.$$

由此推出

$$\mathbf{v} \times \mathbf{v}_\tau = \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = \mathbf{g} \times \mathbf{g}_\tau, x \in \partial G,$$

于是  $\mathbf{v} = \alpha \mathbf{g}, x \in \partial G, \alpha$  为复数,  $|\alpha| = 1$ , 则  $\mathbf{u} = \alpha^{-1} \mathbf{v}$  满足所有要求的性质.

考虑

$$\mathcal{C}_2^1 = \left\{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega; S^1) \left| \begin{array}{l} \forall i = 0, 1, 2, \dots, n, \exists \alpha_i \in \mathbb{C}, \\ |\alpha_i| = 1, \text{使得 } \mathbf{v} = \alpha_i \mathbf{g}_i, x \in \partial w_i, i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right. \right\}.$$

类似于定理 2.31 可得定理 2.26, 即有

$$E'_2 = \inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{C}_2^1} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 \quad (2.146)$$

为某个  $\mathbf{u}$  取到, 且

$$E'_2 = \int_{\Omega} |\nabla \Phi_2|^2, \quad (2.147)$$

其中

$$\begin{cases} \Delta \Phi_2 = 0, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{g}_1 \times \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \tau}, & x \in \partial w_i, i = 0, 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (2.148)$$

现考虑  $G \subset \mathbb{R}^2$  为有界的光滑的单连通区域,  $a_1, \dots, a_n \in G$ ,

$$d_1, d_2, \dots, d_n \in \mathbb{Z}, d = \sum_{i=1}^n d_i, g: \partial G \rightarrow S^1, \deg(g, \partial G) = d.$$

$C = \{u: G \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \rightarrow S^1, \text{光滑调和映照},$

(i)  $\deg(u, a_i) = d_i$ , (ii)  $u$  连续到  $\partial G, u|_{\partial G} = g\}$ .

# 辅助问题

$$\begin{cases} \Delta\Phi_0 = \sum_{i=1}^n \pi d_i \delta a_i, x \in G, \\ \frac{\partial\Phi_0}{\partial\nu} = g \times g_\tau, x \in \partial G. \end{cases} \quad (2.149)$$

于此  $\Phi_0$  惟一确定到差一常数,为确定,令

$$\int_{\partial G} \Phi_0 = 0.$$

则存在惟一的调和映照  $u_0 \in \mathcal{C}$ :

$$\begin{cases} u_0 \times \frac{\partial u_0}{\partial x_1} = -\frac{\partial\Phi_0}{\partial x_2}, x \in \Omega, \\ u_0 \times \frac{\partial u_0}{\partial x_2} = \frac{\partial\Phi_0}{\partial x_1}, x \in \Omega, \end{cases} \quad (2.150)$$

这可从  $\Delta\Phi_0 = 0, x \in \Omega, \frac{\partial\Phi_0}{\partial\nu} = g \times g_\tau, x \in \partial G, d_i \in \mathbb{Z}$  得到. 由(2.151)所决定的  $u_0$  称为与  $(a_i), (d_i), g$  相关的典则调和映照. 可以证明

$$u_0(z) = \prod_{i=1}^n \left( \frac{z - a_i}{|z - a_i|} \right)^{d_i} e^{ih_0(z)}, \Delta h_0(z) = 0.$$

引入  $\mathcal{L} = \{\psi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \Omega = G \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \psi \text{ 连续到 } \partial G, \text{ 且 } \Delta\psi = 0, x \in \Omega, \psi|_{\partial G} = 0\}$ .

现在证明定理 2.27, 即对  $u \in \mathcal{C}$ , 存在  $\psi \in \mathcal{L}$ , 使得

$$u = e^{i\psi} u_0.$$

证  $\forall u \in \mathcal{C}$ , 考虑方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial x_1} = u \times u_{x_1} + \frac{\partial\Phi_0}{\partial x_2} \equiv F_1, \\ \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial x_2} = u \times u_{x_2} - \frac{\partial\Phi_0}{\partial x_1} = F_2, \end{cases} \quad x \in \Omega. \quad (2.151)$$

因  $\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}$ , 所以可局部可解  $\hat{\psi}$ , 在  $\Omega$  中任给一闭路  $C, C$  内部为  $w$ .

$$\int_C F \cdot \tau = \int_C u \times u_\tau - \int_C \frac{\partial \Phi_0}{\partial \tau} = 2\pi \deg(u, C) - 2\pi \sum_{a_i \in u} d_i = 0,$$

因此  $\hat{\psi}$  可全局延拓, 成为整体解.

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \tau} = u \times u_\tau - \frac{\partial \Phi_0}{\partial \tau} = g \times g_\tau - g \times g_\tau = 0, \text{ 在 } \partial G \text{ 上,}$$

推出  $\hat{\psi}|_{\partial G} = \text{const.}$

令  $\psi = \hat{\psi} - \hat{\psi}|_{\partial G} \in \mathcal{A}$ , 则

$$\begin{cases} \Delta \psi = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( u \times \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( u \times \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) = u \times \Delta u = 0, x \in \Omega, \\ \psi|_{\partial G} = 0. \end{cases}$$

现证  $u = e^{i\psi} u_0$ .

首先, 局部地有  $u = e^{i\varphi}, u_0 = e^{i\varphi_0}$ , 于是

$$\begin{cases} u_0 \times u_{0x_1} = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_2}, \\ u_0 \times u_{0x_2} = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_1}, \end{cases}$$

变为

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_1} = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_2} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_1}. \end{cases}$$

(2.154) 变为

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_1}. \end{cases}$$

由此可得

$$\nabla(\varphi_0 + \psi - \varphi) = 0, x \in \Omega.$$

因此在  $\Omega$  的每个局域有

$$\varphi_0 + \psi - \varphi = \text{const.}$$

但

$$\varphi_0 + \psi - \varphi|_{\partial G} = 0,$$

推出

$$\varphi_0 + \psi - \varphi \equiv 0, \quad r \in G.$$

推出

$$\psi = \varphi - \varphi_0, \quad \varphi = \psi + \varphi_0.$$

因此

$$u = e^{i\varphi} = e^{i\psi}e^{i\varphi_0} = e^{i\psi}u_0.$$

定理得证.

现证明定理 2.25 和定理 2.24.

定理 2.25 的证明.

由(2.151) 有  $|\nabla u_0| = |\nabla \Phi_0|$ , 因此

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varphi} |\nabla u_0|^2 &= \int_{\Omega_\varphi} |\nabla \Phi_0|^2 = \int_{\partial G} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \nu} \Phi_0 - \sum_{i=1}^n \int_{\partial B(a_i, \rho)} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \nu} \Phi_0 \\ &= \int_{\partial G} \Phi_0 (g \times g_r) - \sum_{i=1}^n \int_{\partial B(a_i, \rho)} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \nu} \Phi_0, \end{aligned} \quad (2.152)$$

$$R_0(X) = \Phi_0(x) - \sum_{j=1}^n d_j \log |x - a_j|$$

为  $G$  上的光滑调和函数. 置

$$\begin{aligned} S_i(x) &= \Phi_0(x) - d_i \log |x - a_i| \\ &= R_0(x) + \sum_{j \neq i} d_j \log |x - a_j| \end{aligned} \quad (2.153)$$

为包含  $a_i$  的某个邻域上的光滑调和函数, 且

$$S_i(x) = \Phi_0(x) - d_i \log \rho, \quad x \in \partial B(a_i, \rho),$$

$$\frac{\partial S_i}{\partial \nu} = \frac{\partial \Phi_0(x)}{\partial \nu} - \frac{d_i}{\rho}, \quad x \in \partial B(a_i, \rho),$$

$$S_i(a_i) = R_0(a_i) + \sum_{j \neq i} d_j \log |a_i - a_j|.$$

因此, 我们有



$$\begin{aligned}
\int_{\partial B(a_i, \rho)} \Phi_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial \mathbf{v}} &= \int_{\partial B(a_i, \rho)} \left( \frac{\partial S_i}{\partial \mathbf{v}} + \frac{d_i}{\rho} \right) (S_i + d_i \log |x - a_i|) \\
&= \int_{\partial B(a_i, \rho)} S_i \frac{\partial S_i}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\partial \pi d_i}{\partial \pi \rho} \int_{\partial B(a_i, \rho)} S_i + d_i \log \rho \int_{\partial B(a_i, \rho)} \frac{\partial S_i}{\partial \mathbf{v}} + 2\pi d_i^2 \log \rho \\
&= 2\pi d_i^2 \log \rho + 2\pi d_i S_i(a_i) + O(\rho^2), \tag{2.154}
\end{aligned}$$

其中我们用到了

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B(a_i, \rho)} \frac{\partial S_i}{\partial \mathbf{v}} &= \int_{B(a_i, \rho)} \Delta S_i = 0, \\
\int_{\partial B(a_i, \rho)} S_i \frac{\partial S_i}{\partial \mathbf{v}} &= \int_{B(a_i, \rho)} S_i \Delta S_i + \int_{B(a_i, \rho)} |\nabla S_i|^2 \\
&= O(\rho^2).
\end{aligned}$$

由(2.153)和(2.154)和  $S_i(a_i) = R_0(a_i) + \sum_{j \neq i} d_j \log |a_i - a_j|$  可得

$$\int_{\Omega_\rho} |\nabla u_0|^2 = 2\pi \left( \sum_{i=1}^n d_i^2 \right) \log \left( \frac{1}{\rho} \right) + 2w + O(\rho^2).$$

现考虑极小问题.

$$\min_{u \in \mathcal{E}_\rho} \int_{\Omega_\rho} |\nabla u|^2, \tag{2.155}$$

其中

$$\hat{\mathcal{E}}_\rho = \left\{ v \in H^1(\Omega_\rho; S^1) \left| \begin{array}{l} v = g, x \in \partial G, \forall i, \exists \alpha_i \in \mathbb{C}, |\alpha_i| = 1 \\ \text{使得 } v(z) = \frac{\alpha_i}{\rho d_i} (z - a_i)^{d_i}, z \in \partial B(a_i, \rho) \end{array} \right. \right\},$$

由定理 2.26 可知存在惟一极小元  $\hat{u}_\rho$ .

现证定理 2.24, 即当  $\rho \rightarrow 0$ , 我们有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_{\Omega_\rho} |\nabla \hat{u}_\rho|^2 \\
= \pi \left( \sum_{i=1}^n d_i \right)^2 \log \left( \frac{1}{\rho} \right) + w(a) + O(\rho), \tag{2.156}
\end{aligned}$$

证 由定理 2.26 可知

$$\int_{\Omega_\rho} |\nabla \hat{u}_\rho|^2 = \int_{\Omega_\rho} |\nabla \hat{\Phi}_\rho|^2, \tag{*}$$

其中  $\hat{\Phi}_\rho$  为如下线性问题的解:

$$\begin{cases} \Delta \hat{\Phi}_\rho = 0, x \in \Omega_\rho, \\ \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \mathbf{v}} = g \times g_\tau, x \in \partial G, \\ \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \mathbf{v}} = \frac{d_i}{\rho}, x \in \partial B(a_i, \rho), \\ \int_{\partial G} \hat{\Phi} = 0. \end{cases} \quad (2.157)$$

置

$$\phi_\rho(x) = \hat{\Phi}_\rho(x) - \sum_{j=1}^n d_j \log |x - a_j|. \quad (2.158)$$

我们需要如下引理

**引理 2.32** 当  $\rho \rightarrow 0$  时,我们有

$$\|\phi_\rho - R_0\|_{L^\infty(\partial G)} \leq C\rho, \quad (2.159)$$

$$\|\phi_\rho\|_{L^\infty(\partial B(a_i, \rho))} \leq C. \quad (2.160)$$

**证** 函数  $\phi_\rho$  满足

$$\begin{cases} \Delta \phi_\rho = 0, x \in \Omega_\rho, \\ \frac{\partial \phi_\rho}{\partial \mathbf{v}} = g \times g_\tau - \sum_{j=1}^n d_j \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \log |x - a_j| \equiv f, x \in \partial G, \\ \frac{\partial \phi_\rho}{\partial \mathbf{v}} = - \sum_{j \neq i}^n d_j \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \log |x - a_j| \equiv g_i, \forall i, x \in \partial B(a_i, \rho). \end{cases} \quad (2.161)$$

设  $\phi_\rho^*$  为  $\phi_\rho$  的调和共轭,即  $\phi_\rho^*$  为如下问题的解:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi_\rho^*}{\partial x_1} = - \frac{\partial \phi_\rho}{\partial x_2} \equiv F_1, \\ \frac{\partial \phi_\rho^*}{\partial x_2} = \frac{\partial \phi_\rho}{\partial x_1} \equiv F_2. \end{cases} \quad (2.162)$$

因  $\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}$ , 因此  $\phi_\rho^*$  可整体定义在  $\Omega_\rho$  上, 且因

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial \phi_{\rho}}{\partial \mathbf{v}} = 0, \Gamma \text{ 为 } \partial \Omega_{\rho} \text{ 的连通分支,} \quad (2.163)$$

$\phi_{\rho}^*$  为单值函数,  $\phi_{\rho}^*$  满足

$$\begin{cases} \Delta \phi_{\rho}^* = 0, x \in \Omega_{\rho}, \\ \frac{\partial \phi_{\rho}^*}{\partial \tau} = f, x \in \partial G, \\ \frac{\partial \phi_{\rho}^*}{\partial \mathbf{v}} = g_i, x \in \partial B(a_i, \rho), i = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

因此我们有

$$\begin{cases} \Delta \phi_{\rho}^* = 0, x \in \Omega_{\rho}, \\ \phi_{\rho}^* = F, x \in \partial G, \\ \phi_{\rho}^* = G_i, x \in \partial B(a_i, \rho), i = 1, 2, \dots, n, \\ \int_{\partial B(a_i, \rho)} \frac{\partial \phi_{\rho}^*}{\partial \mathbf{v}} = 0, i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (2.164)$$

其中  $F$  和  $G_i$  分别表示  $f$  和  $g_i$  的原函数, 即

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = f, \frac{\partial G_i}{\partial \tau} = g_i.$$

因  $\int_{\partial G} f = 0, \int_{\partial B(a_i, \rho)} g_i = 0, F$  和  $G$  均为单值函数, 考虑一个如下的

辅助问题

$$\begin{cases} \Delta \psi^* = 0, & x \in G, \\ \psi^* = F, & x \in \partial G. \end{cases} \quad (2.165)$$

我们需要如下一个引理

**引理 2.33**<sup>[1]</sup> 设  $G$  为  $\mathbb{R}^2$  中的一个光滑有界区域,  $w_i$  为  $G$  中的光滑不同子域使得  $\Omega = G \setminus \bigcup_{i=1}^n \overline{w_i}$  为连通的, 该函数  $v$  满足

$$\begin{cases} \Delta v = 0, x \in \Omega, \\ \int_{\partial w_j} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{v}} = 0, j = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (2.166)$$

则

$$\sup_{\Omega} v - \inf_{\Omega} v \leq \sum_{j=1}^n (\sup_{\partial w_j} v - \inf_{\partial w_j} v) + \sup_{\partial G} v - \inf_{\partial G} v. \quad (2.167)$$

特别地, 对于  $v = 0, x \in \partial G$ , 则有

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \sum_{j=1}^n (\sup_{\partial w_j} v - \inf_{\partial u_j} v). \quad (2.168)$$

应用引理 2.33 于  $v = \psi_\rho^* - \psi^*$ , 有

$$\begin{aligned} \|\psi_\rho^* - \psi^*\|_{L^\infty(\Omega_\rho)} &\leq \sum_{i=1}^n \sup_{\partial B(a_i, \rho)} (G_i - \psi^*) - \inf_{\partial B(a_i, \rho)} (G_i - \psi^*) \\ &= O(\rho), \end{aligned} \quad (2.169)$$

其中  $\|g_i\|_{L^\infty(\partial B(a_i, \rho))} \leq C, G_i = \int_0^l g_i \leq Cl \leq 2\pi C\rho$ . 由(2.165), (2.166), (2.169) 和标准的椭圆型方程估计, 可知对任何紧集  $\overline{K} \subset G \setminus \bigcup_{i=1}^n \{a_i\}$  有

$$\|\nabla(\psi_\rho^* - \psi^*)\|_{L^\infty(K)} \leq C_K \rho. \quad (2.170)$$

设  $\psi$  为  $\psi^*$  的调和共轭, 即

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi^*}{\partial x_2}, & x \in G, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = -\frac{\partial \psi^*}{\partial x_1}, & x \in G. \end{cases} \quad (2.171)$$

因此  $\psi$  满足

$$\begin{cases} \Delta \psi = 0, & x \in G, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial \psi^*}{\partial \mathbf{v}} = f, & x \in \partial G. \end{cases} \quad (2.172)$$

现  $R_0(x) = \Phi_0(x) - \sum_{j=1}^n d_j \log |x - a_j|$  也满足(2.172), 可选

$$\psi(x) = R_0(x). \quad (2.173)$$

从(2.163) 和(2.172) 有

$$\|\nabla(\psi_\rho^* - \psi^*)\| = \|\nabla(\psi_\rho - \psi)\|.$$

由(2.171) 和(2.173) 推出

$$\|\nabla(\psi_\rho - R_0)\|_{L^\infty(K)} \leq C_K \rho. \quad (2.174)$$

最后为规范化,选取

$$\int_{\partial G} (\psi_\rho - R_0) = 0 \left( \int_{\partial G} \hat{\Phi}_\rho = \int_{\partial G} \Phi_0 = 0 \right). \quad (2.175)$$

从(2.174)和(2.175)得

$$\|\psi_\rho - R_0\|_{L^\infty(K)} \leq C_K \rho. \quad (2.176)$$

特别,我们已证(2.160)

现转向(2.161)的证明,令

$$w_i(x) = \sum_{j \neq i} d_j \log |x - a_j|.$$

任给固定  $\alpha \geq 0$  使得  $\overline{B(a_i, \alpha)} \subset G, \overline{B(a_i, \alpha)}$ , 不含有其他点  $a_j$ ,  $j \neq i$ , 由(2.162)有

$$\Delta(\psi_\rho + w_i) = 0, x \in B(a_i, \alpha) \setminus B(a_i, \rho),$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu}(\psi_\rho + w_i) = 0, x \in \partial B(a_i, \rho).$$

由极大值原则和(2.176)推出

$$\|\psi_\rho + w_i\|_{L^\infty(B(a_i, \alpha) \setminus B(a_i, \rho))} \leq \|\psi_\rho + w_i\|_{L^\infty(\partial B(a_i, \rho))} \leq C.$$

特别有

$$\|\psi_\rho + w_i\|_{L^\infty(\partial B(a_i, \rho))} \leq C,$$

这就推出(2.161).

现证明定理 2.24, 由(\*)和(2.161)可写

$$\int_{\Omega_\rho} |\nabla \hat{u}_\rho|^2 = \int_{\Omega_\rho} \left| \nabla \left( \psi_\rho + \sum_{j=1}^n d_j \log |x - a_j| \right) \right|^2,$$

因此有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla \hat{u}_\rho|^2 &= \int_{\Omega} |\nabla \psi_\rho|^2 + 2 \int_{\Omega_\rho} \nabla \psi_\rho \nabla \left( \sum_{j=1}^n d_j \log |x - a_j| \right) \\ &\quad + \int_{\Omega_\rho} \left| \nabla \left( \sum_{j=1}^n d_j \log |x - a_j| \right) \right|^2 \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (2.177)$$

分部积分, 利用(2.162)和引理 2.31 可得

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\Omega_\rho} |\nabla \psi_\rho|^2 = \int_{\partial\Omega_\rho} \psi_\rho \frac{\partial \psi_\rho}{\partial \mathbf{v}} = \int_{\partial G} f \psi_\rho - \sum_{i=1}^n \int_{\partial B(a_i, \rho)} g_i \psi_\rho \\
&= \int_{\partial\Omega} f R_0 + O(\rho) = \int_{\partial G} \frac{\partial R_0}{\partial \mathbf{v}} R_0 + O(\rho) = \int_G |\nabla R_0|^2 + O(\rho) \\
&= \int_{\Omega_\rho} |\nabla R_0|^2 + O(\rho), \tag{2.178}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_\rho} (\nabla \psi_\rho - \nabla R_0) \nabla \left( \sum_{j=1}^n d_j \log |x - a_j| \right) \\
&= - \sum_{i=1}^n \int_{\partial B(a_i, \rho)} \left( g_i - \frac{\partial R_0}{\partial \mathbf{v}} \right) w_i = O(\rho). \tag{2.179}
\end{aligned}$$

联合(2.178), (2.179) 和(2.177) 得

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\rho} |\nabla \hat{u}_\rho|^2 &= \int_{\Omega_\rho} \left| \nabla \left( R_0 + \sum_{j=1}^n d_j \log |x - a_j| \right) \right|^2 + O(\rho) \\
&= \int_{\Omega_\rho} |\nabla \Phi_0|^2 + O(\rho) \\
&= \int_{\Omega_\rho} |\nabla u_0|^2 + O(\rho).
\end{aligned}$$

定理得证.

至此,  $\deg(g, \partial\Omega) \neq 0$  的情形, 定理 2.1, 定理 2.2, 全部证明完毕.

### § 3 Ginzburg-Landau 热流方程

现考虑 Ginzburg-Landau 热流的涡度运动.

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + \frac{1}{\epsilon^2} (1 - |u|^2), (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} u(x, t) = g(x), x \in \partial\Omega, t > 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), x \in \Omega. \end{cases} \tag{3.3}$$

其中  $\Omega$  为二维光滑有界区域,  $\epsilon > 0$  为参数  $u: \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  为光滑的, 且  $|g(x)| = 1, x \in \partial\Omega$ , 自然设相容条件

满足:  $u_0(x) = g(x), x \in \partial\Omega$ .

方程组(3.1)—(3.3)可看作一般 Ginzburg-Landau 方程和超导理论的 Ginzburg-Landau 方程的模型方程, 当  $t \rightarrow \infty$  时, (3.1)—(3.3) 的解  $u$  趋于定态解  $u_\epsilon$ , 它是能量泛函

$$E_\epsilon(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ |\nabla u|^2 + \frac{1}{2\epsilon^2} (|u|^2 - 1)^2 \right] dx \quad (3.4)$$

的临界点, 这些在 §2 中我们已经详细讨论过.

J. J. vew<sup>[5]</sup> 等运用渐近展开的方法得到了涡度的方程

$$m_i \frac{d}{dt} a_i(t) = -\nabla_{a_i} W_g(a), i = 1, 2, \dots, d, \quad (3.5)$$

其中  $m_i \sim |\log \epsilon|$ ,  $a_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, d$  为涡度,  $a_i(0) = a_i$ ,

$$W_g(a) = -\pi \sum_{j \neq i} \log |a_i - b_j| + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \Phi(g \wedge g_\tau) - \pi \sum_{j=1}^d R(a_j), \quad (3.6)$$

$\Phi$  为如下问题的解

$$\begin{cases} \Delta\Phi = 2\pi \sum_{j=1}^d d_{a_j}, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = g \wedge g_\tau, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.7)$$

$$R(x) = \Phi(x) - \sum_{j=1}^d \log |x - a_j|. \quad (3.8)$$

我们先研究在有限时刻, 方程组(3.1)—(3.3)具初值  $u_0$  的解当  $\epsilon \rightarrow 0$  时的形态.

### 假设 3.1

(i)  $u_0$  是光滑的, 且  $|u_0(x)| \leq 1, x \in \Omega$ .

(ii)  $E_\epsilon(u_0) \leq \pi d \log \frac{1}{\epsilon} + K_1, K_1$  为正常数.

(iii)  $\int_{\Omega} \rho^2(x) e_\epsilon(u_0) dx \leq K_2, K_2$  为正常数,  $\rho(x) = \text{dist}(x,$

$\{b_1, \dots, b_d\}$ ), 且  $b_1, \dots, b_d$  为  $\Omega$  中的不同点,  $E_\epsilon(u) = \int_{\Omega} e_\epsilon(u) dx$ .

在假设 3.1 和关于  $g$  和  $\Omega$  的假设下, 初边值问题

(1.1) — (1.3) 有惟一的光滑解  $u_\epsilon(x, t)$ , 进一步

$$\frac{d}{dt} E_\epsilon(u_\epsilon(\cdot, t)) = - \int_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial t} u_\epsilon(x, t) \right|^2 dx,$$

因此

$$\begin{aligned} & \sup_{t>0} \int_0^t \int_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial t} u_\epsilon(x, t) \right|^2 dx d\tau + E_\epsilon(u_\epsilon(\cdot, t)) \\ & \leq E_\epsilon(u_0) \leq \pi d \log \frac{1}{\epsilon} + K. \end{aligned} \quad (3.9)$$

由伸缩变换和通常的抛物型估计, 易得

$$|\nabla u_\epsilon(x, t)|^2 + \left| \frac{\partial}{\partial t} u_\epsilon(x, t) \right| \leq \frac{C^*}{\epsilon^2}, \quad (3.10)$$

其中常数  $C^*$  仅依赖于  $g$  和  $\Omega$ ,  $t \geq \epsilon^2$ . 如果设  $u_0^\epsilon(x) = u_0(\epsilon x)$  满足

$$\|\nabla u_0^\epsilon(x)\|_{L^\infty} + \sup_{x, y} \frac{|\nabla u_0^\epsilon(x) - \nabla u_0^\epsilon(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq K_3, \quad (3.11)$$

则(3.10) 对  $0 < t < \epsilon^2$  也真, 此时, 常数  $C^*$  还依赖于  $K_3$  和  $\alpha$ .

由(3.9), (3.10) 推出,  $u_\epsilon(x, t) \in S_g(\lambda K)$ :  $\{u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2: (i) u \in H^1(\Omega), u = g, x \in \partial\Omega; |u(x)| \leq 1, x \in \Omega$ .

(ii) 如  $|u(x_0)| \leq \frac{1}{2}, x_0 \in \Omega$ , 则  $|u(x)| \leq \frac{3}{4}, x \in \Omega, |x - x_0| \leq \lambda\epsilon$ .

(iii)  $E_\epsilon(u) \leq \pi d \log \frac{1}{\epsilon} + K$ . 易知

$$E_\epsilon(u_\epsilon(\cdot, t)) \geq \pi d \log \frac{1}{\epsilon} - C_1.$$

因此

$$\int_0^\infty \int_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial t} u_\epsilon(x, t) \right|^2 dx dt \leq C_1 + K_1. \quad (3.12)$$

其次, 我们计算可得

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho^2(x) e_\epsilon(u_\epsilon(x, t)) dx \\ & \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho^2(x) |\nabla_\epsilon u|^2 dx + 2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial t} u_\epsilon \right|^2 dx, \end{aligned} \quad (3.13)$$

其中我们用到了  $|\nabla \rho(x)| \leq 1, x \in \Omega$ , 因此



$$\int_{\Omega} \rho^2(x) e_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}(x, t)) dx \leq 2e' \int_0^t \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial t} \right|^2 dx dt + K_2, \quad (3.14)$$

对任何  $T \in (0, \infty)$  和任何  $\delta \in (0, \delta_0)$ , 其中

$$2\delta_0 = \min \{ |b_i - b_j|, \text{dist}(b_i, \partial\Omega) : i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, d \}.$$

令  $\Omega_{\delta} = \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^d B_{\delta}(b_j)$ ,  $\mathcal{Q}_{\delta, T} = \Omega_{\delta} \times [0, T]$ , 从(3.12)和(3.14)

有  $u_{\varepsilon} \in H^1(\mathcal{Q}_{\delta}, T)$ , 且

$$\int_{\Omega_{\delta}} e_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}(x, t)) dx \leq C(\delta, K_1, K_2) e^T, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.15)$$

为了研究初边值问题的解  $u_{\varepsilon}$  和当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时的渐近形态, 我们需对初值  $u_0$  作附加假设.

**假设 3.2** 初值  $u_0^{\varepsilon}(x)$  当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时收敛于

$$\prod_{j=1}^d \frac{x - b_j}{|x - b_j|} e^{ih_0(x)},$$

其中  $h_0(x) \in H^1(\Omega)$ .

现对任何序列  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , 存在一个子序列, 仍记为  $\varepsilon_n$ , 使得  $u_{\varepsilon_n}(x, t) \rightarrow u_0(x, t)$  在  $H_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega} \setminus \{b_1, \dots, b_d\} \times \mathbb{R}^+)$  中弱收敛, 且在  $L_{\text{loc}}^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+)$  中强收敛. 这是由于  $|u_{\varepsilon}(x, t)| \leq 1$ , 可证  $|u_{\varepsilon}(x, t)| = 1$ , a.e 在  $\Omega \times \mathbb{R}^+$  上.

因  $u_{\varepsilon} \wedge \frac{\partial}{\partial t} u_{\varepsilon} = \text{div}(u_{\varepsilon} \wedge \nabla u_{\varepsilon})$ ,  $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$ , 推出

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial t} = \nabla u_0 \wedge |\nabla u_0|^2 u_0, (x, t) \in \Omega \setminus \{b_1, \dots, b_d\} \times \mathbb{R}^+, \\ u_0(x, 0) = \prod_{j=1}^d \frac{x - b_j}{|x - b_j|} e^{ih_0(x)}, \\ u_0 = g, x \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (3.16)$$

因  $u_0(x, t)$  的像位于单位圆上, 函数  $u_0(x, t)$  在  $\overline{\Omega} \setminus (b_1, \dots, b_d) \times \mathbb{R}^+$  上光滑. 进一步, 由(3.12)和(3.15)推出, 对任何  $t > 0, 0 < \delta \leq \delta_0$ , 度  $\deg(u_0(\cdot, t), \partial B_{\rho}(b_j))$ ,  $j = 1, \dots, d$ , 都是确定的, 由假设 3.2, 它都等于 1. 因此, 我们能写

$$u_0(x, t) = \prod_{j=1}^d \frac{x - b_j}{|x - b_j|} e^{ih_0(x, t)}. \quad (3.17)$$

显然有

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} h_0(x, t) = \Delta h_0(x, t), (x, t) \in \Omega \setminus \{b_1, \dots, b_d\} \times \mathbb{R}^+, \\ h_0(x, t) = h_0(x), x \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \\ h_0(x, 0) = h_0(x), \end{cases} \quad (3.18)$$

这里我们不知道  $h_0(x, t)$  是否在  $\Omega \times \mathbb{R}^+$  上满足热方程, 也不知道如此  $h_0(x, t)$  能否被  $\{u_\epsilon(x, t)\}$  的一切序列的极限所决定.

**定理 3.1** 满足(3.18)的函数  $h_0(x, t)$  满足

$$\sup_{t>0} \left[ \|\nabla h_0(x, t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \int_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial t} h_0(x, t) \right|^2 dx dt \right] \leq C,$$

这里常数  $C$  仅依赖于  $g, \Omega$  和  $K = \max(K_1, K_2, K_3)$ . 特别  $h_0(x, t)$  在  $\Omega \times \mathbb{R}^+$  上满足热方程, 推之有

$$u_\epsilon(x, t) \rightarrow \prod_{j=1}^d \frac{x - b_j}{|x - b_j|} e^{ih_0(x, t)}, \quad \epsilon \rightarrow 0,$$

在  $L^2_{\text{loc}}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^+)$  强收敛, 和在  $H^1_{\text{loc}}(\bar{\Omega} \setminus \{b_1, \dots, b_d\} \times \mathbb{R}^+)$  上弱收敛.

**证** 考虑函数  $u \in S_g(\lambda, k)$ ,  $B_1, B_N$  为给定的球, 令  $x_1^\epsilon, \dots, x_d^\epsilon$  分别为球  $B_1, \dots, B_d$  的中心, 则有

$$u(x) = \prod_{j=1}^d \frac{x - x_j^\epsilon}{|x - x_j^\epsilon|} e^{ih_\epsilon(x)} \cdot \rho_\epsilon(x), \quad \forall x \in \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{N_\epsilon} B_j = \Omega_\epsilon, \quad (3.19)$$

其中  $h_\epsilon(x)$  为在  $\Omega_\epsilon$  上确定的单值函数, 且

$$\frac{1}{2} \leq \rho_\epsilon(x) \leq 1, x \in \Omega_\epsilon.$$

如  $h_\epsilon(x_0) \in [0, 2\pi]$ ,  $x_0 \in \partial\Omega$ , 则  $h_\epsilon$  可惟一确定, (3.12) 是成立的, 因

$$\deg(u, \partial B_j) = 0, j = d+1, \dots, N_\epsilon.$$

一方面, 我们有

$$\int_{\Omega_\epsilon} e_\epsilon(u) dx \leq \pi \sum_{j=1}^d \alpha_j \log \frac{1}{\epsilon} + C(\lambda, K),$$

另一方面,有

$$\int_{\Omega_\epsilon} e_\epsilon(u) dx \geq \int_{\Omega_\epsilon} \rho_\epsilon^2 |\nabla \theta|^2 + \rho_\epsilon^2 |\nabla h_\epsilon|^2 + 2\rho_\epsilon^2 \nabla \theta_\epsilon \cdot \nabla h_\epsilon,$$

其中  $\theta_\epsilon$  为  $\Omega_\epsilon$  中的多值调和函数

$$e^{i\theta_\epsilon} = \prod_{j=1}^d \frac{x - x_j^\epsilon}{|x - x_j^\epsilon|^\epsilon}.$$

因  $|\nabla \theta_\epsilon(x)| \leq \epsilon^{-\alpha}, x \in \Omega_\epsilon$ , 我们有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\epsilon} |\rho_\epsilon^2 - 1| |\nabla \theta_\epsilon|^2 &\leq \epsilon^{-2\alpha} \left( \int_{\Omega_\epsilon} (\rho_\epsilon^2 - 1)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} |\Omega|^{-\frac{1}{2}} \\ &\leq C(K, \Omega) \epsilon^{-2\alpha+1} \left( \log \frac{1}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{2}}, \alpha < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

因

$$\int_{\Omega_\epsilon} |\nabla \theta_\epsilon|^2 \geq \pi \sum_{j=1}^d \alpha_j \log \frac{1}{\epsilon} - C(\lambda, K),$$

我们有

$$\int_{\Omega_\epsilon} (\rho_\epsilon^2 |\nabla h_\epsilon|^2 + 2\rho_\epsilon^2 \nabla \theta_\epsilon \cdot \nabla h_\epsilon) \leq C(\lambda, K).$$

类似有

$$\int_{\Omega_\epsilon} |\rho_\epsilon^2 - 1| |\nabla \theta_\epsilon| |\nabla h_\epsilon| \leq O(1) \|\nabla h_\epsilon\|_{L^2(\Omega_\epsilon)}.$$

为证  $\int_{\Omega_\epsilon} |\nabla h_\epsilon|^2 \leq C(\lambda, K)$ , 充分估计

$$\int_{\Omega_\epsilon} \nabla \theta_\epsilon \cdot \nabla h_\epsilon dx$$

是有界的, 我们计算

$$\int_{\Omega_\epsilon} \nabla \theta_\epsilon \cdot \nabla h_\epsilon = \int_{\partial\Omega} h_\epsilon \frac{\partial \theta_\epsilon}{\partial \nu} + \sum_{j=1}^d \int_{\partial B_j^\epsilon} (h_\epsilon - \bar{h}_\epsilon) \frac{\partial \theta_\epsilon}{\partial \nu} \leq C(\lambda, K),$$

其中  $\bar{h}_\epsilon = \int_{\partial B_j} h_\epsilon$ . 这里我们用到了

$$\int_{\partial B_j} \frac{\partial \theta_\epsilon}{\partial \nu} = 0, \quad |h_\epsilon - \bar{h}_\epsilon| \leq C(\lambda, K), \text{ 对每个 } \partial B_j, j = 1, \dots, N_\epsilon.$$

我们应用上述原理对于每一个函数  $u_\epsilon(x, t) \in S_g(\lambda, K)$ ,  $t > 0$ , 从(3.15)知  $X_j^\epsilon \rightarrow b_j(\epsilon \rightarrow 0)$ ,  $j = 1, \dots, d$ , 因对几乎处处的  $t$ ,  $u_{\epsilon_n}(x, t) \rightarrow \prod_{j=1}^d \frac{x - b_j}{|x - b_j|} e^{ih_0(x, t)}$ , 可知  $h_0(x, t)$  为  $h_{\epsilon_n}(x, t)$  在  $H^1(\Omega)$  中的弱极限. 为确定计, 设  $h_0(x_0) \in (0, 2\pi)$ ,  $x_0 \in \partial\Omega$ , 因此  $\int_\Omega |\nabla h_0(x, t)|^2 dx \leq C(\lambda, K)$ ,  $\forall t > 0$ , 由此易知  $h_0(x, t)$  在  $\Omega \times \mathbb{R}^+$  上满足热方程, 由此得到定理的结论.

现考虑如下问题.

$$\begin{cases} \frac{1}{\log \frac{1}{\epsilon}} \frac{\partial}{\partial t} U_\epsilon = \Delta U_\epsilon + \frac{1}{\epsilon^2} U_\epsilon (1 - |U_\epsilon|^2), (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ U_\epsilon(x, t) = g(x), (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \\ U_\epsilon(x, 0) = U_\epsilon^0(x), x \in \Omega, \end{cases} \quad (3.20)$$

其中  $\Omega$  为  $\mathbb{R}^2$  中的有界光滑区域,  $\epsilon > 0$  为正参数,  $U_\epsilon^0, g$  和  $U_\epsilon$  为  $\mathbb{R}^2$  中光滑函数,  $|g(x)| = 1, x \in \partial\Omega$ .

设  $U_\epsilon^0(x)$  满足假设

$$E_\epsilon(U_\epsilon^0) \leq \pi d \log \frac{1}{\epsilon} + K, \quad \|\nabla U_\epsilon^0\|_{L^\infty} \leq \frac{K}{\epsilon}, \quad (H)$$

且  $U_\epsilon^0(x) \rightarrow \prod_{j=1}^d \frac{x - b_j}{|x - b_j|} e^{ih(x)}$  在  $H_{\text{loc}}^1(\bar{\Omega} \setminus \{b_1, \dots, b_d\})$  中弱收敛,  $d$  个不同的点  $b_1, \dots, b_d$  在  $\Omega$  中,  $h \in H^1(\Omega)$ ,  $d = \deg(g, \partial\Omega)$ ,  $g: \partial\Omega \rightarrow S^1$ .

**定理3.2** 设  $U_\epsilon(x, t)(\epsilon \rightarrow 0)$  为问题(3.20)满足条件(H)的解, 则  $U_\epsilon(x, t) \rightarrow U_*(x, t)$ ,  $U_*(x, t) = \prod_{j=1}^d \frac{x - a_j(t)}{|x - a_j(t)|} e^{ih_{a_j}(x)}$  在  $H_{\text{loc}}^1(\bar{\Omega} \setminus \{a_1(t), \dots, a_d(t)\})$  中弱收敛,  $t > 0, \epsilon \rightarrow 0$ . 其中

$a_j(t), j = 1, 2, \dots, d$ , 为  $\Omega$  中不同的点,  $\Delta h_a = 0, x \in \Omega, U_* = g, x \in \partial\Omega$ , 更进一步,  $a(t) = \{a_1(t), \dots, a_d(t)\}$  满足微分方程

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}a(t) &= -\operatorname{grad} W_g(a), t > 0, \\ a(0) &= b = (b_1, \dots, b_d), \end{aligned} \quad (3.21)$$

其中  $W_g(a)$  已为 (3.6) 中所定义.

证 我们首先注意到, 只需充分证明定理在  $0 \leq t \leq \delta$  上, 其中  $\delta = \delta(K, g, \Omega) > 0$ .

对每个  $t > 0$ , 令  $S_*(t)$  表示一切  $V$  的集合, 即存在一个序列  $\epsilon_n \rightarrow 0$  使得  $U_{\epsilon_n}(x, t) \rightarrow V$  依  $L^2(\Omega)$  模. 由下列的引理.

**引理 3.3**<sup>[1]</sup> (一般收敛定理) 令  $U_\epsilon \in S_g(a, K)$ , 则对任何序列  $\epsilon_n \rightarrow 0$ , 存在  $\{U_{\epsilon_n}\}$  的一个子序列收敛于一个映照具有形式

$$\prod_{j=1}^d \frac{x - b_j}{|x - b_j|} e^{h(x)}$$

在  $L^2(\Omega)$  中强收敛和在  $H_{\text{loc}}^1(\bar{\Omega} \setminus \{b_1, \dots, b_d\})$  中弱收敛, 这里  $\{b_1, \dots, b_d\}$  为  $\Omega$  中  $d$  个不同的点,  $h(x) \in H^1(\Omega)$ .

我们看到, 如果  $V \in S_*(t)$ , 则

$$V(x) = \prod_{j=1}^d \frac{x - b_j(t)}{|x - b_j(t)|} e^{h(x)}, \quad h \in H^1(\Omega),$$

$\{b_1(t), \dots, b_d(t)\}$  为  $\Omega$  中  $d$  个不同的点. 进一步,  $U_{\epsilon_n}(\cdot, t)$  在  $H_{\text{loc}}^1(\bar{\Omega} \setminus \{b_1(t), \dots, b_d(t)\})$  中弱收敛于  $V$ , 且  $\|h\|_{H^1(\Omega)} \leq C(g, K, \Omega)$ .

令  $A_*(t) = \{b(t) = (b_1(t), \dots, b_d(t))\}$ , 存在  $V \in S_*(t)$ , 且

$$V(x) = \prod_{j=1}^d \frac{x - b_j(t)}{|x - b_j(t)|} e^{h(x)}.$$

[1] 中定理 5.1 推出 Hausdorff 距离  $(A_*(t), A_*(t + \Delta t)) \leq \eta(\Delta t), \forall t > 0, \Delta t > 0, \eta(\Delta t) \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0^+$ .

进一步由引理 3.3 可知,

$$d_0(t) = \inf\{|b_i(t) - b_j(t)|, \operatorname{dist}(b_j(t), \partial\Omega), j, i = 1, \dots, d, i \neq j\}$$

$$\geq \delta = \delta(K, g, \Omega) > 0, \forall t > 0$$

令  $R_0 = \frac{\delta_0}{4}$ , 选取  $\delta = \delta(K, g, \Omega)$ , 使得  $\eta(\delta) \leq \frac{R_0}{4}$ , 则对  $\theta \leq t \leq \delta$  有  $A_*(t) \subset B_{R_0/4}(b)$ ,  $b = (b_1, \dots, b_d)$ .

对任何  $j = 1, 2, \dots, d, R \in [\frac{R_0}{2}, R_0]$ , 我们有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\epsilon^2} \int_{\partial B_R(b_j)} (|U_\epsilon|^2 - 1)^2 \cdot \nu + \frac{1}{2} \int_{\partial B_R(b_j)} |\nabla U_\epsilon|^2 \cdot \nu - \int_{\partial B_R(b_j)} \frac{\partial U_\epsilon}{\partial \nu} \cdot \nabla U_\epsilon \\ &= \frac{1}{\log \frac{1}{\epsilon}} \int_{B_R(b_j)} \frac{\partial U_\epsilon}{\partial t} \cdot \nabla U_\epsilon dx. \end{aligned}$$

另一方面,  $e_\epsilon = \frac{1}{2} [|\nabla U_\epsilon|^2 + \frac{1}{2\epsilon^2} (|U_\epsilon|^2 - 1)^2]$ , 由计算得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\log \frac{1}{\epsilon}} \frac{d}{dt} \int_{B_R(b_j)} x \cdot e_\epsilon(u) dx = - \frac{1}{\left(\log \frac{1}{\epsilon}\right)^2} \int_{B_R(b_j)} x \left| \frac{\partial U_\epsilon}{\partial t} \right|^2 \\ & - \frac{1}{\log \frac{1}{\epsilon}} \int_{B_R(b_j)} \frac{\partial U_\epsilon}{\partial t} \cdot \nabla U_\epsilon dx + \frac{1}{\log \frac{1}{\epsilon}} \int_{\partial B_R(b_j)} x \frac{\partial U_\epsilon}{\partial \nu} \cdot \frac{\partial U_\epsilon}{\partial t}, \end{aligned}$$

对  $R \in [\frac{R_0}{2}, R_0]$ , 再对  $t$  积分, 有  $f_\epsilon(t) = g_\epsilon(t) + h_\epsilon(t)$ , 其中

$$f_\epsilon(t) = \int_{R_0/2}^{R_0} \int_{B_R(b_j)} x \cdot \left[ \frac{e_\epsilon(U)(t)}{\log \frac{1}{\epsilon}} - \frac{e_\epsilon(U)(0)}{\log \frac{1}{\epsilon}} \right] dx dR,$$

$$g_\epsilon(t) = - \int_0^t \int_{R_0/2}^{R_0} \left( \int_{\partial B_R(b_j)} G_\epsilon(U) \right) dR dt,$$

$$G_\epsilon(u) = \frac{(|U_\epsilon|^2 - 1)^2}{4\epsilon^2} \nu + \frac{1}{2} |\nabla U_\epsilon|^2 \nu - \frac{\partial U_\epsilon}{\partial \nu} \cdot \nabla U_\epsilon,$$

$$\begin{aligned} h_\epsilon(t) &= - \int_{R_0/2}^{R_0} \int_0^t \frac{1}{\left(\log \frac{1}{\epsilon}\right)^2} \int_{B_R(b_j)} x \left| \frac{\partial U_\epsilon}{\partial t} \right|^2 dx dt dR \\ &+ \frac{2}{R_0 \log \frac{1}{\epsilon}} \int_0^t \int_{B_{R_0} \setminus B_{R_0/2}(b_j)} x \frac{\partial U_\epsilon}{\partial \nu} \cdot \frac{\partial U_\epsilon}{\partial t} dx dt. \end{aligned}$$

由引理 3.3 和  $A_*(t) \subset B_{R_0,4}(b)$  有

$$\int_{B_{R_0} \setminus B_{R_0/2}(b_j)} |G_\epsilon(u)| dx \leq \int_{B_{R_0} \setminus B_{R_0/2}(b_j)} \left[ \frac{1}{4\epsilon^2} (|U_\epsilon|^2 - 1)^2 + \frac{3}{2} |\nabla U_\epsilon|^2 \right] dx$$

$$\leq C(K, g, \Omega).$$

因此,  $g_\epsilon(t)$  在  $[0, \delta]$  Lip 连续, 且对  $\epsilon$  是一致的.

同样, 由  $\int_0^\infty \int_\Omega \frac{1}{\log \frac{1}{\epsilon}} \left| \frac{\partial U_\epsilon}{\partial t} \right|^2 dx dt \leq C(K, g, \Omega)$ , 我们有  $h_\epsilon(x)$

$$= O\left(\frac{1}{\sqrt{\log \frac{1}{\epsilon}}}\right), \forall 0 \leq t \leq \delta, \text{ 选取 } \epsilon_n \rightarrow 0, \text{ 使得 } g_{\epsilon_n}(t) \rightarrow g_0(t) \text{ 一致收敛.}$$

因此  $g_0(t)$  在  $[0, \delta]$  上 Lip 连续, 于是  $f_{\epsilon_n}(t) \rightarrow f_0(t)$  对  $t$  一致收敛.

$S(t)$ : 称  $V(x) = \prod_{j=1}^d \frac{x - a_j}{|x - a_j|} e^{ih_d(x)} \in S(t)$ , 如存在  $\{U_n(x)\}$  的子序列,  $u_n(x) = u_{\epsilon_n}(x, t)$ , 依  $L^2(\Omega)$  强收敛于  $V(x)$ , 和依  $H_{\text{loc}}^1 C(\Omega \setminus \{a_1, \dots, a_d\})$  弱收敛于  $V(x)$ .

$A(t) = \{a(t) = (a_1(t), \dots, a_d(t)) : \text{存在 } V(x) \in S(t), V(x) = \prod_{j=1}^d \frac{x - a_j(t)}{|x - a_j(t)|} e^{ih(x)}\}$  对任何  $V(x) = \prod_{j=1}^d \frac{x - b_j(t)}{|x - b_j(t)|} e^{ih(x)} \in S(t)$ , 存在  $\{U_{\epsilon_n}(x, t)\}$  的子序列  $\{U_{\epsilon_n}\}$  依  $H^1(\bar{\Omega} \setminus \{b_1, \dots, b_d\})$  弱收敛于  $V(x)$ , 对此子序列, 易知

$$\frac{1}{\log \frac{1}{\epsilon_n}} e_{\epsilon_n}(U_{\epsilon_n})(t) \rightarrow \pi \sum_{j=1}^d \delta_{b_j}(t).$$

因此,  $f_{\epsilon_n}(t) \rightarrow \pi(b_j(t) - b_j) = g_0(t)$ , 这就推出  $A(t)$  仅含有单点, 表以  $a(t) = (a_1(t), \dots, a_d(t))$ .

最后, 由 [1, 定理 5.11] 有  $\int_{B_{R_0} \setminus B_{R_0/2}(b_j)} G_{\epsilon_n}(U) dx$  收敛于

$\frac{\pi R_0}{2} \nabla_{a_j} W_g(a(t))$ , 对几乎一切  $t > 0$  成立.

令  $b_j = a_j(0)$ , 则

$$\pi(a_j(t) - a_j(0)) = -\pi \int_0^t \nabla_{a_j} W_g(a(\tau)) d\tau,$$

$$\frac{da_j(t)}{dt} = -\nabla_{a_j} W_g(a(t)),$$

$$a_j(0) = b_j, j = 1, 2, \dots, d.$$

因  $a(t)$  惟一地由 (3.21) 决定, 初值  $a(0) = b$ , 易见

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f_\epsilon(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} g_\epsilon(t) = a(t),$$

定理得证.

考虑 Ginzburg-Landau 热流问题.

$$\frac{1}{\lambda_\epsilon} \frac{\partial U_\epsilon}{\partial t} = \Delta U_\epsilon + \frac{1}{\epsilon^2} U_\epsilon (1 - |U_\epsilon|^2), (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \quad (3.22)$$

$$U_\epsilon(x, t) = g(x), x \in \partial\Omega, t \geq 0, \quad (3.23)$$

$$U_\epsilon(x, 0) = U_\epsilon^0(x), x \in \Omega. \quad (3.24)$$

这里  $\Omega$  为二维光滑有界区域,  $\epsilon$  和  $\lambda_\epsilon$  为正参数,  $U_\epsilon: \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  为光滑的, 且  $|g(x)| = 1, x \in \partial\Omega$ , 且设满足相容条件  $U_\epsilon^0(x) = g(x), x \in \partial\Omega$ .

对于初值作如下假设:

$$(i) |U_\epsilon^0(x)| \leq 1, |\nabla U_\epsilon^0(x)| \leq K/\epsilon, x \in \Omega,$$

$$(ii) E_\epsilon(U_\epsilon^0) = \frac{1}{2} \int_\Omega [|\nabla U_\epsilon^0|^2 + \frac{1}{2\epsilon^2} (|U_\epsilon^0|^2 - 1)^2] dx \\ \leq \pi d \log \frac{1}{\epsilon} + K,$$

$$(iii) \int_\Omega \rho^2(x) e_\epsilon(V_\epsilon^0) dx \leq K,$$

其中  $\rho(x) = \text{dist}(x, \{b_1, b_2, \dots, b_d\})$ ,  $b_1, \dots, b_d$  为  $\Omega$  中的不同点, 且

$U_\epsilon^0(x) \rightarrow \prod_{j=1}^d \frac{x - b_j}{|x - b_j|} e^{i h_j(x)}$  在  $H_{\text{loc}}^1(\bar{\Omega} \setminus \{b_1, \dots, b_d\})$  中弱收敛, 这里  $K$  为正常数, 与  $\epsilon$  无关,  $d > 0$  为映照  $g$  的拓扑度,



$$g: \partial\Omega \rightarrow S^1.$$

在[3]中证明了如下结果.

**定理 3.4** 如  $\lambda_\epsilon = 1$ , 则当  $\epsilon \rightarrow 0$  时, 初边值问题 (3.22)–(3.24) 的解  $U_\epsilon(x, t)$  在  $H_{\text{loc}}^1(\bar{\Omega} \setminus \{b_1, \dots, b_d\})$  中弱收敛于  $U_0(x, t) = \prod_{j=1}^d \frac{x - b_j}{|x - b_j|} e^{ih(x, t)}$ , 这里函数  $h(x, t)$  满足

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} = \Delta h, (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (3.25)$$

$$\begin{cases} h(x, 0) = h(x), x \in \Omega, \end{cases} \quad (3.26)$$

$$\begin{cases} \prod_{j=1}^d \frac{x - b_j}{|x - b_j|} e^{ih(x, t)} \equiv g(x), x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.27)$$

当  $\lambda_\epsilon \rightarrow \infty$  和  $\lambda_\epsilon / \log 1/\epsilon \rightarrow \infty$  时 ( $\epsilon \rightarrow 0$ ), 则初边值问题的解  $U_\epsilon(x, t)$  依  $H_{\text{loc}}^1(\bar{\Omega} \setminus \{b_1, \dots, b_d\})$  弱收敛于  $\prod_{j=1}^d \frac{x - b_j}{|x - b_j|} e^{ih_b(x)}$ , 其中  $\Delta h_a = 0, x \in \Omega, a = \{a_1, \dots, a_d\}$  为重整化能量  $W_g(a)$  的临界点,  $W_g(a)$  定义为

$$\begin{aligned} W_g(x_1, x_2, \dots, x_d) = & - \sum_{i \neq j} \log |x_i - x_j| - \sum_{j=1}^d R(x_j) \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \left( R + \sum_{j=1}^d \log |x - x_j| \right) g \wedge g_\tau, \end{aligned} \quad (3.28)$$

其中

$$\begin{cases} \Delta R = 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial R}{\partial \nu} = g \wedge g_\tau - \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \sum_{j=1}^d \log |x - x_j| \right), x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.29)$$

最后, 如  $\lambda_\epsilon = \log \frac{1}{\epsilon}$ , 则当  $\epsilon \rightarrow 0$  时

$U_\epsilon(x, t) \rightarrow \prod_{j=1}^d \frac{x - a_j(t)}{|x - a_j(t)|} e^{ih_{a(t)}(x)}$  在  $H_{\text{loc}}^1(\Omega \setminus \{a_1(t), \dots, a_d(t)\})$  中弱收敛,  $\forall t > 0$ ,  
 $\Delta h_{a(t)}(x) \equiv 0, x \in \Omega,$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}a(t) = -\operatorname{grad}W_g(a(t)), 0 < t < \infty, \\ a(0) = b = (b_1, \dots, b_d). \end{cases} \quad (3.30)$$

在[4]中对于钉扎问题,考虑如下问题

$$\begin{cases} \frac{\partial U_\epsilon}{\partial t} = \frac{1}{a(x)} \operatorname{div}(a(x) \nabla U_\epsilon) + \frac{U_\epsilon(1 - |U_\epsilon|^2)}{\epsilon^2}, (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ U_\epsilon(x, 0) = U_\epsilon^0(x), \quad x \in \Omega, \\ U_\epsilon(x, t) = g(x), \quad x \in \partial\Omega, t \geq 0, \end{cases} \quad (3.31)$$

$$U_\epsilon(x, 0) = U_\epsilon^0(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.32)$$

$$U_\epsilon(x, t) = g(x), \quad x \in \partial\Omega, t \geq 0, \quad (3.33)$$

其中  $a(x)$  为正的  $C^2$  函数在  $\bar{\Omega}$  上.

初值  $U_\epsilon^0(x)$  满足如下假设:

$$(A_1) U_\epsilon^0(x) \rightarrow \prod_{j=1}^k \left( \frac{x - b_j}{|x - b_j|} \right)^{d_k e^{h_0(x)}} \text{ 依 } H_{\text{loc}}^1(\bar{\Omega} \setminus \{b_1, \dots, b_k\}) \text{ 弱}$$

收敛,  $(b_1, \dots, b_k)$  为  $\Omega$  中的  $k$  个不同的点,  $\sum_{j=1}^k d_j = d \equiv \deg(g)$ ,  $d_j \neq 0$ ;

$$(A_2) \int_{\Omega} \rho^2(x) [|\nabla U_\epsilon^0(x)|^2 + \frac{1}{2\epsilon^2} (|U_\epsilon^0(x)|^2 - 1)^2] dx \leq$$

$K$ ,  $K$  为正常数, 与  $\epsilon$  无关,  $\rho(x) = \min\{|x - b_j|, j = 1, \dots, k\}$ ;

$$(A_3) E_\epsilon(U_\epsilon^0) \equiv \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\nabla U_\epsilon^0(x)|^2 + \frac{1}{2\epsilon^2} (|U_\epsilon^0(x)|^2 - 1)^2] dx \leq K[|\log \epsilon| + 1].$$

为方便计, 设相容条件满足:  $U_\epsilon^0(x) = g(x)$ ,  $x \in \partial\Omega$ .

**定理 3.5** 在假设  $(A_1)$ ,  $(A_2)$ ,  $(A_3)$  下, 则对任何  $0 < t < T$  我们有

$$U_\epsilon(x, t) \rightarrow \prod_{j=1}^k \left( \frac{x - a_j(t)}{|x - a_j(t)|} \right)^{d_k e^{h(x, t)}} \text{ 依 } H_{\text{loc}}^1(\bar{\Omega} \setminus \{a_1(t), \dots, a_k(t)\}) \text{ 收敛}, \quad (3.34)$$

这里收敛理解为对  $\epsilon$  的任何序列趋于零, 存在一个子序列使 (3.34) 成立. 更进一步, 对任何极限函数  $h(x, t)$ , 在远离点集  $\{a_j(t), j = 1, \dots, k, t > 0\} \subseteq \Omega \times \mathbb{R}^+$ , 它满足线性抛物型方程,

函数  $a_j(t) \in \Omega, j = 1, \dots, k$ , 满足 ODE:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} a_j(t) = -\frac{\nabla a(a_j(t))}{a(a_j(t))}, & j = 1, \dots, k, \\ a_j(0) = b_j, & 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (3.35)$$

这里  $T$  选取使得  $a_j(t)$  停留在  $\Omega$  内, 且  $a_l(t) \neq a_j(t), \forall 0 < t < T, l, j = 1, \dots, k$ .

对于 Neumann 边界条件, 我们考虑如下问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial U_\epsilon}{\partial t} = \Delta U_\epsilon + \frac{1}{\epsilon^2} U_\epsilon (1 - |U_\epsilon|^2), & (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (3.36)$$

$$\begin{cases} U_\epsilon(x, 0) = U_\epsilon^0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (3.37)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial U_\epsilon}{\partial \nu}(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.38)$$

设初值满足以下条件:

$$(A_4) E_\epsilon(U_\epsilon^0) \leq \pi d \log \frac{1}{\epsilon} + K, \|\nabla U_\epsilon^0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{K}{\epsilon};$$

$$(A_5) U_\epsilon^0(x) \rightarrow \prod_{j=1}^d \left( \frac{x - b_j}{|x - b_j|} \right)^{d_j} e^{i h_0(x)}, d_j = \pm 1,$$

依  $H_{\text{loc}}^1(\bar{\Omega} \setminus \{b_1, \dots, b_d\})$  弱收敛,  $(b_1, \dots, b_d)$  为  $\Omega$  中的  $d$  个不同的点,  $h_0(x) \in H^1(\Omega)$ ;

$$(A_6) \{x: |U_\epsilon^0(x)| \leq \frac{1}{2}\} \subseteq \bigcup_{j=1}^d B_{\delta_0}(b_j) \subseteq \{x \in \Omega; \text{dist}(x, \partial\Omega) \geq \delta_0\}.$$

进一步考虑一族问题代替问题(3.36), (3.37), (3.38):

$$\begin{cases} \frac{1}{\lambda_\epsilon} \frac{\partial U_\epsilon}{\partial t} = \Delta U_\epsilon + \frac{U_\epsilon}{\epsilon^2} (1 - |U_\epsilon|^2), & (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \lambda_\epsilon > 0, \end{cases} \quad (3.39)$$

$$\begin{cases} U_\epsilon(x, 0) = U_\epsilon^0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (3.40)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial U_\epsilon}{\partial \nu}(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.41)$$

**定理 3.6** 设  $U_\epsilon(x, t)$  为问题(3.39)–(3.41)的解,  $U_\epsilon^0(x)$  满足假设  $(A_4)$ – $(A_6)$ , 则有如下结论:

(i) 如  $\lambda_\epsilon \equiv 1$ , 则

$$U_\epsilon(x, t) \rightarrow \prod_{j=1}^d \left( \frac{x - b_j}{|x - b_j|} \right)^{d_j} e^{i h(x, t)} = e^{i(\theta_h + h(x, t))}$$

依  $H_{\text{loc}}^1(\bar{\Omega} \setminus \{b_1, \dots, b_d\})$  弱收敛, 其中  $h(x, t)$  为如下问题的解:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} = \Delta h, (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial h}{\partial \mathbf{v}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \theta_b, x \in \partial\Omega, \\ h(x, 0) = h_0(x), x \in \Omega. \end{cases} \quad (3.42)$$

(ii) 如  $\lambda_\epsilon \rightarrow +\infty, \lambda_\epsilon / \log \epsilon \rightarrow 0, \epsilon \rightarrow 0$ , 则

$U_\epsilon(x, t) \rightarrow \prod_{j=1}^d \left( \frac{x - b_j}{|x - b_j|} \right)^{d_j} e^{i h_0(x)}$  依  $L_{\text{loc}}^2(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^+)$  强收敛  
和依  $H_{\text{loc}}^1(\bar{\Omega} \setminus \{b_1, \dots, b_d\})$  弱收敛,  $t > 0, \epsilon \rightarrow 0$ , 其中  $\Delta h = 0$ ,  
 $x \in \Omega, \frac{\partial h}{\partial \mathbf{v}} = -\frac{\partial \theta_b}{\partial \mathbf{v}}, x \in \partial\Omega$ ;

(iii) 如  $\lambda_\epsilon = \log \frac{1}{\epsilon}$ , 则

$$U_\epsilon(x, t) \rightarrow \prod_{j=1}^d \left( \frac{x - a_j(t)}{|x - a_j(t)|} \right)^{d_j} e^{i h_a(x)}$$

依  $H_{\text{loc}}^1(\bar{\Omega} \setminus \{a_1(t), \dots, a_d(t)\})$  弱收敛,  $\forall 0 < t \leq T, \epsilon \rightarrow 0$ , 其中  $a_j(t), j = 1, \dots, d$  为  $\Omega$  中  $d$  个不同的点,  $\Delta h_a = 0, x \in \Omega$ .

$$\frac{\partial h_a}{\partial \mathbf{v}} = -\frac{\partial \theta_{a(t)}}{\partial \mathbf{v}}, x \in \partial\Omega.$$

更进一步, 函数  $a(t) = (a_1(t), \dots, a_d(t))$  满足微分方程

$$\frac{d}{dt} a(t) = -\text{grad} W(a), t \in (0, T], \quad (3.43)$$

且  $a(0) = b = (b_1, \dots, b_d)$ ,  $T$  选取使得所有  $a_j(t)$  停留在  $\Omega$  内,  
 $j = 1, \dots, d, 0 \leq t \leq T, a_j(t) \neq a_l(t), j \neq l$ .

现在 Riemann 流形上考虑上述问题.

设  $M$  为紧的光滑的无边的 Riemann 流形, 令  $g = g_{ij}(x) dx_i \otimes dx_j$   
为  $M$  上的度量, 设至少为  $C^3$ . 考虑

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} = \Delta_M u_\epsilon + \frac{u_\epsilon}{\epsilon^2} (1 - |u_\epsilon|^2), (x, t) \in M \times \mathbb{R}^+, \\ u_\epsilon(x, 0) = u_\epsilon^0(x), x \in M, \end{cases} \quad (3.44)$$

$$u_\epsilon(x, 0) = u_\epsilon^0(x), x \in M, \quad (3.45)$$

其中  $\Delta_M$  为在  $(M, g)$  上的 Laplace-Beltrami 算子.

设  $\Gamma_0$  为  $n-2$  维的可嵌入的  $C^2$  子流形的并,  $n = \dim M, T > 0$ , 设  $\{\Gamma_t\}, 0 \leq t \leq T$  为一族由  $\Gamma_0$  依平均曲率运动得到的  $M$  的可嵌入  $C^2$  子流形. 初值  $u_\epsilon^0(x)$  满足如下的  $(H_1)(H_2)(H_3)$ :

$$(H_1) \int_M \rho^2(x) [|\nabla u_\epsilon^0|^2 + \frac{1}{2\epsilon^2}(|u_\epsilon^0|^2 - 1)^2] dx \leq K,$$

其中  $K$  为某正常数,  $0 < \epsilon \leq 1, \rho(x) \leq \text{dist}_Q(x, T_0)$ ;

$(H_2) u_\epsilon^0$  依  $C^0$  模收敛于远离  $\Gamma_0$  的映照  $(\epsilon \rightarrow 0)$ , 它的像为  $S^1$ ;

$(H_3)$  令  $\Gamma_0^i, i = 1, \dots, k$ , 为  $\Gamma_0$  的连通分量,  $\delta > 0$ , 选取得使得集合  $\Gamma_0^i(\delta), i = 1, \dots, k$ , 为两两不相交, 这里

$$\Gamma_0^i(\delta) = \{x \in Q : \text{dist}_Q(x, \Gamma_0^i) \leq \delta\}.$$

令  $S$  为  $\partial\Gamma_0^i(\delta)$  的嵌入圆, 使得  $S$  对  $\Gamma_0^i$  的环绕数为 1, 则我们能设映照  $\hat{u}_\epsilon^0: S \rightarrow S^1$  的度为  $\pm 1$ , (小的  $\epsilon > 0$ ). 进一步, 测度

$$\mu_\epsilon^0 = \frac{\frac{1}{2} \left[ |\nabla u_\epsilon^0|^2 + \frac{1}{2\epsilon^2} (|u_\epsilon^0|^2 - 1)^2 \right] dx}{\log \frac{1}{\epsilon}}$$

当  $\epsilon \rightarrow 0^+$  时弱收敛于  $\mu(0)$ , 使得  $\mu(0) \leq C_1 H^{n-2} L\Gamma_0$ , 这里  $H^{n-2} L\Gamma_0$  表示  $(n-1)$  维限制于  $\Gamma_0$  的 Hausdorff 测度.

我们有如下定理.

**定理 3.7** 在上述假设下, 问题 (3.44), (3.45) 的解  $u_\epsilon(x, t)$  依  $H_{\text{loc}}^1(M \setminus \Gamma_t)$  收敛于映照  $u_*(x, t)$ , 这里  $u_*(x, t)$  远离  $\Gamma_t$  是光滑的, 其值为  $S^1$ , 满足调和映照到  $S^1$  的热流方程. 进一步, 测度

$$\mu_\epsilon(t) = \frac{\frac{1}{2} \left[ |\nabla_M u_\epsilon|^2(x, t) + \frac{(|u_\epsilon|^2 - 1)^2}{2\epsilon^2}(x, t) \right]}{\log 1/\epsilon} dx$$

收敛于  $\mu(t)$ , 使得  $\pi H^{n-2} L\Gamma_t \leq \mu(t) \leq C_0 H^{n-2} L\Gamma_t$ .

考虑如下定解问题:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + \frac{1}{\epsilon^2} (1 - |u|^2) u, & (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, t) = g(x), & r \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (3.46)$$

其中  $\Omega$  为二维的光滑有界区域,  $\varepsilon > 0, u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2, g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  为光滑的, 且  $|g| = 1$ . 且设  $u_0(x) = g(x), x \in \partial\Omega$ .

**定理 3.8**<sup>[6]</sup> (i)  $\lim_{t \rightarrow \infty} u_\varepsilon(x, t) = u_\varepsilon(x)$  存在, 且  $u_\varepsilon(x)$  为问题(3.46)的一个定态解.

(ii)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(x)$  存在, 进一步  $u_\varepsilon(x)$  两极限为  $u^*(x), u^*(x) = \prod_{j=1}^k \left( \frac{z - a_j}{|z - a_j|} \right)^{d_j} e^{ih(x)}, x \in \Omega \subset \mathbb{C}, \sum_{j=1}^k d_j = d = \text{degree of } g,$   
 $\Delta h = 0, x \in \Omega, u^*|_{\partial\Omega} = g.$

如适当选取初值  $u_0^\varepsilon(x)$ , 则  $k = d, d_j = 1, j = 1, 2, \dots, d$ , 奇点  $a(a_1, \dots, a_d)$  为  $W_g$  的临界点.

(iii) 恰当地选取初值  $u_0^\varepsilon(x)$ , 有  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(x, t) = u_0(x), u_0(x)$  具有形式

$$u_0(x) = \prod_{j=1}^d \frac{x - b_j}{|x - b_j|} e^{ih_0(x)},$$

其中  $\Delta h_0(x) = 0, x \in \Omega, b = (b_1, \dots, b_d)$  为  $\Omega$  中的任意点(依赖于  $u_0^\varepsilon$ ), 使得  $b_i \neq b_j, i \neq j$ .

## § 4 Ginzburg-Landau 方程和平均曲率流

我们首先研究 Allen-Cahn 方程的渐近状态, 即考虑如下 Allen-Cahn 方程的初值问题,

$$\begin{cases} V_t^\varepsilon - \Delta V^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon^2} f(V^\varepsilon) = 0, & \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ V^\varepsilon = h^\varepsilon, \end{cases} \quad (4.1)$$

当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时  $V^\varepsilon$  的极限状态, 其中  $f(z) = 2(z^3 - z)$ . 为此, 我们需要有关由平均流运动引起的距离函数和 Allen-Cahn 方程上下解的知识.

给定紧子集  $\Gamma_0 \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2$ , 选取连续函数  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  满足

$$\Gamma_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0\} \quad (4.2)$$

和

$$g \text{ 在某个球外为常数.} \quad (4.3)$$

考虑如下平均曲率发展方程,

$$\begin{cases} u_t = \left[ \delta_{ij} - \frac{u_{,i} u_{,j}}{|Du|^2} \right] u_{,i} u_{,j}, & \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = g, & \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (4.4)$$

对于方程(4.4),已经断言:对于  $u$  的每一个水平集依平均曲率流发展,至少在  $Du \neq 0$  的区域内  $u$  为光滑的,且存在(4.4)唯一的连续的弱解,定义紧集

$$\Gamma_t \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid u(x, t) = 0\}, t \geq 0, \quad (*)$$

称  $\{\Gamma_t\}_{t \geq 0}$  为水平集,从  $\Gamma_0$  开始依平均流运动.

令  $t^* = \inf\{t > 0 \mid \Gamma_t = \emptyset\}$  表示熄灭时间,对任何有限时间  $0 \leq t \leq t^*$ , 让

$$d(x, t) \equiv \text{dist}(x, \Gamma_t), x \in \mathbb{R}^n, \quad (4.5)$$

表示在  $\mathbb{R}^n$  中  $x$  到  $\Gamma_t$  的距离,由  $u$  的连续性推出  $\Gamma_t$  为非空的,函数  $d$  对变量  $x$  是连续的,但对时间  $t$  可能是不连续的,例如  $\Gamma_t$  可能分裂为两块,其中之一在另一个之前发展成为空集.

#### 命题 4.1

(i) 对  $\forall x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq t^*$ ,

$$d(x, t) \leq \liminf_{\substack{y \rightarrow x \\ s \rightarrow t}} d(y, s).$$

(ii) 对  $x \in \mathbb{R}^n, 0 < t \leq t^*$ ,

$$d(x, t) \leq \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ s \downarrow t}} d(y, s).$$

证 (1) 选取  $\{y_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n, \{s_k\}_{k=1}^\infty \subset [0, t^*]$  使得  $y_k \rightarrow x, s_k \rightarrow t$  和

$$d(y_k, s_k) \longrightarrow \liminf_{\substack{y \rightarrow x \\ s \downarrow t}} d(y, s).$$

$\Gamma_{s_k}$  是紧的,非空的,则存在一点  $z_k \in \Gamma_{s_k}$  使得

$$d(y_k, s_k) = \text{dist}(y_k, \Gamma_{s_k}) = |y_k - z_k|, \quad k = 1, 2, \dots$$

我们选取子序列  $\{z_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} \subset \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$  和一点  $z \in \mathbb{R}^n$  使得  $z_{k_j} \rightarrow z$ , 当  $z_k \in \Gamma_{s_k}$  时,  $u(z_k, s_k) = 0 (k = 1, 2, \dots)$ , 推之,  $u(z, t) = 0$ , 因此,  $z \in \Gamma_t$ . 于是

$$\begin{aligned} d(x, t) = \text{dist}(x, \Gamma_t) &\leq |x - z| = \lim_{j \rightarrow \infty} |y_{k_j} - z_{k_j}| \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} d(y_{k_j}, s_{k_j}) = \liminf_{\substack{y \rightarrow x \\ s \uparrow t}} d(y, s). \end{aligned}$$

这就证明了 (i).

(2) 为验证 (ii), 设  $d(x, t) < \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ s \uparrow t}} d(y, s)$ , 选取  $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\{s_k\}_{k=1}^{\infty} \subset [0, t]$  满足  $y_k \rightarrow x, s_k \uparrow t$  且

$$d(y_k, s_k) \rightarrow \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ s \uparrow t}} d(y, s), \text{ 则存在 } r \in \mathbb{R} \text{ 满足}$$

$$d(x, t) < r < d(y_k, s_k), \forall k \text{ 充分大}, k \geq k_0. \quad (4.6)$$

特别,

$$B(y_k, r) \subset [\mathbb{R}^d \setminus \Gamma_{s_k}], k \geq k_0. \quad (4.7)$$

令  $B(y_k, r) = \Delta_{s_k}^k$ , 设  $\{\Delta_s^k\}_{s \geq s_k}$  表示球  $\Delta_{s_k}^k$  依平均曲率流发展的子序列, 则由 (4.7) 推出  $\Delta_s^k \cap \Gamma_s = \emptyset, \forall s \geq s_k$ , 由直接计算知,  $\Delta_s^k = B(y_k, r_k(s)) (s_k \leq s < t)$ , 其中  $r_k(s) = [r^2 - 2(n-1)/(s - s_k)]^{1/2}$ , 当  $\Delta_t^k \cap \Gamma_t = \emptyset$  时, 推出  $d(y_k, t) \geq r_k(t) (k \geq k_0)$ , 令  $k \rightarrow \infty$ , 可知  $d(x, t) \geq r$  和 (4.6) 矛盾.

**定理 4.2** 设  $d$  为距离函数, 则

$$d_t - \Delta d \geq 0, \text{ 当 } \{d > 0\} \subset \mathbb{R}^n \times (0, t^+). \quad (4.8)$$

如  $\Gamma$  依平均曲率光滑运动, 直接计算验证  $d_t - \Delta d \geq 0$ , 在靠近  $\Gamma$  的区域,  $d$  为光滑的, 实际上, 函数  $d$  为热传导方程的整体上界(弱解), 即为黏性解.

**证** (1) 固定试验函数  $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ , 且设

$$d - \phi \text{ 在点 } (x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0, t^+) \text{ 上达到极小,} \quad (4.9)$$

其中

$$d(x_0, t_0) > 0. \quad (4.10)$$

我们必须证明



$$\phi_t - \Delta \phi \geq 0, \text{ 在 } (x_0, t_0) \text{ 上.} \quad (4.11)$$

(2) 如必要加一常数于  $\phi$ , 使得

$$\phi(x_0, t_0) = d(x_0, t_0) =: \delta > 0. \quad (4.12)$$

由于(4.9)和(4.11), 我们有

$$d(x, t) \geq \phi(x, t), x \in \mathbb{R}^n, 0 < t < t^*. \quad (4.13)$$

选取  $z_0 \in \Gamma_{t_0}$  使得

$$d(x_0, t_0) = |x_0 - z_0| = \delta. \quad (4.14)$$

利用旋转坐标, 可设

$$x_0 = z_0 + \delta e_n, \quad (4.15)$$

其中  $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ . 置

$$\psi(x, t) = \phi(x + x_0 - z_0, t) - \delta, x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \quad (4.16)$$

则

$$\psi(z_0, t_0) = 0. \quad (4.17)$$

(3) 我们断言

$$\{\psi > 0\} \subseteq \{d > 0\}. \quad (4.18)$$

为验证这个结论, 选取任意点  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, t^*)$ , 其中  $\phi(x, t)$  为(4.16)所确定, 则由(4.13), (4.16)有  $d(x + x_0 - z_0, t) \geq \phi(x + x_0 - z_0, t) > \delta$ , 如  $d(x, t) = 0$ , 则  $\delta < d(x + x_0 - z_0, t) - d(x, t) \leq |x_0 - z_0| = \delta$ . 矛盾, 断言(4.18)成立.

(4) 现验证

$$D\phi(x_0, t_0) = e_n, \quad (4.19)$$

$$\phi_{x_n x_n}(x_0, t_0) \leq 0. \quad (4.20)$$

事实上, 由(4.12), (4.13)推出

$$\phi(x, t_0) - \phi(x_0, t_0) \leq d(x, t_0) - d(x_0, t_0)$$

$$\leq |x - x_0|, x \in \mathbb{R}^n.$$

推之,  $|D\phi(x, t_0)| \leq 1$ . 另一方面, 考虑数量函数  $\Phi(s) = \phi(z_0 + se_n, t_0) (s > 0)$ , 由(4.13)有

$$\Phi(s) \leq d(z_0 + se_n, t_0) \leq \delta.$$

因  $z_0 \in \Gamma_0$ , 再有  $\Phi(s) = \phi(z_0 + \delta e_n, t_0) = d(x_0, t_0) = \delta$ , 则

$$\Phi'(\delta) = 1, \Phi''(\delta) \leq 0.$$

即有  $\phi_{x_n}(x_0, t_0) = 1, \phi_{x_n x_n}(x_0, t_0) \leq 0$ .

(5) 再回到主要任务. 验证不等式(4.11). 必要时, 可置换  $u$  为  $|u|$ . 能设

$$u \geq 0, (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty).$$

因此  $\{d > 0\} = \{u > 0\}$ , 由(4.18) 推出

$$\{\psi > 0\} \subseteq \{u > 0\}. \quad (4.21)$$

我们构造连续函数  $\psi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ . 使得

$$\psi(0) = 0, \psi(z) > 0, z > 0, \quad (4.22)$$

$$\psi(z, t) \leq \psi(u(z, t)), (z, t) \text{ 靠近 } (z_0, t_0). \quad (4.23)$$

为此, 定义紧集

$E_k = \{x \in \mathbb{R}^n, 0 < t < t^* \mid \psi(x, t) \geq \frac{1}{k}, |x - x_0| \leq 1, |t - t_0| \leq 1\}, k = 1, 2, \dots$ . 记  $\beta_k = \inf_{E_k} u$ , 由于(4.21),  $\beta_1 \geq \dots \geq \beta_k \geq \beta_{k+1} \geq \dots > 0$ , 且有  $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = 0$ , 因  $u(z, t_0) = \psi(z_0, t_0) = 0$ , 选取子序列  $\{\beta_{k_j}\}_{j=1}^\infty \subset \{\beta_k\}_{k=1}^\infty$ , 满足  $\beta_{k_j} > \beta_{k_{j+1}}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ), 定义  $\psi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\psi(\beta_{k_{j+1}}) = \frac{1}{k_j}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

$\psi$  在  $[\beta_{k_{j+1}}, \beta_{k_j}]$  上是线性的, 则如  $(x, t) \in E_{k_{j+1}} \setminus E_{k_j}$ , 因此在集合

$$\bigcup_{j=1}^\infty E_{k_{j+1}} \setminus E_{k_j} = \left\{ 0 < \psi < \frac{1}{k_1} \right\}$$

(4.23) 是正确的, 因(4.23) 在  $\{\psi \leq 0\}$  上是平凡的, 我们推出(4.23) 对所有点靠近  $(z_0, t_0)$  是对的.

(6) 可让  $\psi(u)$  为平均曲率方程的解. 由(4.17), (4.23) 推出  $\psi(u) - \psi$  在  $(z_0, t_0)$  具有局部极小. 我们有

$$\psi_t - \left( \delta_{ij} - \frac{\psi_{x_i} \psi_{x_j}}{|D\psi|^2} \right) \psi_{x_i x_j} \geq 0, \quad \text{在 } (z_0, t_0) \text{ 上,}$$

依(4.16)

$$\phi_t(z_0, t_0) = \phi_t(x_0, t_0), D\phi(z_0, t_0) = D\phi(x_0, t_0),$$

$$D^2\phi(z_0, t_0) = D^2\phi(x_0, t_0).$$

因此,由(4.19), (4.20) 得到

$$\phi_t - \Delta\phi = \phi_t - \left( \delta_{ij} - \frac{\phi_{x_i}\phi_{x_j}}{|D\phi|^2} \right) \phi_{x_i x_j} - \phi_{x_n x_n} \geq 0, \quad \text{在 } (z_0, t_0) \text{ 上.}$$

这就是不等式(4.11).

以上的证明可给出一个几何解释. 基于(4.16), (4.19), 集合  $\{\phi = 0\}$  为靠近  $(z_0, t_0)$  点的光滑超曲面  $S$ , 它正切于集合  $\Gamma$  (可能不光滑) 于  $(z_0, t_0)$  点. 从平均曲率流方程解的定义有

$$\phi_t - \left[ \delta_{ij} - \frac{\phi_{x_i}\phi_{x_j}}{|D\phi|^2} \right] \phi_{x_i x_j} \geq 0, \quad \text{在 } (z_0, t_0) \text{ 上.}$$

这意味  $S$  在  $(z_0, t_0)$  上的速度  $\geq S$  在  $(z_0, t_0)$  处的平均曲率 ( $n-1$  次).

附注, 事实上  $d$  为热传导方程  $t \leq t^*$  上的上解, 即有

$$d_t - \Delta d \geq 0, \{d > 0\} \subset \mathbb{R}^n \times (0, t^*]. \quad (4.24)$$

为验证这个, 设对上述的  $\phi$  有

$$d - \phi \text{ 在 } (x_0, t_0) \text{ 上取得极小.}$$

其中  $t_0 = t^*$ ,  $d(x_0, t_0) > 0$ , 通过修定, 可设  $d - \phi$  在  $(x_0, t_0)$  达到严格极小. 给定  $\varepsilon > 0$ , 记

$$\phi^\varepsilon_{(x,t)} \equiv \phi(x,t) + \frac{\varepsilon}{t - t^*}, x \in \mathbb{R}^n, 0 < t < t^*.$$

因  $d$  是下半连续,  $\phi^\varepsilon = -\infty, t = t^*, d - \phi^\varepsilon$  在  $(x_\varepsilon, t_\varepsilon) \in \mathbb{R}^n \times (0, t^*)$  具有极小, 且

$$x_\varepsilon \rightarrow x_0, t_\varepsilon \rightarrow t_0 = t^*, \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4.25)$$

因  $d(x_0, t_0) > 0, d$  为下半连续, 我们有  $d(x_\varepsilon, t_\varepsilon) > 0, \varepsilon$  充分小. 由定理 4.2 推出.

$$\phi^\varepsilon_t - \Delta\phi^\varepsilon \geq 0, \text{ 在 } (x_\varepsilon, t_\varepsilon) \text{ 上,}$$

因为  $\phi^\varepsilon_t(x,t) = \phi_t(x,t) - \frac{\varepsilon}{(t - t^*)^2} \leq \phi_t(x,t)$ . 因此,  $\phi_t - \Delta\phi \geq 0$ , 在  $(x_\varepsilon, t_\varepsilon)$  上. 令  $\varepsilon \rightarrow 0$ , 即得.

我们利用新的符号, 设  $\Gamma_0$  为有界开集  $U \subset \mathbb{R}^n$  的边界, 选取

连续函数  $g$ , 使得

$$g(x) \begin{cases} > 0, x \in U, \\ = 0, x \in \Gamma_0, \\ < 0, x \in \mathbb{R}^n - U. \end{cases} \quad (4.26)$$

解平均曲率方程(4.4). 定义

$$I_t = \{x \in \mathbb{R}^n \mid u(x, t) > 0\}, \quad (4.27)$$

$$O_t = \{x \in \mathbb{R}^n \mid u(x, t) < 0\}. \quad (4.28)$$

由于(\*)和(4.26), 可把  $I_t$  看作“内部”,  $O_t$  为“外部”. 记

$$I \equiv \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \mid u(x, t) > 0\}, \quad (4.29)$$

$$O \equiv \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \mid u(x, t) < 0\}. \quad (4.30)$$

改写

$$d(x, t) = \begin{cases} \text{dist}(x, \Gamma_t), & x \in I_t, \\ 0, & x \in \Gamma_t, x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq t \leq t^*, \\ -\text{dist}(x, \Gamma_t), & x \in O_t. \end{cases} \quad (4.31)$$

则定理(4.2)可写成

**定理 4.3** 设  $d$  为符号距离函数, 则

$$d_t - \Delta d \geq 0, I \cap (\mathbb{R}^n \times (0, t^*]), \quad (4.32)$$

$$d_t - \Delta d \leq 0, O \cap (\mathbb{R}^n \times (0, t^*]).$$

显然,  $d_t - \Delta d = 0$ , 在  $\Gamma$  上.

下面, 我们利用符号距离函数  $d$  定义 Allen-Cahn 方程的上、下解.

取单位体积的自由解  $F$  为

$$F(z) = \frac{1}{2}(z^2 - 1)^2, z \in \mathbb{R}. \quad (4.33)$$

因此,

$$f(z) = F'(z) = 2(z^3 - z), z \in \mathbb{R}. \quad (4.34)$$

对于自由解常微分方程

$$\begin{cases} q''(s) = f(q(s)), \\ \lim_{s \rightarrow \pm\infty} q(s) = \pm 1, \end{cases} \quad s \in \mathbb{R} \quad (4.35)$$

具有显式驻定波解

$$q(s) = \tanh(s) = \frac{e^{2s} - 1}{e^{2s} + 1}, s \in \mathbb{R}.$$

利用等式

$$\begin{cases} q'(s) = \operatorname{sech}^2(s) = \frac{4}{(e^s + e^{-s})^2}, & s \in \mathbb{R}, \\ q''(s) = -2\operatorname{sech}^2(s)\tanh(s), \end{cases} \quad (4.36)$$

对固定  $0 < \delta \ll 1$ , 考虑光滑辅助函数  $\eta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  满足

$$\begin{cases} \eta(z) = -\delta, & -\infty < z \leq \delta/4, \\ \eta(z) = z - \delta, & z \geq \delta/2, \\ 0 \leq \eta' \leq C, \quad \|\eta''\| \leq C/\delta, \end{cases} \quad (4.37)$$

其中  $C$  为常数, 与  $\delta$  无关.

附注: 因我们想要构造 Allen-cahn 方程的上解, 我们需要再定义  $d$  在集合  $\{d < 0\}$  上, 依定理 4.3,  $d$  为热传导方程的下解, 这是我们引入辅助函数  $\eta$  的理由.

设  $\{\Gamma_t\}_{t \geq 0}$  为平均曲率流运动,  $d$  为相应的符号距离函数.

**引理 4.4** 存在常数  $C$  与  $\delta$  无关, 使得

$$\eta(d)_t - \Delta \eta(d) \geq -C/\delta, \quad \mathbb{R}^n \times (0, t^*], \quad (4.38)$$

$$\eta(d)_t - \Delta \eta(d) \geq 0, \quad \{d > \frac{\delta}{2}\} \subseteq \mathbb{R}^n \times (0, t^*]. \quad (4.39)$$

**证** (1) 取  $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ , 设  $\eta(d) - \phi$  具有严格极小在点  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0, t^*)$  上.

(2) 设  $d(x_0, t_0) > 0$ , 固定  $\varepsilon > 0$ , 写

$$\begin{aligned} \eta_\varepsilon(z) &= \eta(z) + \varepsilon z, \quad z \in \mathbb{R}, \\ \rho_\varepsilon &= (\eta_\varepsilon)^{-1}, \end{aligned}$$

则  $\eta_\varepsilon(d)$  靠近  $(x_0, t_0)$  处下半连续,  $\eta_\varepsilon(d) - \phi$  在  $(x_\varepsilon, t_\varepsilon) \in \mathbb{R}^n \times (0, t^*)$  点上具有极小值, 且

$$x_\varepsilon \rightarrow x_0, \quad t_\varepsilon \rightarrow t_0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4.40)$$

如必要可加一常数于  $\phi$  上, 可设  $\eta_\varepsilon(d) - \phi = 0$ , 在  $(x_\varepsilon, t_\varepsilon)$  点上. 因此  $\eta_\varepsilon(d) \geq \phi$ ,

$$d \geq \rho_\epsilon(\phi) \equiv \psi^\epsilon, \forall (x, t) \text{ 靠近 } (x_\epsilon, t_\epsilon) \text{ 且在 } (x_\epsilon, t_\epsilon) \text{ 上相等.} \quad (4.41)$$

因  $d(x_0, t_0) > 0$ ,  $d$  在靠近  $(x_0, t_0)$  处下半连续.

$$d(x_\epsilon, t_\epsilon) > 0, \quad \text{任意小的 } \epsilon > 0.$$

依(4.41)和定理4.2,有

$$\phi_t^\epsilon - \Delta \phi^\epsilon \geq 0, \quad \text{在 } (x_\epsilon, t_\epsilon) \text{ 上.}$$

即有

$$\rho'_\epsilon(\phi)(\phi_t - \Delta \phi) - \rho''_\epsilon(\phi) |D\phi|^2 \geq 0, \quad \text{在 } (x_\epsilon, t_\epsilon) \text{ 上.} \quad (4.42)$$

$$\frac{\rho''_\epsilon(\phi)}{\rho'_\epsilon(\phi)} = -\eta''_\epsilon(\psi^\epsilon) \rho'_\epsilon(\phi)^2,$$

由(4.42)和(4.37)有

$$\begin{aligned} \phi_t - \Delta \phi &\geq -\eta''_\epsilon(\psi^\epsilon) \rho'_\epsilon(\phi)^2 |D\phi|^2 = -\eta''(\psi^\epsilon) |D\psi^\epsilon|^2 \\ &\geq -C/\delta. \end{aligned} \quad (4.43)$$

利用这个计算及(4.41)可得  $|D\psi^2|^2 \leq 1$ , 令  $\epsilon \rightarrow 0$  可得

$$\phi_t - \Delta \phi \geq -\frac{C}{\delta}, \text{ 在 } (x_0, t_0) \text{ 上.} \quad (4.44)$$

(3) 设  $d(x_0, t_0) \leq 0$ , 因  $d$  是下半连续, 有  $\eta(d) = -\delta$  在集合  $\{|x - x_0| \leq \sigma, t_0 - \sigma \leq t \leq t_0\}$  上,  $\sigma > 0$ , 因此

$$\phi_t(x_0, t_0) \geq 0, \quad D^2\phi(x_0, t_0) \leq 0.$$

于是

$$\phi_t - \Delta \phi \geq 0, \quad \text{在 } (x_0, t_0) \text{ 上.} \quad (4.45)$$

(4) 如  $\eta(d) - \phi$  在  $(x_0, t^*)$  达到极小, 用定理4.2后的附注, 可知断言(4.38)成立.

(5) 为证(4.39), 设  $d(x_0, t_0) > \frac{\delta}{2}$ , 则对小  $\epsilon > 0$ ,  $d(x_\epsilon, t_\epsilon) > \frac{\delta}{2}$ , 由(4.37)推出  $\eta''(\psi^\epsilon) = 0$ , 在  $(x_\epsilon, t_\epsilon)$  上. 用(4.43)可得(4.39).

利用  $q, d$  可构造 Allen-Cahn 方程的上解, 为此, 取待定常数

$\alpha, \beta > 0$ , 记

$$W^\varepsilon(x, t) = q\left(\frac{\eta(d(x, t)) + at}{\varepsilon}\right) + \varepsilon\beta, x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq t^*. \quad (4.46)$$

因截断函数  $\eta$  依赖于参数  $\delta$ , 故构造函数  $W^\varepsilon$ .

**定理 4.5** 存在常数  $\alpha = \alpha(\delta) > 0, \beta = \beta(\delta) > 0$  和  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\beta) > 0$ , 使得

$$W_t^\varepsilon - \Delta W^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} f(W^\varepsilon) \geq 0, \quad \mathbb{R}^n \times (0, t^*], \quad (4.47)$$

$\forall 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ . 另外,  $\alpha, \beta = O(\delta), \delta \rightarrow 0$ .

**证** (1) 选取  $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ , 且设

$$W^\varepsilon - \phi \text{ 在 } (x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0, t^*] \text{ 达到极小,} \quad (4.48)$$

$$W^\varepsilon - \phi = 0, \quad \text{在 } (x_0, t_0) \text{ 上.} \quad (4.49)$$

我们必须证明

$$\phi_t - \Delta \phi + \frac{1}{\varepsilon^2} f(\phi) \geq 0, \text{ 在 } (x_0, t_0) \text{ 上,} \quad (4.50)$$

其中  $\varepsilon$  充分小, 仅依赖于  $\delta$ , 但与  $\phi$  无关.

(2) 记

$$q^{-1}(z) \equiv \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right), \quad -1 < z < 1.$$

置  $\psi(x, t) \equiv \varepsilon q^{-1}(\phi(x, t) - \varepsilon\beta)$ , 这个函数在靠近  $(x_0, t_0)$  处是确定的. 因  $-1 < \phi(x_0, t_0) - \varepsilon\beta = q\left(\frac{\eta(d) + at}{\varepsilon}\right) < 1$ , 由于 (4.36), (4.46), (4.48), (4.49), 有

$$\eta(d) - (\psi - at) \text{ 在 } (x_0, t_0) \text{ 上取得极小.} \quad (4.51)$$

依照引理 4.4 有

$$\psi_t - \Delta \psi \geq \alpha - \frac{C}{\delta}, \text{ 在 } (x_0, t_0) \text{ 上,} \quad (4.52)$$

$$\psi_t - \Delta \psi \geq \alpha, \text{ 在 } (x_0, t_0) \text{ 上, 如 } d(x_0, t_0) > \frac{\delta}{2}. \quad (4.53)$$

(3) 因  $\phi \equiv q\left(\frac{\psi}{\varepsilon}\right) + \varepsilon\beta$ , 由计算得

$$\begin{aligned}
& \phi_t - \Delta\phi + \frac{1}{\varepsilon^2}f(\phi) \\
&= \frac{1}{\varepsilon}q'\left(\frac{\psi}{\varepsilon}\right)(\psi_t - \Delta\psi) - \frac{1}{\varepsilon^2}q''\left(\frac{\psi}{\varepsilon}\right)|D\psi|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}f\left(q\left(\frac{\psi}{\varepsilon}\right) + \varepsilon\beta\right) \\
&= \frac{1}{\varepsilon}q'\left(\frac{\psi}{\varepsilon}\right)(\psi_t - \Delta\psi) + \frac{1}{\varepsilon^2}q''\left(\frac{\psi}{\varepsilon}\right)(1 + |D\psi|^2) \\
&\quad + \frac{1}{\varepsilon^2}\left[f\left(q\left(\frac{\psi}{\varepsilon}\right) + \varepsilon\beta\right) - f\left(q\left(\frac{\psi}{\varepsilon}\right)\right)\right], \text{ 在 } (x_0, t_0) \text{ 上.}
\end{aligned} \tag{4.54}$$

利用常微分方程(4.35) 得到最后等式.

我们必须估计(4.54) 中的各项.

**情况 1**  $d(x_0, t_0) > \frac{\delta}{2}$ .

此时  $d > \frac{\delta}{2}$ , 在靠近  $(x_0, t_0)$  处, 因此在靠近  $(x_0, t_0)$  处  $\eta(d) = d - \delta$ . 则由(4.51) 推出

$$|D\Psi(x_0, t_0)| = 1.$$

于是, 由(4.53) 和(4.54) 得

$$\begin{aligned}
\phi_t - \Delta\phi + \frac{1}{\varepsilon^2}f(\phi) &\geq q'\left(\frac{\psi}{\varepsilon}\right)\frac{\alpha}{\varepsilon} + \frac{f'\left(q\left(\frac{\psi}{\varepsilon}\right)\right)\varepsilon\beta + O(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2} \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\left[q'\left(\frac{\psi}{\varepsilon}\right)\alpha + f'\left(q\left(\frac{\psi}{\varepsilon}\right)\right)\beta\right] + O(1).
\end{aligned} \tag{4.55}$$

固定  $0 < r < 1$ , 使得

$$\inf_{r \leq |z| \leq 1} f'(z) \equiv a_1 > 0,$$

则  $\inf_{|q(s)| \leq r} q'(s) \equiv a_2 > 0$ .

定义

$$\alpha = \frac{\delta}{4t^*}, \beta = a_2\alpha[2\|f'\|_{L^\infty_{(1,1)}}]^{-1}, \tag{4.56}$$

则存在两种可能性.

可能性(i)  $\left|q\left(\frac{\psi}{\varepsilon}\right)\right| \geq r$ .

由(4.55) 推出



$$\phi_t - \Delta\phi + \frac{1}{\varepsilon^2}f(\phi) \geq \frac{a_1\beta}{\varepsilon} + O(1) \geq 0, \text{ 在 } (x_0, t_0) \text{ 处,}$$

$\varepsilon$  充分小且依赖于  $\delta$ .

$$\text{可能性 (ii) } \left| q\left(\frac{\Psi}{\varepsilon}\right) \right| \leq r.$$

由 (4.55) 推出

$$\begin{aligned} \phi_t - \Delta\phi + \frac{1}{\varepsilon^2}f(\phi) &\geq \frac{1}{\varepsilon} [a_2\alpha + \|f'\|_L \beta] + O(1) \\ &= \frac{a_2\alpha}{2\varepsilon} + O(1) \geq 0, \text{ 在 } (x_0, t_0) \text{ 上.} \end{aligned}$$

对于小的  $\varepsilon, \varepsilon$  依赖于  $\delta$ .

所有以上情况均得到 (4.50).

$$\text{情况 2 } d(x_0, t_0) \leq \frac{\delta}{2}.$$

于以前对  $\alpha$  和  $\beta$  的选取, 此时  $\eta(d) \leq -\frac{\delta}{2}$ , 且由 (4.56) 有

$$\eta(d) + at_0 \leq -\frac{\delta}{2} + at_0 \leq -\frac{\delta}{4},$$

因此从 (4.51) 得不等式

$$\psi \leq -\frac{\delta}{4}, \quad \text{在 } (x_0, t_0) \text{ 上.} \quad (4.57)$$

由定义 (4.56) 和  $\eta$  的定义 (4.37) 可得  $|D\psi| \leq C$ , 在  $(x_0, t_0)$  上. 利用 (4.52), (4.54) 计算可得

$$\begin{aligned} \phi_t - \Delta\phi + \frac{1}{\varepsilon^2}f(\phi) &\geq \frac{1}{\varepsilon} \left[ q'\left(\frac{\psi}{\varepsilon}\right)\alpha + f'\left(q\left(\frac{\psi}{\varepsilon}\right)\right)\beta \right] \\ &\quad + O(1) - \frac{C}{\varepsilon\delta}q'\left(\frac{\psi}{\varepsilon}\right) - \frac{C}{\varepsilon^2} \left| q''\left(\frac{\psi}{\varepsilon}\right) \right|. \end{aligned} \quad (4.58)$$

因  $q'' \geq 0$  在  $(-\infty, 0]$  上, 由 (4.57) 和 (4.37) 得

$$\frac{C}{\varepsilon\delta}q'\left(\frac{\psi}{\varepsilon}\right) \leq \frac{C}{\varepsilon\delta}q'\left(-\frac{\delta}{4\varepsilon}\right) \leq \frac{C}{\varepsilon\delta}\exp\left(-\frac{\delta}{2\varepsilon}\right) = O(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

类似地

$$\frac{C}{\varepsilon^2} \left| q''\left(\frac{\psi}{\varepsilon}\right) \right| \leq \frac{C}{\varepsilon^2} \exp\left(-\frac{\delta}{2\varepsilon}\right) = O(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

我们分析 (4.58) 的其他各项如同情况 1 的两种情况. 结论是

$$\phi_t - \Delta \phi + \frac{1}{\epsilon^2} f(\phi) \geq 0, \quad \text{在 } (x_0, t_0) \text{ 上.}$$

$\forall 0 < \epsilon \leq \epsilon_0(\delta), \epsilon_0(\delta)$  充分小, 所有以上出现的常数均与  $\phi$  无关, 且  $\epsilon_0(\delta)$  的选取不依赖于  $\phi$ .

现考虑 Allen-Cahn 方程的渐近状态.

考虑 Allen-Cahn 方程

$$\begin{cases} v_t^\epsilon - \Delta v^\epsilon + \frac{1}{\epsilon^2} f(v^\epsilon) = 0, & \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ v^\epsilon = h^\epsilon, \end{cases} \quad (4.59)$$

其中立方项  $f$  由 (4.34) 所定义, 初始函数  $h^\epsilon$  由以下描述.

我们要证明  $v^\epsilon \rightarrow 1$  在区域  $I \subset \mathbb{R}^n \times [0, \infty]$ ,  $v^\epsilon \rightarrow -1$  在另一区域  $O \subset \mathbb{R}^n \times [0, \infty]$ , 交界面  $\Gamma$  在  $I$  “内部” 和  $O$  “外部” 之间, 它由平均曲率流所决定.

为了研究渐近形态, 我们必须选取特殊的初值函数. 更具体一点, 设  $\Gamma_0$  表示一个有界的、连通的开集  $U \subset \mathbb{R}^n$  的光滑边界. 设  $d_0$  为到  $\Gamma_0$  的符号距离函数. 令

$$h^\epsilon(x) \equiv q\left(\frac{d_0(x)}{\epsilon}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (4.60)$$

于是  $h^\epsilon$  在  $U$  内近似为 1, 而在  $\mathbb{R}^n \setminus \bar{U}$  近似为 -1, 通过界面  $\Gamma_0$  具有过渡  $O(\epsilon)$ , 由极大值原理,  $-1 < v_\epsilon < 1, (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty]$ .

**定理 4.6** 我们有

$$v^\epsilon \rightarrow 1 \text{ 在 } I \text{ 的紧子集上一致成立,} \quad (4.61)$$

$$v^\epsilon \rightarrow -1 \text{ 在 } O \text{ 的紧子集上一致成立.} \quad (4.62)$$

**证** (1) 当  $\Gamma_0$  光滑时, 能选  $g$  为光滑的在靠近  $\Gamma_0$  处, 且  $|Dg| = 1$ , 则若  $\delta > 0$  充分小, 集合

$$\Gamma_0^\delta \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = d_0(x) = -2\delta\} \quad (4.63)$$

为光滑的. 置

$$\Gamma_t^\delta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid u(x, t) = -2\delta\}, \quad t \geq 0, \quad (4.64)$$

从  $\Gamma_0^\delta$  发展起来. 取  $d^\delta$  表示到  $\Gamma_t^\delta$  的符号距离函数,  $d_0^\delta$  表示到  $\Gamma_0^\delta$  的

符号距离函数,  $t_\delta^*$  表示  $\{I_t^\delta\}_{t \geq 0}$  的熄灭时间.

选取  $\eta(\cdot)$  如前. 置

$$W^{\varepsilon, \delta}(x, t) \equiv q \left( \frac{\eta(d^\delta(x, t)) + \alpha t}{\varepsilon} \right) + \varepsilon \beta, \quad (4.65)$$

其中  $\alpha, \beta$  为 (4.56) 所给定,  $t_\delta^*$  代替  $t^*$ , 则对  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0(\delta)$  有

$$W_t^{\varepsilon, \delta} - \Delta W^{\varepsilon, \delta} + \frac{1}{\varepsilon^2} f(W^{\varepsilon, \delta}) \geq 0, \quad \mathbb{R}^n \times (0, t_\delta^*). \quad (4.66)$$

(2) 我们首先断言

$$W^{\varepsilon, \delta}(x, 0) \geq h^\varepsilon(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (4.67)$$

为验证这个不等式, 基于 (4.60) 充分验证

$$\eta(d_0^\delta(x)) \geq d_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

由于 (4.63),  $d_0^\delta(x) \geq d_0(x) + 2\delta$ , 因此  $\eta(d_0^\delta(x)) \geq \eta(d_0(x) + 2\delta)$ , ( $x \in \mathbb{R}^n$ ). 充分证明

$$d_0(x) \leq \eta(d_0(x) + 2\delta), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (4.68)$$

由  $d_0(x) \geq -\frac{3\delta}{2}$ , 则  $d_0(x) + 2\delta \geq \frac{\delta}{2}$ ; 因此

$$\eta(d_0(x) + 2\delta) = d_0(x) + \delta \geq d_0(x).$$

另一方面, 如  $d_0(x) \leq -(\frac{3}{2})\delta$ , (4.68) 是显然的,  $\eta \geq -\delta$ .

(3) 记

$$W = e^{-\lambda t} W^{\varepsilon, \delta}, \quad \lambda > 0. \quad (4.69)$$

可断言

$$W_t - \Delta W + \lambda W + \frac{e^{-\lambda t}}{\varepsilon^2} f(e^{\lambda t} W) \geq 0, \quad \mathbb{R}^n \times (0, t_\delta^*]. \quad (4.70)$$

为验证这一点, 选取  $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ , 且设

$$W - \phi \text{ 在 } (x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0, t_\delta^*] \text{ 上达到极小,}$$

且  $W - \phi = 0$  在  $(x_0, t_0)$  上, 则

$$e^{-\lambda t} W^{\varepsilon, \delta} = W \geq \phi, \quad \mathbb{R}^n \times (0, t_\delta^*],$$

且在  $(x_0, t_0)$  处相等, 因此

$$W^{\varepsilon, \delta} \geq \phi, \quad \mathbb{R}^n \times (0, t_\delta^*],$$

在  $(x_0, t_0)$  处相等. 令  $\psi = e^{\lambda t} \phi$ , 从 (4.66) 推出

$$\psi_t - \Delta \psi + \frac{1}{\varepsilon^2} f(\psi) \geq 0, \quad \text{在 } (x_0, t_0) \text{ 上.}$$

最后不等式为

$$\phi_t - \Delta \phi + \lambda \phi + \frac{e^{-\lambda t}}{\varepsilon^2} f(e^{\lambda t} \phi) \geq 0, \quad \text{在 } (x_0, t_0) \text{ 上.}$$

这就建立了 (4.70).

(4) 令

$$\lambda = \lambda_\varepsilon \equiv \frac{2 \|f'\|_{L^\infty(0,1)}}{\varepsilon^2},$$

则对每个  $t$ , 映照

$$z \rightarrow \lambda z + \frac{e^{-\lambda t}}{\varepsilon^2} f(e^{\lambda t} z) \text{ 是严格增加的.} \quad (4.71)$$

(5) 现断言

$$W^{\varepsilon, \delta} \geq v^\varepsilon, \quad \text{在 } \mathbb{R}^n \times (0, t_\delta^*]. \quad (4.72)$$

的确, 反之则有

$$W^{\varepsilon, \delta} < v^\varepsilon, \quad \text{在 } \mathbb{R}^n \times [0, t_\delta^*] \text{ 上的某处.}$$

推之,

$$W < v, \quad \text{在 } \mathbb{R}^n \times (0, t_\delta^*] \text{ 上的某处,}$$

其中  $W = e^{-\lambda t} W^{\varepsilon, \delta}$ ,  $v = e^{-\lambda t} v^\varepsilon$ , 函数  $W$  是下半连续, 且

$$W \geq v, \quad \text{在 } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \text{ 上.}$$

因此, 如有必要扰动  $W$ , 能设存在一点  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times [0, t_\delta^*]$ , 使得

$$(W - v)(x_0, t_0) = \min_{\mathbb{R}^n \times [0, t_\delta^*]} (W - v) \equiv b < 0, \quad (4.73)$$

事实上, 这样的点永远存在, 因为

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} W \geq e^{-\lambda t} (-1 + \varepsilon \beta) > - \lim_{|x| \rightarrow \infty} v = e^{-\lambda t}.$$

由 (4.59) 有

$$v_t - \Delta v + \lambda v + \frac{e^{-\lambda t}}{\varepsilon^2} f(e^{\lambda t} v) = 0, \quad \mathbb{R}^n \times (0, \infty). \quad (4.74)$$

如

$$\phi \equiv v + b, \quad (4.75)$$

则  $\phi \in C^1(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ , 由此和(4.73)有  $W - \phi$  在  $(x_0, t_0)$  上达到极小, 且  $W - \phi = 0$  在  $(x_0, t_0)$  上, 由上面可推出

$$\phi_t - \Delta \phi + \lambda \phi + \frac{e^{-\lambda t}}{\varepsilon^2} f(e^{\lambda t} \phi) \leq 0, \quad \text{在 } (x_0, t_0) \text{ 上.} \quad (4.76)$$

因  $b < 0, \phi < v$ , 由(4.71), (4.75), (4.76)得

$$v_t - \Delta v + \lambda v + \frac{e^{-\lambda t}}{\varepsilon^2} f(e^{\lambda t} v) > 0, \quad \text{在 } (x_0, t_0) \text{ 上,}$$

这和(4.74)矛盾, 从而证明了断言(4.72).

(6) 利用(4.72)和辅助函数  $W^{\varepsilon, \delta}$  的定义(4.65), 我们发现

$$q\left(\frac{\eta(d^\delta(x, t)) + at}{\varepsilon}\right) + \varepsilon\beta \geq v_{(r, t)}^\varepsilon, \quad x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq t_\delta^*. \quad (4.77)$$

如  $\eta(d^\delta(x, t)) + at \leq -\delta + at_\delta^* \leq -\frac{3}{4}\delta$ , 由(4.56),  $t_\delta^*$  置换  $t^*$ , 则有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} q\left(\frac{\eta(d^\delta(x, t)) + at}{\varepsilon}\right) + \varepsilon\beta = -1.$$

基于(4.77)有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v^\varepsilon(x, t) = -1,$$

在  $Q^\delta \equiv \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, t_\delta^*] \mid u(x, t) < -2\delta\}$  上一致成立,  $\delta$  充分小, 特别地

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v^\varepsilon(x, t) = -1,$$

在  $Q^\delta$  的紧子集上一致成立,  $\delta$  充分小. 因

$$O = \bigcup_{\delta > 0} Q^\delta,$$

(4.61) 证毕, (4.62) 可类似地证明.

利用能量法可证

$$v^\varepsilon \rightarrow \pm 1, \quad \mathbb{R}^n \times [0, \infty). \quad (4.78)$$

事实上,

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \frac{\varepsilon}{2} |Dv^\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon} F(v^\varepsilon) \right] dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \epsilon Dv^\epsilon \cdot Dv_t^\epsilon + \frac{1}{\epsilon} f(v^\epsilon) v_t^\epsilon \right] dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} v_t^\epsilon \left( -\epsilon \Delta v^\epsilon + \frac{1}{\epsilon} f(v^\epsilon) \right) dx \\
&= -\epsilon \int_{\mathbb{R}^n} (v_t^\epsilon)^2 dx \leq 0,
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \frac{\epsilon}{2} |Dv^\epsilon|^2 + \frac{1}{\epsilon} F(v^\epsilon) \right] dx + \epsilon \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} (v_t^\epsilon)^2 dx dt \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \frac{\epsilon}{2} |Dh^\epsilon|^2 + \frac{1}{\epsilon} F(h^\epsilon) \right] dx \leq C < \infty.
\end{aligned}$$

上式是基于初值函数  $h^\epsilon$  在 (4.60) 中的特殊形式得到的, 由以上不等式有

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} F(v^\epsilon) dx dt \leq O(\epsilon), \epsilon \rightarrow 0, T > 0.$$

可推出

$$(v^\epsilon)^2 \rightarrow 1, \quad \text{在 } \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \text{ 中几乎处处收敛.}$$

特别地, 如  $G(z) \equiv \left(\frac{z^3}{3}\right) - z$ , 记

$$\overline{v}^\epsilon = G(v^\epsilon).$$

可得

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |D\overline{v}^\epsilon| dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |(v^\epsilon)^2 - 1| |Dv^\epsilon| dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \frac{\epsilon}{2} |Dv^\epsilon|^2 + \frac{F(v^\epsilon)}{\epsilon} \right] dx \leq C < \infty, \\
\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |\overline{v}_t^\epsilon| dx dt &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |(v^\epsilon)^2 - 1| |v_t^\epsilon| dx dt \\
&\leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} [\epsilon (v_t^\epsilon)^2 + \frac{1}{2\epsilon} F(v^\epsilon)] dx dt \leq CT < \infty.
\end{aligned}$$

因此  $\{\overline{v}^\epsilon\}_{\epsilon>0}$  在  $BV \subset (\mathbb{R}^n \times (0, T))$  中有界,  $T > 0$ , 于是在  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n \times (0, T])$  上准紧. 推出  $\{v^\epsilon\}_{\epsilon>0}$  在  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n \times [0, T])$  上准

紧,因此可选取子序列使得

$$v^{\varepsilon_i} \rightarrow \pm 1, \quad \text{在 } \mathbb{R}^n \times (0, \infty).$$

定理 4.6 的断言

$$\begin{aligned} v^{\varepsilon} &\rightarrow 1, & \text{在 } I \text{ 中,} \\ v^{\varepsilon} &\rightarrow -1, & \text{在 } O \text{ 中,} \end{aligned}$$

精确化上述结果.

在文献[11]中考虑如下 Ginzburg-Landau 方程

$$u_t^{\varepsilon} - \Delta u^{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2} f(u^{\varepsilon}) = 0, \quad \mathbb{R}^d \times (0, \infty), \quad (4.79)$$

$$u^{\varepsilon}(0, x) = u_0^{\varepsilon}(x), x \in \mathbb{R}^d, \quad (4.80)$$

当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时的渐近状态,其中非线性项  $f$  具有位势  $W$ ,

$$W(u) = \frac{1}{2}(u^2 - 1)^2, f(u) = W'(u) = 2u(u^2 - 1),$$

在假设(A)下证明了

(a)  $u^{\varepsilon_n} \rightarrow 1$ , 在  $P$  的有界子集上一致成立;

(b)  $u^{\varepsilon_n} \rightarrow -1$ , 在  $N$  的有界子集上一致成立;

(c)  $\Gamma = P \cup N$  的余集具有  $d$  维 Hausdorff 维数,且它由平均曲率运动所决定,

其中  $P, N$  为  $\mathbb{R}^d \times (0, \infty)$  的二个不相连的开子集,  $\varepsilon_n$  为子序列.

对任意  $\delta > 0$ , 存在正常数  $K_{\delta}$  和  $\eta$  使得对任意连续函数  $\phi$ ,

$$\begin{aligned} (A) \sup \left\{ \int |\phi(x)| \mu^{\varepsilon}(dx; dt) : \varepsilon \in (0, 1), t \in \left[ \delta, \frac{1}{\delta} \right] \right\} \\ \leq K_{\delta} \sup \{ |\phi(x)| e^{\eta(x)} : x \in \mathbb{R}^d \}, \end{aligned}$$

其中

$$\mu^{\varepsilon}(dx; t) = \left[ \frac{\varepsilon}{2} |Du^{\varepsilon}(x, t)|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u^{\varepsilon}(x, t)) \right] dx. \quad (4.81)$$

乘(4.79)以  $\varepsilon u_t^{\varepsilon}$ , 分部积分得

$$E^{\varepsilon}(t_1) - E^{\varepsilon}(t_2) = -\varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} (u_t^{\varepsilon})^2 dx dt, t_1 > t_2, \quad (4.82)$$

其中

$$E^{\varepsilon}(t) = \mu^{\varepsilon}(\mathbb{R}^d; t) = \int_{\mathbb{R}^d} \left[ \frac{\varepsilon}{2} |Du^{\varepsilon}(x, t)|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u^{\varepsilon}(x, t)) \right] dx.$$

计算表明,如存在函数  $z_0^\varepsilon$ , 常数  $\lambda \geq 1$  和具有有限周边的有界开集  $\Omega$  满足

$$u_0^\varepsilon(x) = q\left(\frac{z_0^\varepsilon(x)}{\varepsilon}\right),$$

$$q(r) = \tanh(r), \quad |Dz_0^\varepsilon| \leq \lambda, \quad \frac{1}{\lambda}d(x) \leq z_0^\varepsilon(x) \leq \lambda d(x),$$

其中  $d(x)$  为  $x$  到  $\partial\Omega$  的符号距离函数, 则  $E^\varepsilon(0)$  对  $\varepsilon$  是有界的.

设  $d_0(x)$  为  $x$  到  $\Gamma_0$  的符号距离, 选取  $\lambda > 0$  使得

$$d_0 \in C^2(\Omega_\lambda), \Omega_\lambda = \{x \in \Omega; |d_0(x)| < 2\lambda\}. \quad (4.83)$$

**定理 4.7** 对任何  $\delta, m > 0$ , 存在常数  $C_1, C_2 > 0$ , 使得对

$$t \in I_\varepsilon = \left[ C_1 \varepsilon^2 \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), C_2 \varepsilon^{\frac{1}{2}} \right], \quad (4.84)$$

有

$$\left| u^\varepsilon(x, t) - q\left(\frac{d_0(x)}{\varepsilon}\right) \right| \leq \delta, \text{ 若 } |d_0(x)| \leq \lambda, \quad (4.85)$$

$$|u^\varepsilon(x, t) - \text{sign}[u_0(x)]| \leq \varepsilon^m, \text{ 若 } |d_0(x)| \geq \lambda, \quad (4.86)$$

这里  $q(r) = \tanh(r)$ ,  $C_1, C_2$  表示由定理构造的常数, 如  $m = 2$ ,

$\delta = \frac{1}{8}$ , 则令

$$C_3 = q^{-1}\left(\frac{7}{8}\right). \quad (*)$$

固定  $t \in I_\varepsilon$ , 则对  $d(x) \in [\varepsilon C_3, \lambda]$ , 由 (4.85) 得

$$u^\varepsilon(x, t) \geq q^{-1}\left(\frac{d(x)}{\varepsilon}\right) - \delta \geq \frac{3}{4}.$$

如  $d(x) \geq \lambda$ , (4.86) 推出上面不等式, 如  $\varepsilon^2 < \frac{1}{4}$ . 因此

$$u^\varepsilon(x, t) \geq \frac{3}{4}, \quad \forall \varepsilon \leq \frac{1}{2}, t \in I_\varepsilon, d(x) \geq \varepsilon C_3. \quad (4.87)$$

类似地有

$$u^\varepsilon(x, t) \leq -\frac{3}{4}, \quad \forall \varepsilon \leq \frac{1}{2}, t \in I_\varepsilon, d(x) \leq -\varepsilon C_3. \quad (4.88)$$

**引理 4.8** 存在常数  $K$ , 与  $\varepsilon$  无关, 满足

$$|Du^\varepsilon(x, t)| \leq K/\varepsilon. \quad (4.89)$$



证 因  $|u_0| \leq 1$ ,  $|u^\epsilon(x, t)| \leq 1, \forall (t, x)$ , 令  $g(x, t) = \frac{1}{\epsilon^2} f(u^\epsilon(x, t))$ , 则对  $\forall 0 \leq \tau \leq t$ ,

$$u^\epsilon(x, t) = [G(\cdot, t - \tau) * u^\epsilon(\cdot, \tau)](x) + \int_\tau^t [G(\cdot, t - s - \tau) * g(\cdot, s)](x) ds, \quad (4.90)$$

其中  $*$  表示卷积,  $G$  为热核, 即

$$G(x, \tau) = \frac{1}{(4\pi\tau)^{1/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\tau}\right).$$

(4.90) 对  $x_j$  作微分, 利用卷积和热核的性质可得

$$\begin{aligned} |u_{x_j}^\epsilon(x, t)| &\leq \|D_j G(\cdot, t - \tau)\|_{L^1} \|u^\epsilon(\cdot, \tau)\|_{L^2} \\ &+ \int_\tau^t \|D_j G(\cdot, t - s - \tau)\|_{L^1} \|g\|_{L^2} dx \leq \frac{C}{\sqrt{t - \tau}} + \frac{C}{\epsilon^2} \sqrt{t - \tau}, \end{aligned}$$

其中  $C$  为适当常数, 选  $\tau = t - \epsilon^2$  即得 (4.89).

现考虑靠近界面的形态, 严格证明 (4.85), (4.86). 设  $\lambda$  为 (4.83) 所确定, 令

$$t_1 = C_1 \epsilon^2 \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right). \quad (4.91)$$

**定理 4.9** 存在  $\mu, K > 0$ , 使得对充分小的  $\epsilon$  有

$$u^\epsilon(x, t) \geq W(t - t_1, d_0(x)), \quad (4.92)$$

$$\forall t \in I_\epsilon, d_0(x) \in [\epsilon C_3, \lambda],$$

$$u^\epsilon(x, t) \geq -W(t - t_1, |d_0(x)|), \quad (4.93)$$

$$\forall t \in I_\epsilon, d_0(x) \in [-\lambda, -\epsilon C_3],$$

其中

$$W(d, t) = \max\left\{q\left(\frac{d - Kt}{\epsilon} - K\right) - K\epsilon - \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{\mu t}{\epsilon}\right), \frac{3}{4}\right\}.$$

证 我们仅证明 (4.92), (4.93) 的证明是类似的.

(1) 基于 (4.83), 存在  $d(x) \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$  满足

$$d(x) = d_0(x), \text{ 若 } |d_0(x)| \leq \lambda, \quad (4.94)$$

$$|d(x)| \geq \lambda, \text{ 若 } |d_0(x)| \geq \lambda, \quad (4.95)$$

$$|Dd(x)| \leq 1, \forall x. \quad (4.96)$$

对  $\xi(t), p(t) \geq 0$  (待定), 定义

$$v(x, t) = q \left[ \frac{d(x) - \epsilon C_3 - \xi\left(\frac{t}{\epsilon}\right)}{\epsilon} \right] - p\left(\frac{t}{\epsilon}\right),$$

其中  $C_3$  为 (\*) 所定义.

我们将证明对于适当选取的  $\xi(\cdot), p(\cdot)$  和充分小的  $\epsilon > 0$ ,  $v$  是 (4.79) 在  $\{v \geq 0\}$  上的下解. 事实上, 由直接计算可得

$$\begin{aligned} I &:= v_t - \Delta v + \frac{1}{\epsilon^2} f(v) \\ &= \frac{1}{\epsilon} q'(\cdots) \left[ -\frac{1}{\epsilon} \xi'\left(\frac{t}{\epsilon}\right) - \Delta d(x) \right] - \frac{1}{\epsilon} p'\left(\frac{t}{\epsilon}\right) \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon^2} [f(v) - q''(\cdots) |Dd|^2], \end{aligned}$$

其中  $(\cdots)$  表示  $\left[ \frac{d(x) - \epsilon C_3 - \xi\left(\frac{t}{\epsilon}\right)}{\epsilon} \right]$ .

(2) 因  $q(\cdots) = v + p, p \geq 0, q(\cdots) \geq 0, v(x, t) \geq 0$ , 因此在  $\{v \geq 0\}, q''(\cdots) \leq 0$ , 且由 (4.96) 有

$$q''(\cdots) |Dd|^2 \geq q''(\cdots) = f(q(\cdots)).$$

于是在  $\{v \geq 0\}$  上我们有

$$\begin{aligned} I &\leq -\frac{1}{\epsilon^2} q'(\cdots) \xi'\left(\frac{t}{\epsilon}\right) - \frac{1}{\epsilon} p'\left(\frac{t}{\epsilon}\right) \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon^2} [f(v) - f(q(\cdots))] + \frac{\beta}{\epsilon}, \end{aligned} \quad (4.97)$$

这里  $\beta = \|q'\|_{\infty} \|\Delta d\|_{\infty}$ .

(3) 置

$$\mu = f'\left(\frac{5}{8}\right) = \min\{f'(u) : u \geq \frac{5}{8}\} > 0, \quad (4.98)$$

$$p(\tau) = \frac{\epsilon\beta}{\mu} + \left(\frac{1}{4} - \frac{\epsilon\beta}{\mu}\right) \exp\left(-\frac{\mu\tau}{\epsilon}\right), \quad \tau \geq 0. \quad (4.99)$$

选取  $\xi \geq 0$ , 且满足

$$\xi' \geq 0. \quad (4.100)$$

(4) 设

$$q(\cdots) \in \left[ \frac{7}{8}, 1 \right]. \quad (4.101)$$

当  $q(\cdots) \leq \frac{7}{8}$  时将在下面分析. 因  $p(\tau) \leq \frac{1}{4}$ , 由(4.101)推出

$$v(x, t) = q(\cdots) - p\left(\frac{t}{\epsilon}\right) \geq \frac{5}{8},$$

又  $v = q(\cdots) - p \leq q(\cdots)$ , (4.98) 推出

$$f(v(x, t)) - f(q(\cdots)) \leq -\mu p\left(\frac{t}{\epsilon}\right).$$

由(4.99), (4.100) 和不等式(4.97) 可得

$$I \leq \frac{\beta}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon} p'\left(\frac{t}{\epsilon}\right) - \frac{\mu}{\epsilon^2} p\left(\frac{t}{\epsilon}\right) = 0, \text{ 在 } \{v \geq 0\} \text{ 上.}$$

(5) 设(4.101) 不成立, 即

$$q(\cdots) \leq \frac{7}{8},$$

则在  $\{v \geq 0\}$  上,  $q(\cdots) \in \left[0, \frac{7}{4}\right]$ , 且

$$q'(\cdots) = 1 - q(\cdots)^2 \geq 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2 = r. \quad (4.102)$$

令

$$\alpha = \max\{|f'(u)| : u \in [0, 1]\}.$$

因  $v \leq 1$  在  $\{v \geq 0\}$  上, 我们有

$$f(v) - f(q(\cdots)) \leq \alpha[v(x, t) - q(\cdots)] = \alpha p\left(\frac{t}{\epsilon}\right).$$

利用以上不等式和(4.102), 在(4.97) 中可得

$$I \leq -\frac{r}{\epsilon^2} \xi\left(\frac{t}{\epsilon}\right) - \frac{1}{\epsilon} p'\left(\frac{t}{\epsilon}\right) + \frac{\alpha}{\epsilon^2} p\left(\frac{t}{\epsilon}\right) + \frac{\beta}{\epsilon}.$$

我们选取  $\xi(\cdot)$  满足  $\xi(0) = 0$ , 且

$$\xi'(\tau) = \frac{1}{r}[\beta\epsilon + \alpha p(\tau) - \epsilon p'(\tau)] = \frac{\alpha + \mu}{r} p(\tau), \tau \geq 0,$$

由(4.99) 能积分以上方程

$$\xi(\tau) = \frac{\epsilon}{r} \left(1 + \frac{\alpha}{\mu}\right) \left[\beta\tau + \left(\frac{1}{4} - \frac{\epsilon\beta}{\mu}\right) \left(1 - \exp\left(-\frac{\mu\tau}{\epsilon}\right)\right)\right].$$

易知  $\xi' \geq 0$ .

(6) 由前面两步可知

$$I \leq 0, \text{ 在 } \{v \geq 0\} \text{ 上.}$$

由(4.87)有

$$u^\epsilon(x, t) \geq \frac{3}{4}, \forall t \in I_\epsilon, d_0(x) \geq \epsilon C_3.$$

特别

$$v(x, 0) = q(\cdots) - \frac{1}{4} \leq \frac{3}{4} \leq u^\epsilon(x, t), \forall d_0(x) \geq \epsilon C_3.$$

因  $p, \xi > 0$ ,

$$v(x, t - t_1) \leq q(0) = 0 \leq u^\epsilon(x, t), \forall t \in I_\epsilon, \forall d_0(x) = \epsilon C_3.$$

因  $u^\epsilon(x, t) \geq 0, \forall t \in I_\epsilon, d_0(x) \geq \epsilon C_3$ , 极大值原则推出

$$u^\epsilon(x, t) \geq v(x, t - t_1), \forall t \in I_\epsilon, d_0(x) \geq \epsilon C_3. \quad (4.103)$$

(4.92) 由(4.103), (4.87) 和  $p, \xi$  的定义得到.

以上作梯度估计, 即估计  $|Du^\epsilon|$  远离界面的上界. 令  $t_1$  如同(4.91),  $d \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$  为  $d_0$  的扩张, 满足(4.94), (4.95), (4.96) 且  $C_3$  为(\*)所定义.

**定理 4.10** 存在  $K, \delta, \alpha > 0$  满足

$$\begin{aligned} |Du^\epsilon(x, t)|^2 &\leq \frac{K^2}{\epsilon^2} \left[ \exp\left(-\frac{\delta}{\epsilon^2}(t - t_1)\right) \right] \\ &\quad + \exp\left[-\frac{\alpha}{\epsilon}(|d(x)| - \epsilon C_3)\right], \end{aligned} \quad (4.104)$$

对一切充分小的  $\epsilon > 0, t \in I_\epsilon, |d_0(x)| \geq \epsilon C_3$ .

**证** 令

$$\Omega = \{(x, t) : t \in I_3, |d_0(x)| > \epsilon C_3\},$$

$$\varphi(x, t) = |Du^\epsilon(x, t)|^2.$$

(1) 微分(4.79) 并乘以  $2Du^\epsilon$  可得

$$\varphi_t - \Delta \varphi + \frac{2}{\epsilon} f'(u^\epsilon) \varphi = -2 \|D^2 u^\epsilon\|^2 \leq 0.$$

由(4.87), (4.88)

$$|u^\varepsilon(x, t)| \geq \frac{3}{4}, \quad \forall (x, t) \in \Omega.$$

令

$$\delta = 2f'\left(\frac{3}{4}\right) = \min\{f'(u) : |u| \geq \frac{3}{4}\} > 0,$$

则

$$\varphi_t - \Delta\varphi + \frac{\delta}{\varepsilon^2}\varphi \leq 0, \quad \text{在 } \Omega \text{ 上.} \quad (4.105)$$

(2) 令

$$\psi(x, t) = \frac{K^2}{\varepsilon^2} \left\{ \exp\left(-\frac{\delta}{\varepsilon^2}(t - t_1)\right) + g\left(\frac{|d(x)| - \varepsilon C_3}{\varepsilon}\right) \right\},$$

其中  $K > 0$ ,  $g(\cdot)$  是以下方程的惟一有界解.

$$-g_{rr}(r) + \|\Delta d\|_\infty g_r(r) + \delta g(r) = 0, \quad r > 0, \quad (4.106)$$

其中  $g(0) = 1$ , 则

$$g(r) = e^{-\alpha r}, \quad \alpha = \frac{1}{2}(-\|\Delta d\|_\infty + \sqrt{\|\Delta d\|_\infty^2 + 4\delta}).$$

(3) 我们断言  $\psi$  为(4.105)在  $\Omega$  上的上界.

事实上

$$\psi_t - \Delta\psi + \frac{\delta}{\varepsilon^2}\psi = \frac{K^2}{\varepsilon^2} \left\{ -g_{rr}(\cdots) + |Dd|^2 - \varepsilon \frac{d}{|d|} \Delta d g_r(\cdots) + \delta g(\cdots) \right\},$$

这里  $(\cdots) = (|d(x)| - \varepsilon C_3)/\varepsilon$ , 因  $g_r \leq 0 \leq g_{rr}$ ,  $|Dd| \leq 1$ , 推出  $(\varepsilon \leq 1)$ ,

$$\psi_t - \Delta\psi + \frac{\delta}{\varepsilon^2}\psi \geq 0, \quad \text{在 } \Omega \text{ 上.}$$

(4) 由  $|Du^\varepsilon| \leq \frac{K}{\varepsilon}$  (4.89), 可得

$$\psi(x, t_1) \geq \frac{K^2}{\varepsilon^2} \geq \varphi(x, t_1), \quad \forall |d_0(x)| \geq \varepsilon C_1.$$

因  $g(0) = 1$ ,

$$\psi(x, t) \geq K^2/\varepsilon^2 \geq \varphi(x, t), \quad \forall |d_0(x)| = \varepsilon C_1.$$

(5) 应用最大值原理得  $\psi \geq \varphi$ , 在  $\Omega$  上.

**定理 4.11** 设条件(B) 成立, 则(A) 成立,

(B)(i)  $u_0^\epsilon$  与  $\epsilon$  无关, 即  $u_0^\epsilon = u_0$ ;

(ii)  $u_0 \in C_b^3(\mathbb{R}^d)$ ,  $|u_0(x)| < 1$ ;

(iii)  $\Gamma_0 = \{x \in \mathbb{R}^d : u_0(x) = 0\}$  是有界的;

(iv)  $\inf_{\Gamma_0} |Du_0| > 0$ ;

(v)  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{|x| \geq R} \inf_{|x| \geq R} |u_0(x)| > 0$ ;

**证** 设  $A$  为具有有限 Lebesgue 测度的  $\mathbb{R}^d$  中的 Borel 子集, 令

$$\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R}^d : |d_0(x)| \leq \epsilon C_3\},$$

$$\Omega_2 = \{x \in \mathbb{R}^d : |d_0(x)| \in [\epsilon C_3, \lambda]\},$$

$$\Omega_3 = \{x \in \mathbb{R}^d : |d_0(x)| \leq \lambda\},$$

$$A_i = A \cap \Omega_i, i = 1, 2, 3,$$

$$I_i(t) = \int_{A_i} \frac{\epsilon}{2} |Du^\epsilon(x, t)|^2 dx, \quad i = 1, 2, 3, \quad t \geq 0,$$

$$J_i(t) = \int_{A_i} \frac{1}{\epsilon} W(u^\epsilon(x, t)) dx, \quad i = 1, 2, 3, \quad t \geq 0,$$

其中  $\lambda, C_3$  分别由(4.83) 和(\*) 所定, 以下将分别估计  $I_i$  和  $J_i$ .

(1) 由引理 4.8,

$$I_1(t) + J_1(t) \leq \int_{A_1} \frac{\epsilon}{2} \frac{K^2}{\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon} = \left(\frac{K^2}{2} + 1\right) \frac{|\Omega_1|}{\epsilon}.$$

因  $\Gamma_0$  为光滑的、有界的, 对充分小的  $\epsilon > 0$ ,  $|\Omega_1| \leq \epsilon \hat{C}$ ,  $\hat{C}$  为适当的常数, 因此

$$I_1(t) + J_1(t) \leq \hat{C} \left(1 + \frac{K^2}{2}\right), \quad \forall t \geq 0.$$

(2) 置

$$C_4 = C_1 + \frac{1}{\delta}, t_4 = C_4 \epsilon^2 \ln \left(\frac{1}{\epsilon}\right),$$

其中  $\delta > 0$  为出现于(4.83) 中的常数,  $C_1$  出现于定理 4.7, 则对一切  $t \in I_\epsilon \cap [t_4, \infty)$ , 由(4.104) 有

$$|Du^\epsilon(x, t)|^2 \leq \frac{K^2}{\epsilon^2} \left[ \epsilon + \exp \left( -\frac{\alpha}{\epsilon} (|d(x)| - \epsilon C_1) \right) \right],$$

因此

$$I_2(t) \leq \frac{K^2}{2} |A_2| + \frac{K^2}{2\epsilon} \int_{\Omega_1} \exp\left(-\frac{\alpha}{\epsilon}(|d(x)| - \epsilon C_1)\right) dx.$$

由(4),  $d_0 = d$  在  $A_2$  上, 在上面积分中我们应用局部正交坐标,  $w_1 = d_0(x)$ , 因  $d_0$  在  $\Omega_2$  中光滑, 则存在常数  $\hat{C}$ , 依赖于  $\Gamma_0$  的  $(d-1)$  维测度, 使得

$$\begin{aligned} I_2(t) &\leq \frac{K^2}{2} |A_2| + \frac{K^2}{2\epsilon} C \int_{\epsilon C_1}^{\lambda} e^{-\frac{\alpha}{\epsilon}(w_1 - \epsilon C_1)} dw_1 \\ &\leq \frac{K^2}{2} (|A_2| + \hat{C}), \forall t \in I_\epsilon \cap [t_4, \infty), \end{aligned}$$

其中  $\hat{C}$  为适当常数.

(3) 选取常数  $C_1, C_2$  满足(4.86),  $m = 2$ , 因此对于所有  $|d_0(x)| \geq \lambda, t \in I_3$ ,

$$\begin{aligned} W(u^\epsilon) &= \frac{1}{2}(1 - u^\epsilon)^2(1 + u^\epsilon)^2 \\ &\leq 2(u^\epsilon - \text{sign}(u_0))^2 \leq 2\epsilon^4. \end{aligned}$$

于是  $J_3(t) \leq 2\epsilon^3 |A_3|, \forall t \in I_\epsilon$ .

(4) 令

$$C_5 = C_1 + \frac{1}{\mu}, t_5 = C_5 \epsilon^2 \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right),$$

其中  $\mu$  为出现于定理4.9的常数,  $C_1$  为出现于定理4.8的常数, 则(4.92), (4.93) 推出对一切  $t \in I_\epsilon \cap [t_5, \infty), |d_0(x)| \in [\epsilon C_3,$

$$\lambda], |u^\epsilon(x, t)| \geq \left[ q \left( \frac{|d_0(x)| - Kt}{\epsilon} - K \right) - K\epsilon - \frac{1}{4}\epsilon \right]^+,$$

这里  $(a)^+ = \max\{a, 0\}$ . 因  $|W'(u)| \leq 1, |u| \leq 1$ , 对充分小的  $\epsilon$  有

$$\begin{aligned} J_2(t) &\leq \int_{A_2} \frac{1}{\epsilon} W \left( \left[ q \left( \frac{|d_0(x)| - Kt}{\epsilon} - K \right) - \epsilon \left( K + \frac{1}{4} \right) \right]^+ \right) dx \\ &\leq \int_{A_2} \frac{1}{\epsilon} W \left( \left[ q \left( \frac{|d_0(x)| - Kt}{\epsilon} - K \right) \right]^+ \right) dx + \left( K + \frac{1}{4} \right) |A_2| \end{aligned}$$

$$\leq \int_{n_2} \frac{1}{\epsilon} W \left( \left[ q \left( \frac{|d_0(x)| - 2K\epsilon}{\epsilon} \right) \right]^+ \right) dx + \left( K + \frac{1}{4} \right) |A_2|, \\ \forall t \in I_\epsilon \cap [t_5, \epsilon].$$

利用交换积分变量可得

$$J_2(t) \leq \frac{C}{\epsilon} \int_{\epsilon C_3}^{\lambda} W \left( \left[ q \left( \frac{w_1 - 2k}{\epsilon} \right) \right]^+ \right) dw_1 + \left( K + \frac{1}{4} \right) |A_2| \\ \leq \frac{C}{\epsilon} \int_{\epsilon C_3}^{2K} W(0) dw_1 + \left( K + \frac{1}{4} \right) |A_2| + C \int_0^{\frac{\lambda}{\epsilon} - 2K} W(q(r)) dr.$$

$$\text{因 } W(q(r)) = \frac{(q'(r))^2}{2} = \frac{8e^{4r}}{(e^{2r} + 1)^4},$$

$$J_2(t) \leq \hat{C}(|A_2| + 1).$$

(5) 联系以上结果推出

$$\mu^\epsilon(A; t) = \sum_{i=1}^3 (I_i(t) + J_i(t)) \\ \leq \hat{C}(|A| + 1). \quad (4.107)$$

对  $t \geq 0$  满足

$$t \in I_3, \quad t \geq t_4, \quad t \geq t_5, \quad t \leq \epsilon, \quad (4.108)$$

其中  $\epsilon$  充分小.

(6) 设  $\psi$  为一光滑函数,  $|x| \rightarrow \infty$  指数衰减, 则有

$$\frac{d}{dt} \int \psi(x) \mu^\epsilon(dx; t) = -\epsilon \int \psi \left( -\Delta u^\epsilon + \frac{1}{\epsilon^2} f(u^\epsilon) \right)^2 dx + \\ \epsilon \int D\psi \cdot Du^\epsilon \left( -\Delta u^\epsilon + \frac{1}{\epsilon^2} f(u^\epsilon) \right) dx \leq -\epsilon \int \psi \left( -\Delta u^\epsilon + \frac{1}{\epsilon^2} f(u^\epsilon) \right. \\ \left. - \frac{D\psi \cdot Du^\epsilon}{2\psi} \right)^2 + \epsilon \int |Du^\epsilon|^2 \frac{|D\psi|^2}{4\psi} dx \leq \epsilon \int |Du^\epsilon|^2 \frac{|D\psi|^2}{4\psi} dx.$$

令

$$\hat{\psi}(x) = \exp(-\sqrt{1 + |x|^2}),$$

则  $|D\psi| \leq \hat{\psi}$ , 且

$$\frac{d}{dt} \int \hat{\psi}(x) \mu^\epsilon(dx; t) \leq \frac{1}{2} \int \frac{\epsilon}{2} |Du^\epsilon|^2 \hat{\psi} dx$$



$$\leq \frac{1}{2} \int \hat{\psi}(x) \mu^\varepsilon(dx; t).$$

因此, 对任何  $t \geq t_0 > 0$  有

$$\int \hat{\psi}(x) \mu^\varepsilon(dx; t) \leq \int \hat{\psi}(x) \mu^\varepsilon(dx; t_0) e^{\frac{1-t_0}{2}}. \quad (4.109)$$

(7) 令  $t_0$  为一点满足(4.108), 则由(1) 有

$$\begin{aligned} \int \hat{\psi}(x) \mu^\varepsilon(dx; t_0) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} e^{-i} \mu^\varepsilon(|x| \in [i-1, i]; t_0) \\ &\leq \hat{C} W_d \cdot \sum_{i=1}^{\infty} e^{-i} ((1+i)^d - (i-1)^d) \leq \hat{C}, \end{aligned}$$

其中  $W_d$  为  $R^d$  中单位空间的体积,  $\hat{C}$  为适当常数, 则由(4.109) 可得

$$\int \hat{\psi}(x) \mu^\varepsilon(dx; t) \leq \hat{C} e^{\frac{1}{2}},$$

对充分小的  $\varepsilon$  和

$$t \geq \max\{C_1, C_4, C_5\} \varepsilon^2 \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad (4.110)$$

成立.

(8) 设  $\phi$  为任意连续函数满足

$$\Lambda := \sup\{| \phi(x) | e^{\sqrt{2}(1+|x|)}; x \in R^d\} < \infty,$$

则  $| \phi(x) | \leq \Lambda \hat{\psi}(x)$ , 且

$$\int | \phi(x) | \mu^\varepsilon(dx; t) \leq \hat{C} \wedge e^{\frac{1}{2}}, \quad (4.111)$$

对一切满足(4.110) 的  $t$  和充分小的  $\varepsilon > 0$  成立. 因对任何  $\varepsilon > 0$ , 由(8),

$$\mu^\varepsilon(dx; t) \leq \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{K^2}{2} + 4 \right) dx,$$

故对任何  $t \geq 0$  有

$$\int | \phi(x) | \mu^\varepsilon(dx; t) \leq \frac{\lambda}{2} \left( \frac{K^2}{2} + 1 \right) \int \hat{\psi}(x) dx. \quad (4.112)$$

现从(6.111) 和(6.112) 推出(A),  $\eta = \sqrt{2}$ .

## 参 考 文 献

- [1] F. Bethuel, H. Brezis and F. Helein, Ginzburg-Landau vortices, Birkhäuser, Boston, 1994.
- [2] Fang Hua Lin, Some Dynamical properties of Ginzburg-Landau vortices, Comm. Pure and Applied Math., Vol. XLIX, 1996, 323—359.
- [3] Fang Hua Lin, A remark on the previous paper "Some dynamical properties of Ginzburg-Landau vortices, Comm. Pure and Applied Math., Vol. XLIX, 1996, 361—364.
- [4] Fang Hua Lin, Complex Ginzburg-Landau equations and dynamics of vortices, Filaments, and codimension 2 submanifolds, comm. Pure and Applied Math, Vol. II, 1998, 385—441.
- [5] J. Neu, vortices is complex scalar folds, Phys. D., 43, 1990, 385—406.
- [6] Fang Hua Lin, solutions of Ginzburg-Landau equations and critical points of the normalized energy, preprint.
- [7] C. Morrey, ([1]) The problem of plateau on a Riemannian manifold, Ann of Math., 49 (1948), 807—851; ([2]) Multiple integrals in the calculus of variations, Grundlehron, 130. springer, 1966.
- [8] S. A. Ladyzhenskaya, О. Л. Уапыена, И. И. Солонников, В. А. Linear and quasi-linear parabolic type equation.
- [9] D. Gilberg and Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, Grundlehron, 224, springer, 1983.
- [10] Evans, L. C., Soner, H. M. and Songanidis, P. E. Phase transition and generalized motion by mean curvature, Comm. Pure and Applied Math., 45, 1992, 1097—1123.
- [11] H. M. Soner, Ginzburg-Landau equation and motion by mean curvature II; Development of the initial interface, The Journal of Geometric Analysis, Vol. 7, No. 3, 1997, 477—491.

[General Information]

□ □ = □ □ □ - □ □ □ □

□ □ = □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

□ □ = 610

SS□ = 10999888

□ □ □ □ = 2002□ 08□ □ 1□

□ □

□ □

□ □ □ Ginzburg-Landau □ □ □ □ □ □

1 Benard □ □ □ □

2 Taylor-Couette □ □

3 □ □ Poiseuille □

4 □ □ □ □ □ □ □ □

5 □ KS □ □ □ □ □ Ginzburg-Landau □ □

6 □ □ □ □ Ginzburg-Landau □ □

□ □ □ □

□ □ □ □ □ Ginzburg-Landau □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

1 □ □ Ginzburg-Landau □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

2 □ □ Ginzburg-Landau □ □ □ □ □ □ □

3 Ginzburg-Landau □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

4 □ □ Ginzburg-Landau □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

5 □ □ Ginzburg-Landau □ □ □ □ □ □ □ □ □

6 □ □ Ginzburg-Landau □ □ □ □ □ □ □ □

7 Ginzburg-Landau □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

8 □ □ Ginzburg-Landau □ □ □ Gevrey □ □ □

9 □ □ Ginzburg-Landau □ □ □ □ □ □ □

10 □ □ □ □ □ Ginzburg-Landau □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

□ □ □

11 □ □ —□ □ □ □ □ Ginzburg-Landau □ □ □ □ □ □ □

12 □ □ Ginzburg-Landau □ □ □ □ □ □ □ □ □

13 Ginzburg-Landau □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

14 □ □ Ginzburg-Landau □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

15 □ □ □ □ □ —□ □ □ □ □ Schrödinger □ □ □ □ □ □ □ □ □

16 □ □ Ginzburg-Landau □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

□ □ □ □

□ □ □ □ □ Ginzburg-Landau □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

1 □ □ Ginzburg-Landau □ □ □ □ □ □ □

2 □ □ □ □ □ □ Ginzburg-Landau □ □ □ Cauchy □ □

3 □ □ □ □ Ginzburg-Landau □ □ □ □ □ □ □ □

4 □ □ Ginzburg-Landau □ □ □ □ □ □ □

5 □ □ Ginzburg-Landau □ □ □ □ □ □ □ Hausdorff □ □

6 □ □ □ □ (□ □ □ □) Ginzburg-Landau □ □ □ □ □ □ □ □

- 7  $Ginzburg-Landau$   $Gevrey$
- 8  $Ginzburg-Landau$
- 9  $Ginzburg-Landau$
- 10  $Ginzburg-Landau$  NLS
- 11  $Ginzburg-Landau$
- 12  $Ginzburg-Landau$
- 13  $Ginzburg-Landau$
- 14  $Ginzburg-Landau$  Cauchy
- 15  $Ginzburg-Landau$
- 16  $Ginzburg-Landau$
- 17  $Ginzburg-Landau$
- 18  $Ginzburg-Landau$
- 19  $Ginzburg-Landau$
- 20  $Ginzburg-Landau$
- 21  $Ginzburg-Landau$
- 22  $Ginzburg-Landau$
- 23  $Ginzburg-Landau$
- 24  $Ginzburg-Landau$
- 25  $Ginzburg-Landau$
- 26  $Ginzburg-Landau$
- 27  $Ginzburg-Landau$
- 28  $Ginzburg-Landau$
- 29  $Ginzburg-Landau$
- 30  $Ginzburg-Landau$
- 31  $Ginzburg-Landau$
- 32  $Ginzburg-Landau$
- 33  $Ginzburg-Landau$
- 34  $Ginzburg-Landau$
- 35  $Ginzburg-Landau$
- 36  $Ginzburg-Landau$
- 37  $Ginzburg-Landau$
- 38  $Ginzburg-Landau$
- 39  $Ginzburg-Landau$
- 40  $Ginzburg-Landau$
- 41  $Ginzburg-Landau$
- 42  $Ginzburg-Landau$
- 43  $Ginzburg-Landau$
- 44  $Ginzburg-Landau$
- 45  $Ginzburg-Landau$
- 46  $Ginzburg-Landau$
- 47  $Ginzburg-Landau$
- 48  $Ginzburg-Landau$
- 49  $Ginzburg-Landau$
- 50  $Ginzburg-Landau$
- 51  $Ginzburg-Landau$
- 52  $Ginzburg-Landau$
- 53  $Ginzburg-Landau$
- 54  $Ginzburg-Landau$
- 55  $Ginzburg-Landau$
- 56  $Ginzburg-Landau$
- 57  $Ginzburg-Landau$
- 58  $Ginzburg-Landau$
- 59  $Ginzburg-Landau$
- 60  $Ginzburg-Landau$
- 61  $Ginzburg-Landau$
- 62  $Ginzburg-Landau$
- 63  $Ginzburg-Landau$
- 64  $Ginzburg-Landau$
- 65  $Ginzburg-Landau$
- 66  $Ginzburg-Landau$
- 67  $Ginzburg-Landau$
- 68  $Ginzburg-Landau$
- 69  $Ginzburg-Landau$
- 70  $Ginzburg-Landau$
- 71  $Ginzburg-Landau$
- 72  $Ginzburg-Landau$
- 73  $Ginzburg-Landau$
- 74  $Ginzburg-Landau$
- 75  $Ginzburg-Landau$
- 76  $Ginzburg-Landau$
- 77  $Ginzburg-Landau$
- 78  $Ginzburg-Landau$
- 79  $Ginzburg-Landau$
- 80  $Ginzburg-Landau$
- 81  $Ginzburg-Landau$
- 82  $Ginzburg-Landau$
- 83  $Ginzburg-Landau$
- 84  $Ginzburg-Landau$
- 85  $Ginzburg-Landau$
- 86  $Ginzburg-Landau$
- 87  $Ginzburg-Landau$
- 88  $Ginzburg-Landau$
- 89  $Ginzburg-Landau$
- 90  $Ginzburg-Landau$
- 91  $Ginzburg-Landau$
- 92  $Ginzburg-Landau$
- 93  $Ginzburg-Landau$
- 94  $Ginzburg-Landau$
- 95  $Ginzburg-Landau$
- 96  $Ginzburg-Landau$
- 97  $Ginzburg-Landau$
- 98  $Ginzburg-Landau$
- 99  $Ginzburg-Landau$
- 100  $Ginzburg-Landau$